UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA

Escuela de Formación Continua

Licenciatura en Matemática Aplicada

Tesis

"Triángulos Ortológicos, Perspectivos y La Recta de Euler"

Profesor: Lic. Miguel Calzón

Alumno: Ramos, Martín Pablo César.

Ciclo lectivo 2009

Índice

1. Introducción …….1
2. Triángulos ortológicos ……..1
3. Casos Particulares …….4

    3.1 Triángulo Pedal ……4

    3.2 Triángulo órtico ……7

    3.3 Triángulo de los puntos medios ……..12

4. La Recta de Euler ……..14

5. Teorema de Menelao …….19

6. Triángulos Perspectivos …….21

    6.1 Teorema de Desargues ……..21

    6.2 El reciproco del teorema de Desargues ……22

7. Triángulos perspectivos y ortológicos ……23

8. Bibliografía ……28

Triángulos Ortológicos, Perspectivos y La Recta de Euler.

Introducción.

Leonhard Euler:

El nombre de Euler aparece tan frecuentemente en tantas ramas de las matemáticas que son obligadas unas breves palabras sobre él. Leonhard Euler nació en 1707 en Basilea, Suiza. En 1727, fue invitado a la Academia de San Petersburgo en Rusia. En 1741, marchó a Berlín, para hacerse cargo de la cátedra de Matemática de la Academia Prusiana. Volvió a San Petersburgo en 1766, y permaneció allí hasta su muerte en 1783.

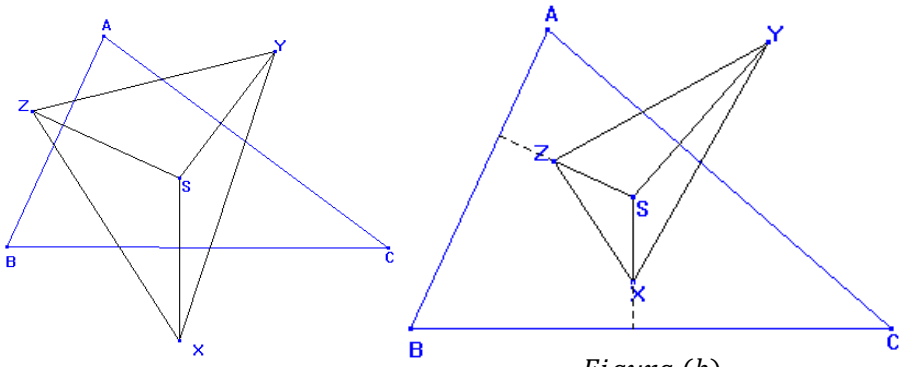
Euler era un trabajador incansable, sus actividades enriquecieron todos los campos de las matemáticas. Se mire donde se mire, hay un teorema de Euler, una Fórmula de Euler o un método de Euler. Euler escribió 473 ensayos que se publicaron durante su vida, 200 que se publicaron poco después, y 61 más que tuvieron que esperar. Más aún, hizo todo esto con un severo impedimento, perdió la visión de un ojo en 1735, y la visión del otro en 1766. Su habilidad de manipulación era destacable, y su intuitiva comprensión matemática era enorme.

En este trabajo aparte de dar una introducción a los triángulos ortológicos y perspectivos haremos una demostración que relaciona la ***Recta de Euler*** con dichos triángulos.

Triángulos ortológicos.

Definición:

Diremos que un triangulo XYZ es ortológico respecto a un triangulo ABC si las perpendiculares de X, Y, Z respecto de BC, CA, AB son concurrentes. Al punto de intersección se lo llama centro de ortología de XYZ respecto de ABC.



$Figura\ (a)$ $Figura\ (b)$

$figura\ 1$

La $figura\ 1$ muestra una forma de conseguir un triángulo XYZ ortológico respecto de ABC. Consideramos un punto cualquiera S del plano y elegimos XYZ cualesquiera en las perpendiculares por S a BC, CA, AB.

El siguiente lema nos da una condición necesaria y suficiente para que el Triángulo XYZ sea ortológico respecto de ABC.

Lema: El triángulo XYZ es ortológico respecto de ABC si y solo si se cumple:

$$\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MY} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MZ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad [1],$$

para cualquier punto M del plano.

Antes de la demostración una aclaración:

En primer lugar, la expresión en el primer miembro de [1] es independiente del valor de M, ya que si llamamos $f(M)$ a la expresión [1] resultaría que para cualesquiera M y N, tenemos que

$$f(M) = \overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MY} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MZ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,$$

y

$$f(N) = \overrightarrow{NX} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NY} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NZ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,$$

si restamos miembro a miembro, tenemos:

$$f(M) - f(N) = \overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MY} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MZ} \cdot \overrightarrow{AB} - \left(\overrightarrow{NX} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NY} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NZ} \cdot \overrightarrow{AB}\right)$$

agrupando adecuadamente, nos queda:

$$\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{NX} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MY} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{NY} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MZ} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NZ} \cdot \overrightarrow{AB}$$

sacando factor común en cada término $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{AB}$ respectivamente, nos queda:

$$(\overrightarrow{MX} - \overrightarrow{NX}) \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MY} - \overrightarrow{NY}) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MZ} - \overrightarrow{NZ}) \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$$

y como $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, nos queda:

$$f(M) - f(N) = \overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{MN} \cdot \vec{0} = 0$$

por lo tanto,

$$f(M) - f(N) = 0$$
$$f(M) = f(N).$$

Por lo tanto esto nos muestra que el lema no depende del punto que elijamos, será suficiente comprobar el lema para un punto cualquiera.

Ahora, para demostrar el lema, si XYZ es ortológico respecto de ABC, y si tomamos como M el centro de ortología de XYZ respecto de ABC es claro que [1] se cumple, pues cada uno de los tres sumandos se anula, por ser los vectores perpendiculares. Recíprocamente, si [1] se cumple para cualquier M, tomamos como M el punto de intersección de las perpendiculares a BC y CA por X e Y respectivamente, y [1] se reducirá a $\overrightarrow{MZ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, es decir, $\overrightarrow{MZ}$ también será perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y XYZ será ortológico respecto de ABC, q.e.d.

Simetría de la definición.

Es natural preguntarse si el hecho de que un triángulo sea ortológico respecto de otro implica que el último será también ortológico respecto del primero. En este apartado veremos que la respuesta es afirmativa, lo que permitirá expresar la relación de ortología diciendo simplemente que los triángulos ABC y XYZ son ortológicos. Los centros de ortología podrán coincidir, pero serán, en general, distintos.

***Propiedad* 1:** Si el triángulo XYZ es ortológico respecto de ABC entonces el triángulo ABC también es ortológico respecto de XYZ.

Demostración:

Recordando el ***lema*** anterior, si XYZ es ortológico respecto de ABC, haciendo $M = X$ en el lema, tendremos que:

$$\overrightarrow{XX} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{XZ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,$$

y nos queda al ser el primer término nulo:

$$\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{XZ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,$$

equivalente a (cambiando el sentido de los vectores):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{XY} = 0$$

agregando adecuadamente el término que nos falta, queda:

$$\overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{XY} = 0$$

que coincide con la expresión:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{XY} = 0$$

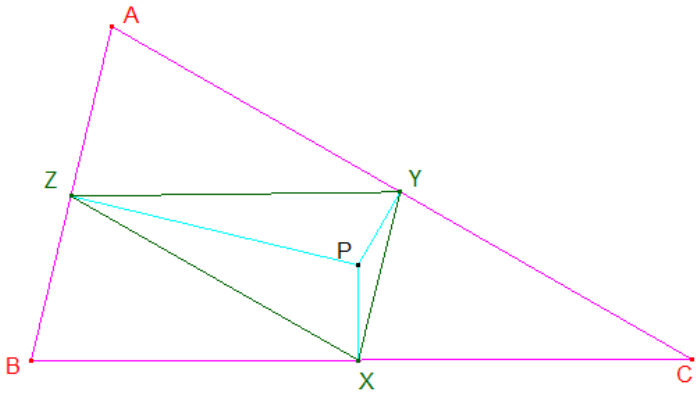
cuando $M = A$, es decir, ABC es ortológico respecto de XYZ, q.e.d.

Casos Particulares.

Triángulo Pedal.

Definición:

Si por un punto P interior de un triángulo ABC, se trazan las perpendiculares por P a cada uno de los lados del triángulo ABC, los pies de estas perpendiculares son los vértices de un triangulo XYZ que se llama triangulo Pedal para el punto P.

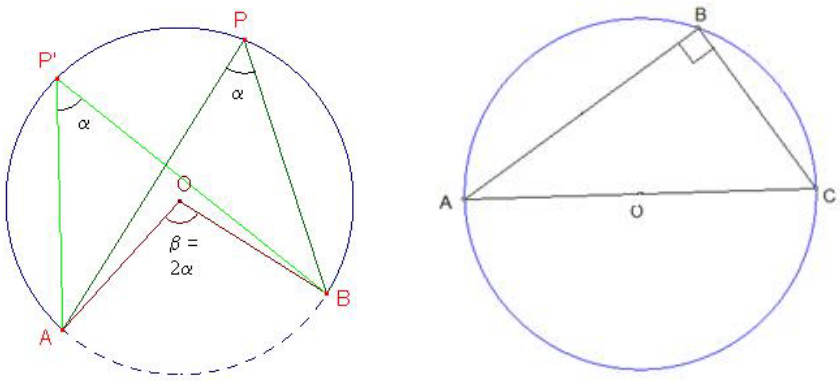


$figura\ 2$

***Propiedad* 2:** El tercer triángulo Pedal es semejante al triángulo original.

Demostración:

Primero vamos a demostrar una propiedad previa: "*Lugar geométrico de Thales*"



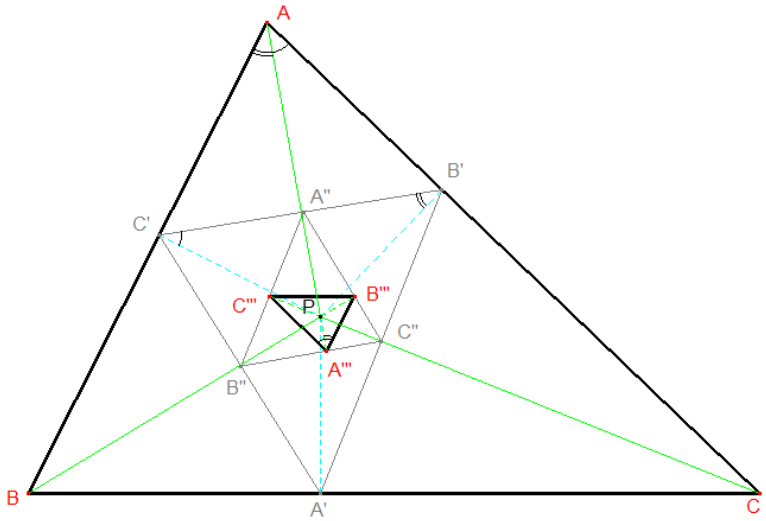
$Figura\ (a)$ $figura\ (b)$

$figura\ 3$

El lugar geométrico de los puntos del plano que "*miran*" un segmento $\overline{AB}$ bajo un ángulo dado de amplitud α, está formado por dos arcos de circunferencia de cuerda AB y se llaman arcos capaces sobre $\overline{AB}$ de ángulo α, cuya amplitud es la mitad del ángulo central de la cuerda AB, en la $figura\ 4.a$, se muestra como dos puntos $P\ y\ P'$ sobre la cuerda AB tienen el mismo ángulo α, cuya amplitud es la mitad de β, el ángulo central correspondiente a la cuerda AB.

Observación: En caso que α = 90°, los arcos resultan ser dos semicircunferencias de diámetro $\overline{AB}$, es decir una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, y a esto se denomina Lugar geométrico de Thales ($figura\ 4.b$).

Volviendo a la *propiedad*



$figura\ 4$

Unimos el punto P con cada uno de los vértices del triángulo ABC, y por la *propiedad* recién demostrada, P pertenece a la circunferencia circunscripta de los triángulos (*ver figura* 5):

$$A\,C_1B_1, \qquad B_1A_2C_2, \qquad C_1A_2B_2, \qquad B_3A_3C_2, \qquad B_2\,C_3A_3$$

ya que corresponden a triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el diámetro de la circunferencia circunscripta.

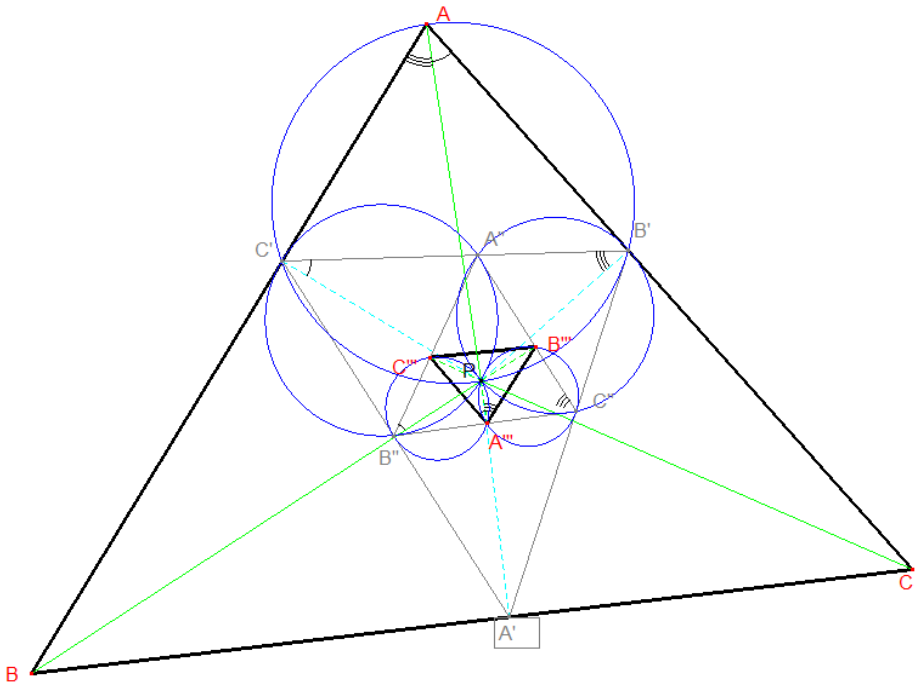


figura 5

entonces tenemos que: $\widehat{A} = \alpha + \beta$,

donde, $\alpha = \widehat{B_1AP}$ *y* $\beta = \widehat{C_1AP}$

luego:

$$\alpha = \widehat{B_1AP} = \widehat{B_1C_1P}, \text{ ya que abarca el arco } B_1P$$

$$\widehat{B_1C_1P} = \widehat{A_2C_1P} = \widehat{A_2B_2P}, \text{ ya que abarca el arco } A_2P$$

$$\widehat{A_2B_2P} = \widehat{C_3B_2P} = \widehat{C_3A_3P}, \text{ ya que abarca el arco } C_3P$$

por lo tanto:

$$\alpha = \widehat{C_3A_3P} \qquad [1]$$

por otro lado, tenemos que:

$$\beta = \widehat{C_1AP} = \widehat{C_1B_1P}, \text{ ya que abarca el arco } C_1P,$$

$$\widehat{C_1B_1P} = \widehat{A_2B_1P} = \widehat{A_2C_2P}, \text{ ya que abarca el arco } A_2P,$$

$$\widehat{A_2C_2P} = \widehat{B_3C_2P} = \widehat{B_3A_3P}, \text{ ya que abarca el arco } B_3P$$

por lo tanto:

$$\beta = \widehat{B_3A_3P} \quad [2]$$

y como:

$$\widehat{A'''} = \widehat{C_3A_3P} + \widehat{B_3A_3P}$$

por [1] y [2], resulta que:

$$\widehat{A'''} = \alpha + \beta = \hat{A} \Longrightarrow \boxed{\hat{A} = \widehat{A'''}}$$

análogamente:

$$\boxed{\hat{B} = \widehat{B'''}} \text{ y } \boxed{\hat{C} = \widehat{C'''}}$$

por lo tanto los triángulos ABC y $A'''B'''C'''$ son semejantes, q.e.d.

Triángulo órtico.

Definición:

Llamaremos triángulo órtico de un triángulo acutángulo ABC al triángulo XYZ formado por los pies de las alturas del triángulo ABC sobre los lados del mismo.

El triángulo órtico es un caso particular del triangulo Pedal (cuando P es el ortocentro).

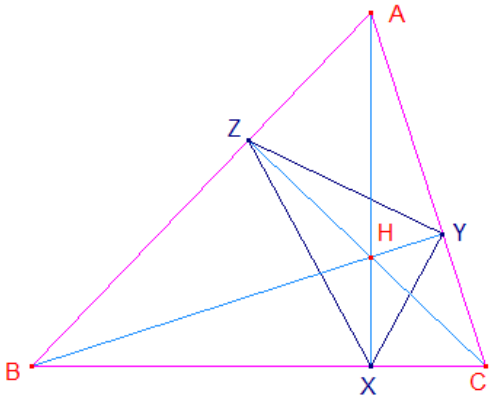


figura 6

Propiedad 3: Las alturas de un triángulo acutángulo ABC son bisectrices del triángulo órtico XYZ del ABC

Demostración:

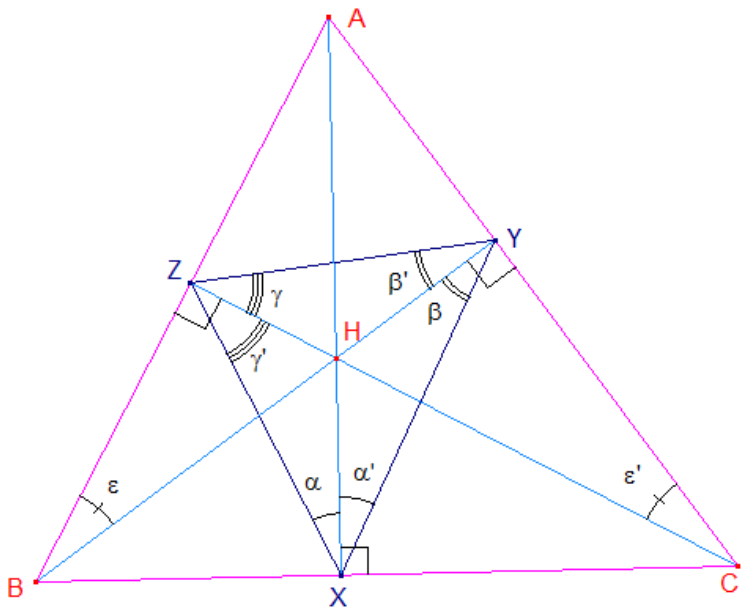


figura 7

Tenemos que $\hat{X} = \alpha + \alpha'$, $\hat{Y} = \beta + \beta'$ y $\hat{Z} = \gamma + \gamma'$.

Vamos a probar que $\alpha = \alpha'$.

Como Z e Y son vértices de triángulos rectángulos cuya hipotenusa común es $\overline{BC}$, entonces los cuatros puntos B, Z, Y, C están en una circunferencia por *Lugar geométrico de Thales*, y por lo tanto, son iguales los ángulos inscriptos ε y ε'.

Análogamente, por ser rectos los ángulos $\hat{Y}$ y $\alpha' = \widehat{HXC}$ están los cuatros puntos C, Y, H, X en otra circunferencia, verificando que $\alpha' = \varepsilon'$, de manera análoga se demuestra que $\alpha = \varepsilon$, por lo tanto $\alpha = \alpha'$.

De manera similar obtenemos que $\beta = \beta'$ y $\gamma = \gamma'$.

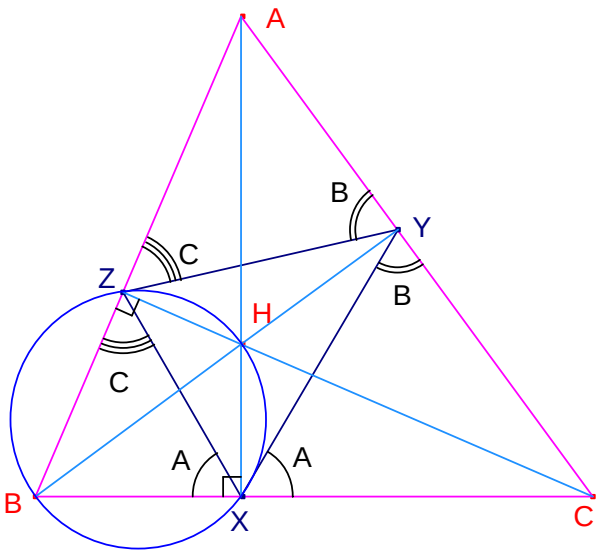
Por lo tanto, las alturas del triángulo ABC son bisectrices del triángulo órtico XYZ, q.e.d.

Es decir, el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico.

Corolario: los lados del triángulo bisecan a los ángulos exteriores de su triángulo órtico.

***Propiedad* 4**: Dado un triángulo ABC y su órtico XYZ (con $X \in BC$, $Y \in AC$, $Z \in AB$) entonces:

$$\hat{A} = \widehat{ZXB} = \widehat{YXC}, \qquad \hat{B} = \widehat{ZYA} = \widehat{XYC}, \qquad \hat{C} = \widehat{AZY} = \widehat{XZB}$$



$figura\ 8$

Demostración:

Sea H el ortocentro del triángulo ABC.

Como Z y X son vértices de triángulos rectángulos BZH y BXH respectivamente, cuya hipotenusa común es $\overline{BH}$, entonces los cuatros puntos B, Z, H, X están en una circunferencia por "*Lugar geométrico de Thales*".

Por lo tanto, son iguales los ángulos inscriptos $\widehat{XZB} = \widehat{XHB}$ [1], ya que comparten el mismo arco BX

pero:

$$\widehat{XHB} = 90° - \widehat{HBX} \quad [2]$$

por ser un ángulo del triángulo rectángulo BXH.

y

$$\widehat{HBX} = \widehat{YBC} \quad [3]$$

por tener el mismo vértice B y las mismas semirrectas $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BY}$ y $\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BC}$

reemplazando [1], [3] en [2], nos queda:

$$\widehat{XZB} = 90° - \widehat{YBC}$$

pero:

$$90° - \widehat{YBC} = \hat{C}$$

por suma de ángulos interiores del triángulo rectángulo BYC

por lo tanto:

$$\widehat{XZB} = \hat{C} \quad [4]$$

por otro lado, la *propiedad 3* nos dice que las alturas de un triángulo acutángulo ABC son bisectrices del triángulo órtico XYZ, tenemos que:

$$\widehat{CZX} = \widehat{CZY} \quad [5]$$

y por ser alturas del triangulo ABC, tenemos que:

$$\widehat{BZC} = \widehat{AZC} = 90°$$

y tenemos que:

$$\widehat{CZX} + \widehat{XZB} = \widehat{BZC} \quad [6]$$

y

$$\widehat{CZY} + \widehat{YZA} = \widehat{AZC} \quad [7]$$

igualando [6] y [7], nos queda:

$$\widehat{CZX} + \widehat{XZB} = \widehat{CZY} + \widehat{YZA}$$

por [5] y simplificando:

$$\widehat{XZB} = \widehat{YZA} \quad [8]$$

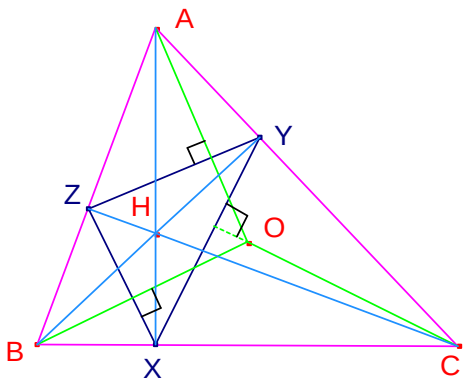
entonces por [4] y [8]:

$$\boxed{\widehat{XZB} = \widehat{YZA} = \hat{C}}$$

De manera similar se demuestra para los ángulos $\hat{A} = \widehat{ZXB} = \widehat{YXC}$, $\hat{B} = \widehat{ZYA} = \widehat{XYC}$ de la $Figura$ 8, q.e.d.

Corolario: Los triángulos AYZ, BXY, CXY y ABC son semejantes

***Propiedad* 5**: Las perpendiculares por A, B, C a los lados YZ, ZX, XY del triángulo órtico XYZ de ABC se cortan en el circuncentro O de ABC.



$figura$ 9

Demostración:

Hemos trazado las perpendiculares por A y C a YZ y XY, respectivamente que se cortan en el punto O.

El triángulo OAC es isósceles, ya que:

$$\widehat{OAC} = 90° - \hat{B} = \widehat{OCA}.$$

por *propiedad 4*,

por lo tanto:

$$\overline{OA} = \overline{OC} \quad [1]$$

y de forma análoga:

$$\overline{OA} = \overline{OB} \quad [2]$$

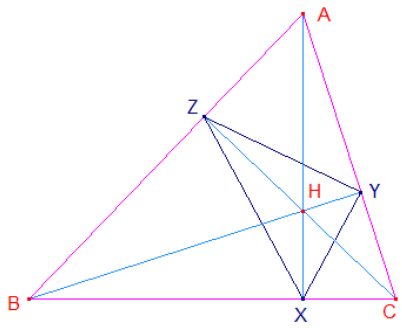
entonces por [1] y [2], tenemos que:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

por lo tanto, O es el circuncentro del triángulo ABC, q.e.d.

Propiedad 6: el producto de los segmentos en los que un lado de un triángulo queda dividido por el vértice correspondiente del triángulo órtico es igual al producto de los lados del triángulo órtico que pasan por el vértice considerado.

Demostración:



$figura$ 10

Como por el corolario de la *Propiedad 4* los triángulos XBZ y XCY son semejantes, entonces:

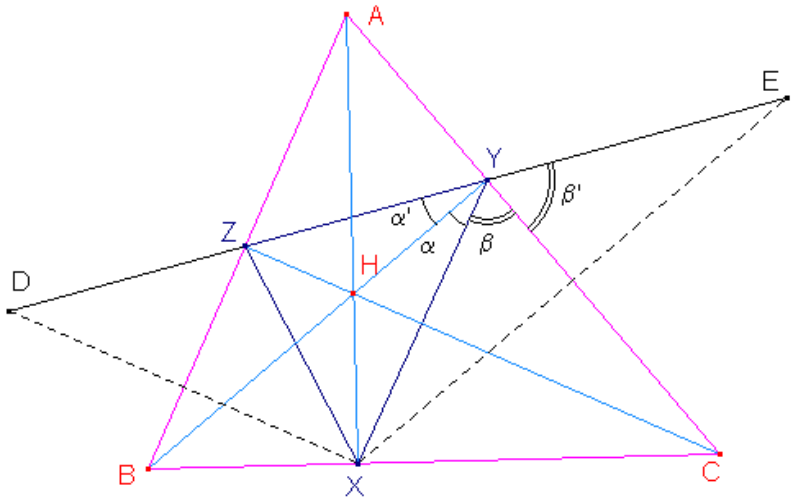
$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{YX}}{\overline{XC}} \Longrightarrow \overline{BX} \cdot \overline{XC} = \overline{XY} \cdot \overline{XZ}$$

Corolario: el producto de los seis segmentos en los que los lados de un triángulo quedan divididos por los pies de las alturas es igual al cuadrado del producto de los tres lados del triángulo órtico.

$$\overline{BX} \cdot \overline{XC} \cdot \overline{CY} \cdot \overline{YA} \cdot \overline{AZ} \cdot \overline{ZB} = (\overline{XY} \cdot \overline{XZ}) \cdot (\overline{YX} \cdot \overline{YZ}) \cdot (\overline{ZY} \cdot \overline{ZX}) = (\overline{\mathrm{XY}} \cdot \overline{\mathrm{YZ}} \cdot \overline{\mathrm{ZX}})^2$$

Propiedad 7: Dado el triángulo órtico XYZ de un triángulo acutángulo ABC. Sean D, E los simétricos de X respecto de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, entonces D, Z, Y, E, están alineados.

Demostración:



$figura\ 11$

Tenemos por la *propiedad 3* que $\alpha = \alpha'$.

Además E es el simétrico de X, respecto de AC , y como Y pertenece al eje de simetría, resulta que: $\beta = \beta'$,

luego por ser altura, $\alpha + \beta = 90°$

entonces:

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

por lo tanto:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 180°$$

en consecuencia: Z, Y, E están alineados.

De manera similar D, Z, Y están alineados.

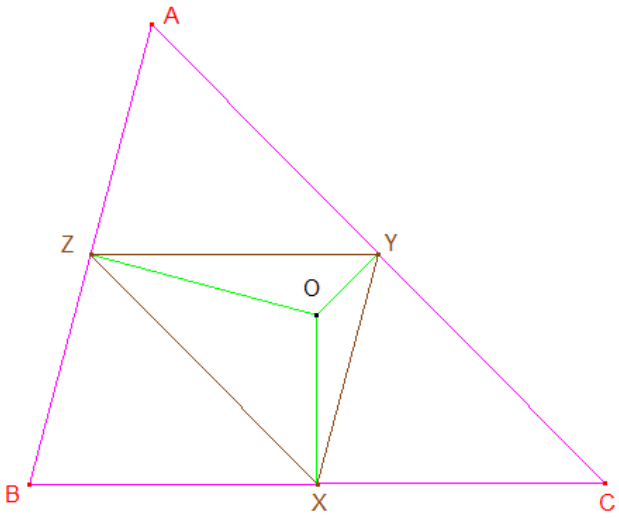
Por lo tanto D, Z, Y, E están alineados, q.e.d.

Triángulo de los puntos medios.

Definición:

El triangulo formado al unir los puntos medios de los lados de un triángulo se denomina triángulo de los puntos medios o triángulo medial.

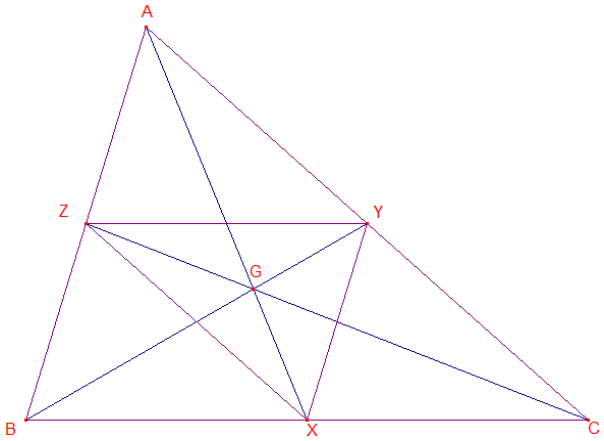
El triángulo de los puntos medios es un caso particular del triángulo Pedal (cuando P es el circuncentro).



$figura$ 12

Propiedad 8: Un triangulo y su triángulo de puntos medios tienen el mismo baricentro (G).

Demostración:



$figura$ 13

Vemos que el cuadrilátero $AZXY$ es un paralelogramo, ya que $\overline{XZ}$ y $\overline{XY}$ son base medias del ABC.

Entonces las diagonales $\overline{AX}$ y $\overline{ZY}$ se bisecan, por lo tanto la mediana al lado $\overline{BC}$ del triángulo ABC coincide con la mediana al lado $\overline{ZY}$ del triángulo XYZ.

De manera análoga se demuestra que las otras dos medianas de ambos triángulos coinciden.

Es decir, ambos triángulos tienen el mismo baricentro G, q.e.d.

***Propiedad 9*:** Un triángulo y su triángulo de los puntos medios son semejantes con una razón 2:1.

Demostración:

Vemos que el cuadrilátero $BZYX$ es un paralelogramo, ya que $\overline{XY}$ y $\overline{YZ}$ son bases medias del ABC.

Tenemos que:

$$\overline{ZY} = \overline{BX} \qquad [1]$$

y como

$$\overline{BX} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

por ser X punto medio de $\overline{BC}$

y por [1] nos queda:

$$\overline{ZY} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

despejando:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{ZY}} = 2 \qquad [2]$$

similarmente:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{ZX}} = 2, \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = 2 \quad [3]$$

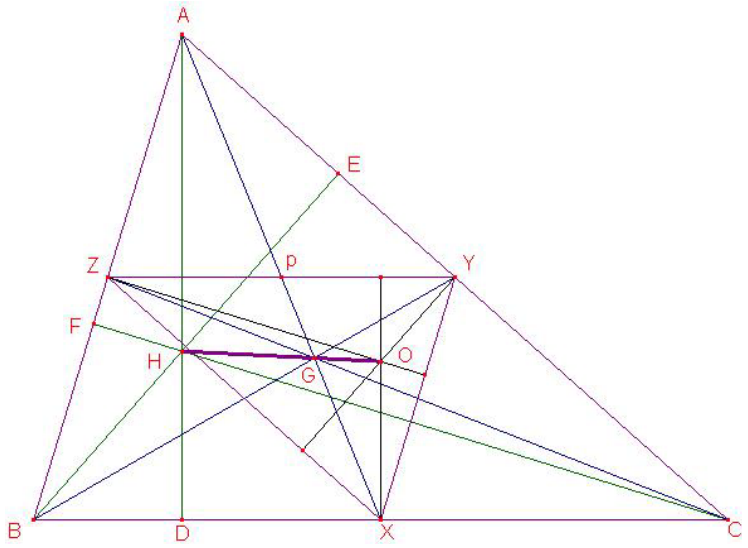
por [2] y [3] ABC y XYZ son semejantes, ya que tienen sus lados correspondientes proporcionales y con una razón 2:1, q.e.d.

La Recta de Euler

***Propiedad 10*:** El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo (no equilátero) están alineados. El baricentro divide la distancia del ortocentro al circuncentro en la razón 2: 1.

La recta que pasa por el ortocentro, el baricentro y el circuncentro se llama *Recta de Euler*.

Demostración:



$figura\ 14$

Primeros vamos a destacar algunos elementos de la $figura\ 14$, el triángulo XYZ es el triángulo de los puntos medios del ABC, las medianas del ABC se cortan en G (baricentro), las alturas del ABC se cortan en H (ortocentro).

Los triángulos XYZ y del ABC son semejantes y la razón entre dos segmentos cualesquiera correspondientes será de $2:1$, por *propiedad 8*.

Ahora bien, las alturas del triángulo XYZ son las mediatrices del triángulo ABC, concluimos que el ortocentro (O) del triángulo XYZ es el circuncentro del triángulo ABC, ya que $BC \parallel ZY$ por ser XYZ triangulo de puntos medios del ABC y $BC \perp XO$ por ser XO medatriz del ABC, lo tanto, $ZY \perp XO$, y de manera similar para los demás vértices, entonces O es el ortocentro del triángulo XYZ

Como H es el ortocentro del triángulo ABC mientras que O es el ortocentro del triángulo XYZ, por ser semejantes y además por *propiedad 8*, tenemos: $\frac{\overline{AH}}{\overline{OX}} = 2$ y que $\frac{\overline{AG}}{\overline{GX}} = 2$ [1].

Finalmente, como AD y OX son ambas perpendiculares a BC, ambas son paralelas. Por lo tanto,

$$\widehat{HAG} = \widehat{OXG} \quad [2]$$

por ser alternos internos en $Ad \parallel OX$ y AX transversal.

y por [1] y [2], resulta que

$$\Delta GHA \sim \Delta OXG \text{ Con una razón 2:1} \quad [3]$$

por lo tanto

$$\widehat{AGH} = \widehat{XGO}$$

Es decir, son opuestos por el vértice, entonces O, G, H están alineados y por [3], $\overline{HG} = 2\overline{GO}$, q.e.d.

Propiedad 11: Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los tres puntos de Euler (puntos medios de cada segmento que unen los vértices con el ortocentro), pertenece a una circunferencia.

Dicha circunferencia se denomina circunferencia de los nueve puntos, o circunferencia de Feuerbach.

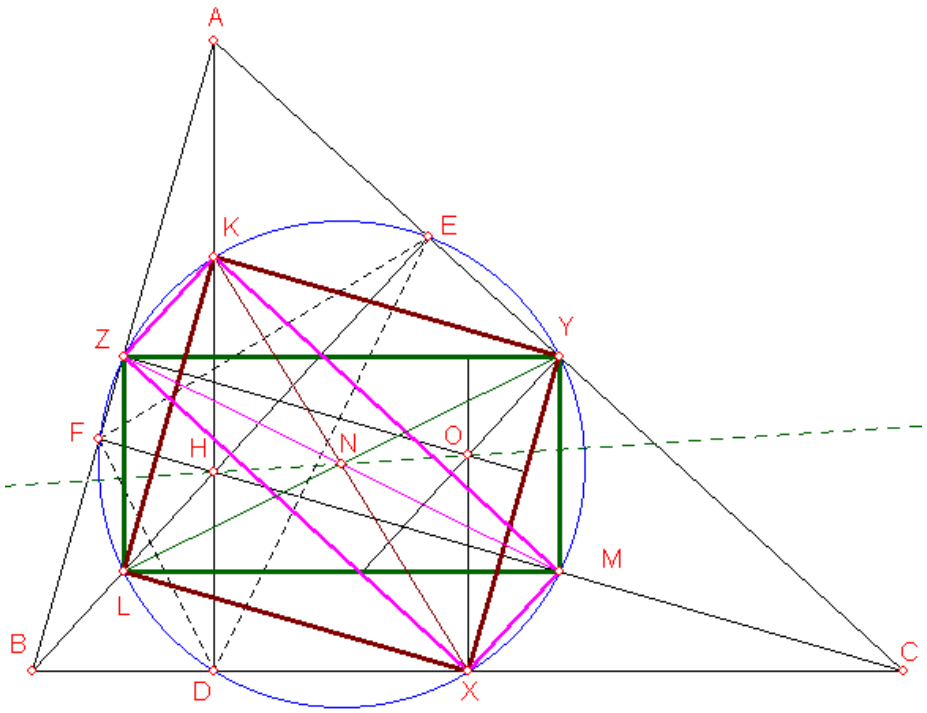


figura 15

XYZ triángulo de los puntos medios, es decir: X punto medio de $\overline{BC}$, Y punto medio de $\overline{AC}$ y Z punto medio de $\overline{AB}$. [1]

DEF triángulo órtico.

K, L, M, puntos de Euler, es decir: K punto medio de $\overline{AH}$, L punto medio de $\overline{HB}$ y M punto medio de $\overline{HC}$. [2]

Demostración:

$\overline{ZY}$ base media de ABC respecto de $\overline{BC}$ por [1] [3]

$\overline{LM}$ base media de BHC respecto de $\overline{BC}$ por [2] [4]

De [3] *y* 4], resulta que:

$$BC \parallel LM \parallel ZY \ \ y \ \ \frac{\overline{BC}}{2} = \overline{LM} = \overline{ZY} \qquad [5]$$

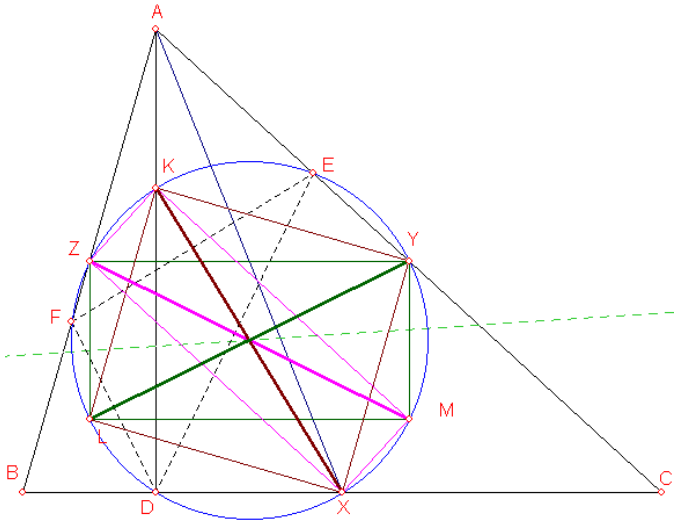
$\overline{ZL}$ base media de BHA respecto de $\overline{AH}$, por [1] y [2] [6]

$\overline{YM}$ base media de CHA respecto de $\overline{AH}$, por [1] y [2] [7]

De [6] y [7], resulta que:

$$AH \parallel AD \parallel ZL \parallel YM \ \ y \ \ \frac{\overline{AH}}{2} = \overline{ZL} = \overline{YM} \quad [8]$$

como $AD \perp BC$, por ser altura, y por [5] y [8], resulta que el paralelogramos $ZLMY$ es un rectángulo.



$figura$ 16

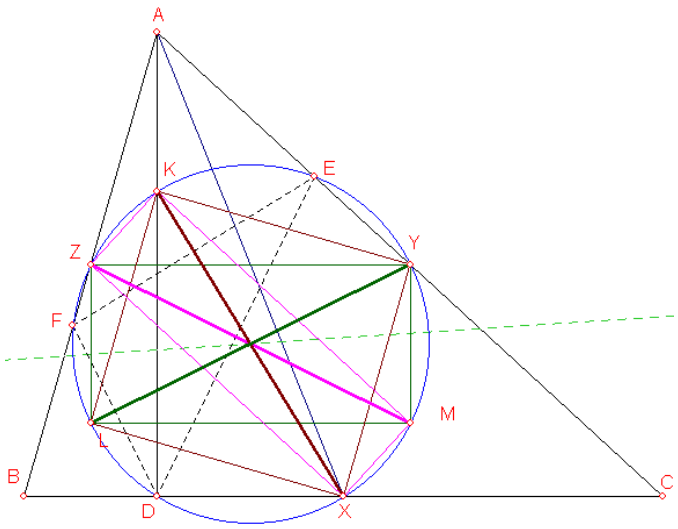
De manera similar pero tomando los triángulos AHC y ABC con lado base común $\overline{AC}$ y los triangulos AHB y ABC con base común $\overline{AB}$, los cuadriláteros $ZXMK$ y $KLXY$, son también rectángulos.

Todo rectángulo es inscriptible en una circunferencia cuyo diámetro es la diagonal.

$\overline{KX}$ y $\overline{MZ}$ es diámetro de la circunferencia que pasa por $LKYX$,

$\overline{MZ}$ y $\overline{LY}$ es diámetro de la circunferencia que pasa por $ZKMX$,

como las diagonales de un rectángulo son iguales, nos queda que $\overline{KX} = \overline{MZ} = \overline{LY}$ [9]



$figura$ 17

entonces tienen el mismo diámetro por lo tanto pertenecen a la misma circunferencia,

$\overline{KX}$ y $\overline{LY}$ es diámetro de la circunferencia que pasa por $KLXY$,

luego coinciden los diámetros ($figura$ 17), entonces los puntos pertenecen a la misma circunferencia,

$K, Z, L, X, M, Y,$ pertenecen a la misma circunferencia.

En el triángulo órtico DEF, tenemos que:

$KDX = 90$, entonces pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{KX}$,

$MFZ = 90$, entonces pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{MZ}$,

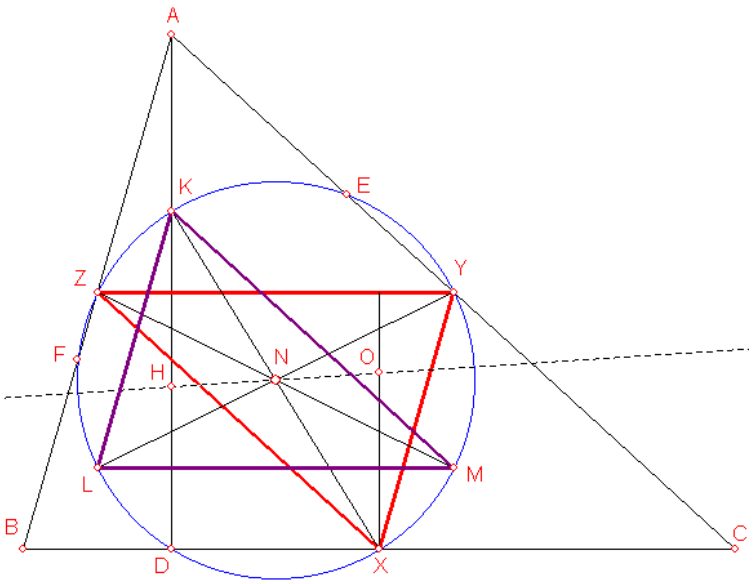
$LEY = 90$, entonces pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{LY}$,

ya que los diámetros coinciden por [9], entonces los puntos pertenecen a la misma circunferencia.

Luego D, E, F, X, Y, Z, K, L, M, pertenecen a la misma circunferencia, q.e.d.

Propiedad 12: el centro de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo ABC está situada en la recta de Euler, equidistante del ortocentro y el circuncentro

Demostración:



$figura$ 18

Por la *propiedad 12*, en la circunferencia de los nueve puntos, los tres puntos K, L, M son diametralmente opuestos a X, Y, Z, donde N es el centro de la circunferencia, es decir $N = \overline{KX} \cap \overline{LY} \cap \overline{ZM}$. Cualesquiera de los dos triángulos KLM y XYZ, pueden obtenerse del otro con una simetría central de centro N.

Esta simetría que intercambia los dos triángulos, debe intercambiar también sus ortocentros H y O, respectivamente.

Por lo tanto, el centro de la circunferencia de los nueve puntos está en la recta de Euler por estar en el punto medio de $\overline{HO}$ (ver $figura$ 18), q.e.d.

Teorema de Menelao:

Los puntos X, Y, Z de los lados $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ (convenientemente prolongados) del triángulo ABC están alineados, si y solo si:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = 1$$

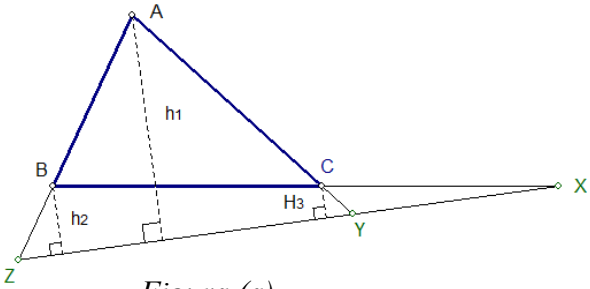


Figura (a)

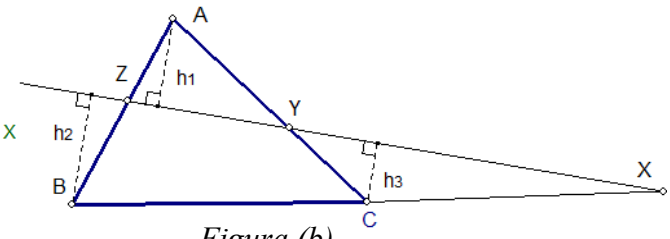


Figura (b)

$figura$ 19

Como los puntos X, Y, Z están alineados (como muestra la $figura\ 19$), por ellos pasa una recta L. Sean $h_1,\ h_2,\ h_3$ las distancias de A, B, C a la recta L.

Por semejanza de triángulos, tenemos que:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{h_3}{h_1}, \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{h_1}{h_2}$$

multiplicando las tres igualdades, obtenemos:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

simplificando, nos queda que:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = 1,\ q.e.d.$$

Recíprocamente si esta igualdad se verifica para cualquier punto X, Y, Z de cada lado, entonces estos tres puntos están alineados.

Demostración:

Si X, Y, Z están en cada uno de los tres lados de manera tal que $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = 1$ [1]

sea Z' el punto de corte de AB y XY. Entonces por el teorema anterior, resulta que

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} = 1 \quad [2]$$

por [1] y [2], resulta:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}}$$

entonces:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}}$$

Si definimos la función,

$$f: (A, B) \longrightarrow \mathbb{R}^+ / f(Z) = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$$

Como Z $\in (A, B)$ tenemos que $Z \neq B$, entonces f es continua.

A medida que tomamos distintos Z, observamos que $\overline{AZ}$ crece y $\overline{ZB}$ decrece. Entonces f es estrictamente creciente.

Por lo tanto f es inyectiva, ya que $Z \neq Z' \Rightarrow Z < Z' \Rightarrow f(Z) < f(Z') \Rightarrow f(Z) \neq f(Z')$. Y Cuando Z$\longrightarrow A$, $f(X) \longrightarrow 0$ y cuando $Z \longrightarrow B$, $f(Z) \longrightarrow +\infty$.

Por lo tanto f es biyectiva, entonces existe exactamente un punto Z $\in (A, B)$ donde $f(Z) = \delta \in \mathbb{R}^+$
Por lo tanto Z' coincide con Z, y hemos probado que X, Y, Z están alineados, q.e.d.

Triángulos Perspectivos.

Definición:

Diremos que los triángulos ABC y XYZ son perspectivos desde una recta si los puntos de intersección $\{P\} = BC \cap YZ$, $\{Q\} = CA \cap ZX$ y $\{R\} = AB \cap XY$ son colineales, la recta que contiene dichos puntos se llama eje de perspectiva. Asimismo, diremos que los triángulos ABC y XYZ son perspectivos desde un punto si las rectas AX, BY y CZ se cortan en un punto, llamado centro de perspectiva.

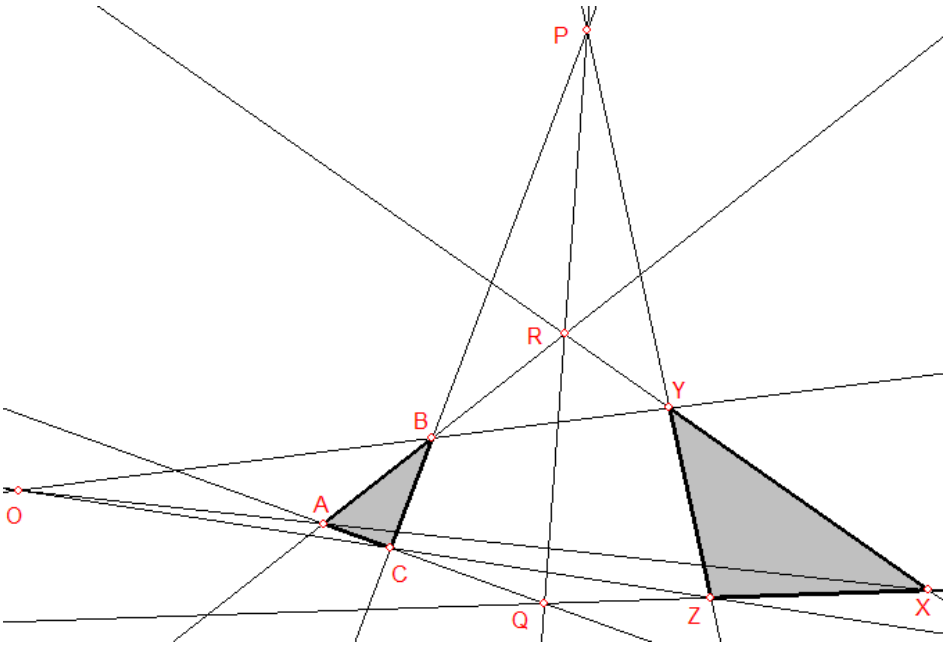


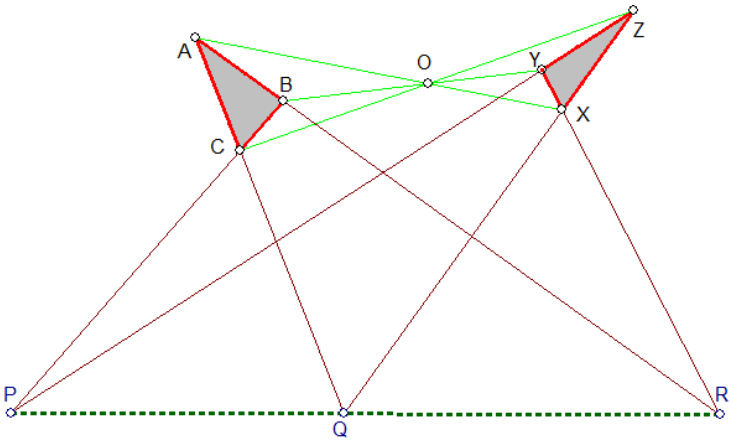
figura 20

Teorema de Desargues.

Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, y si sus pares de lados correspondientes se cortan, entonces los tres puntos de intersección están alineados.

El recíproco también es cierto, por lo que los dos conceptos son equivalentes.

Demostración del teorema de Desargues:



$figura\ 21$

Aplicando el teorema de Menelao en las tres ternas de puntos PZY, QXZ, RYX de los lados de los tres triángulos OBC, OCA, OAB, se obtiene:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{OY}}{\overline{BY}}\cdot\frac{\overline{CZ}}{\overline{OZ}}=1,\qquad \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}\cdot\frac{\overline{AX}}{\overline{OX}}\cdot\frac{\overline{OZ}}{\overline{CZ}}=1,\qquad \frac{\overline{AR}}{\overline{BR}}\cdot\frac{\overline{BY}}{\overline{OY}}\cdot\frac{\overline{OX}}{\overline{AX}}=1$$

multiplicamos miembro a miembro estas tres expresiones, se obtiene

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{OY}}{\overline{BY}}\cdot\frac{\overline{CZ}}{\overline{OZ}}\cdot\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}\cdot\frac{\overline{AX}}{\overline{OX}}\cdot\frac{\overline{OZ}}{\overline{CZ}}\cdot\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}}\cdot\frac{\overline{BY}}{\overline{OY}}\cdot\frac{\overline{OX}}{\overline{AX}}=1\cdot1\cdot1$$

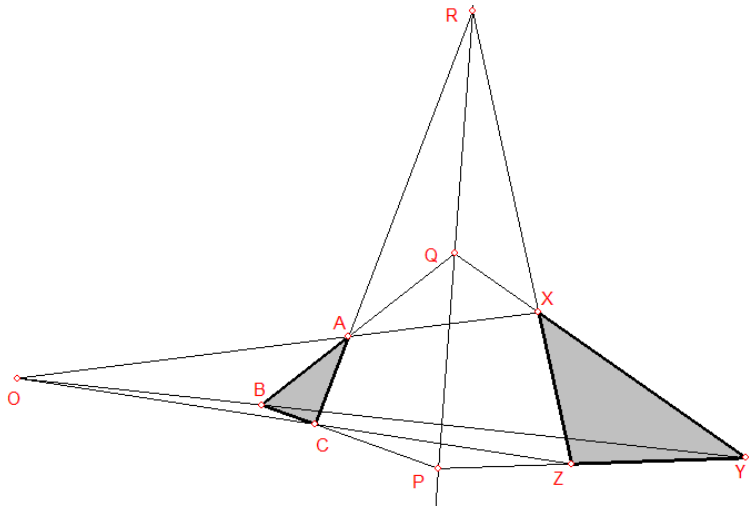
simplificando llegamos a

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}\cdot\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}}=1$$

con lo que P, Q, R están alineados, q.e.d.

El reciproco del teorema de Desargues:

Si dos triángulos están en perspectiva desde una recta, y si cada par de vértices correspondiente están unidos por rectas que se cortan, los triángulos están en perspectiva desde el punto de intersección de estas rectas.



$figura\ 22$

Demostración:

Al considerar el triángulo ABC y el triángulo XYZ, en perspectiva desde una recta, queremos indicar que hay tres puntos que están alineados

$$\{P\} = BC \cap YZ, \quad \{Q\} = BA \cap YX, \quad \{R\} = AC \cap ZX$$

como se muestra en la $Figura\ 22$. Definiendo $\{O\} = AX \cap CZ$, queremos demostrar que este punto O esta alineado con B y Y. Como los triángulos QAX y PCZ son perspectivos desde el punto R, podemos aplicar el teorema directo de Desargues, y concluir que los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes, a saber,

$$\{O\} = AX \cap CZ, \quad \{B\} = QA \cap PC, \quad \{Y\} = QX \cap PZ$$

están alineados, como deseábamos, q.e.d.

Conclusión: Si dos triángulos ABC y XYZ están en perspectiva desde un punto entonces también lo están respecto de una recta.

Triángulos perspectivos y ortológicos.

Analizando el triángulo ABC y su triángulo órtico XYZ, y teniendo en cuenta que las tres alturas AX, BY, CZ se cortan en el ortocentro H, los triángulos ABC y XYZ son perspectivos desde un punto y, por el *teorema de Desargues*, también serán perspectivos de una recta. En este caso el eje de perspectiva se llama eje órtico del triángulo ABC.

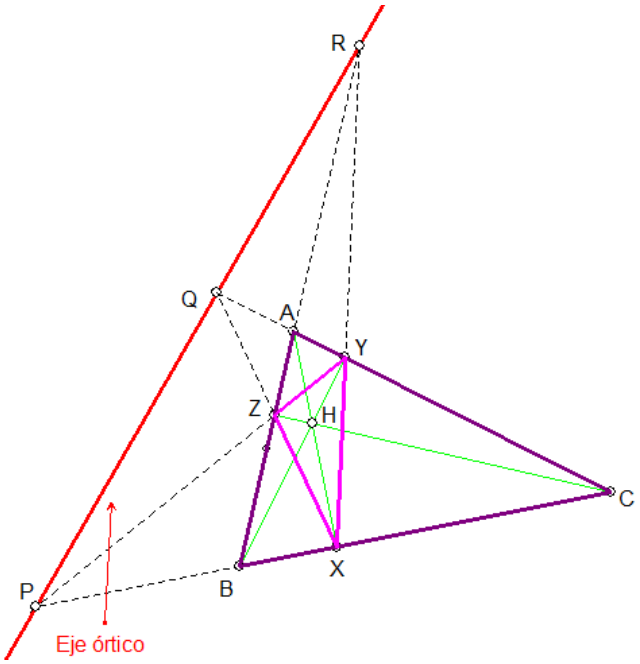


figura 23

Ahora vamos a ver un interesante teorema donde se relacionan la *recta de Euler* y el *eje órtico*

Teorema: El eje órtico de un triángulo es perpendicular a la recta de Euler de dicho triángulo.

Recordemos que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC pasa por los pies X; Y; Z de las alturas, y su centro N en el punto medio del ortocentro H y el circuncentro O del triángulo ABC.

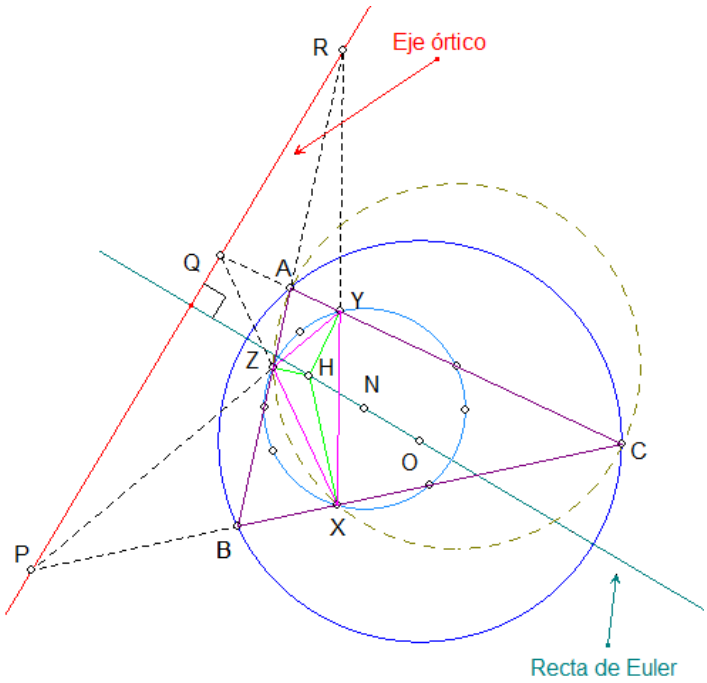


figura 24

Concepto previo: "*Eje radical de dos circunferencias*"

Definición: La Potencia de un Punto con respecto a una circunferencia, es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él.

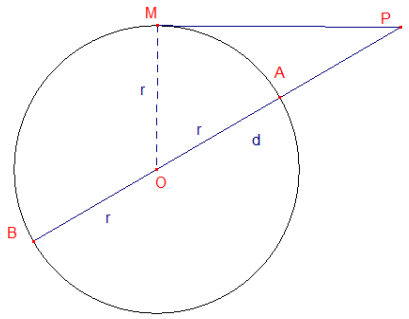
Se llama eje radical de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos cuyas potencias respecto de dos circunferencias no concéntricas es la misma, es una recta perpendicular a la recta que une los dos centros.

Demostración:

En términos de coordenadas cartesianas, el cuadrado de la distancia d entre dos puntos (x, y) y (a, b) es:

$$d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

Por tanto, la potencia de (x, y), con respecto a la circunferencia de centro (a, b) y radio r es:



$figura\ 25$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d + r)(d - r) = d^2 - r^2$$

$$d^2 - r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$$

En particular, la propia circunferencia como lugar geométrico de los puntos (x, y) de potencia cero, tiene la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \quad [1]$$

La misma ecuación, en forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, expresa la circunferencia como lugar geométrico de los puntos cuyas distancias desde (a, b) tiene el valor constante r.

Cuando esta circunferencia se expresa en la forma

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad [2]$$

(Donde $c = a^2 + b^2 - r^2$), la potencia de un punto arbitrario (x, y) se expresa de nuevo como el miembro izquierdo de la ecuación, es decir, $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$.

Otras circunferencias que tengan el mismo centro (a, b) pero radio diferentes, tienen una ecuación de la misma forma con un c distinto, y cualquier circunferencia con centro diferente tiene una ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0 \quad [3]$$

Donde, $a \neq a' \vee b \neq b'$.

Por lo tanto, somos libres de utilizar las ecuaciones [2] y [3] para las dos circunferencias no concéntricas mencionadas en el teorema.

El lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyas potencias con respecto a estas dos circunferencias es igual a:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c'$$

Como $x^2 + y^2$ se cancelan, este lugar geométrico es la recta

$$-2ax - 2by + c = -2a'x - 2b'y + c'$$

Operando, nos queda:

$$(a' - a)x + (b' - b)y = \frac{1}{2}(c' - c)$$

Escogiendo nuestro sistema de referencia de forma que el eje x una los dos centros, podemos expresar las dos circunferencias en la forma más simple

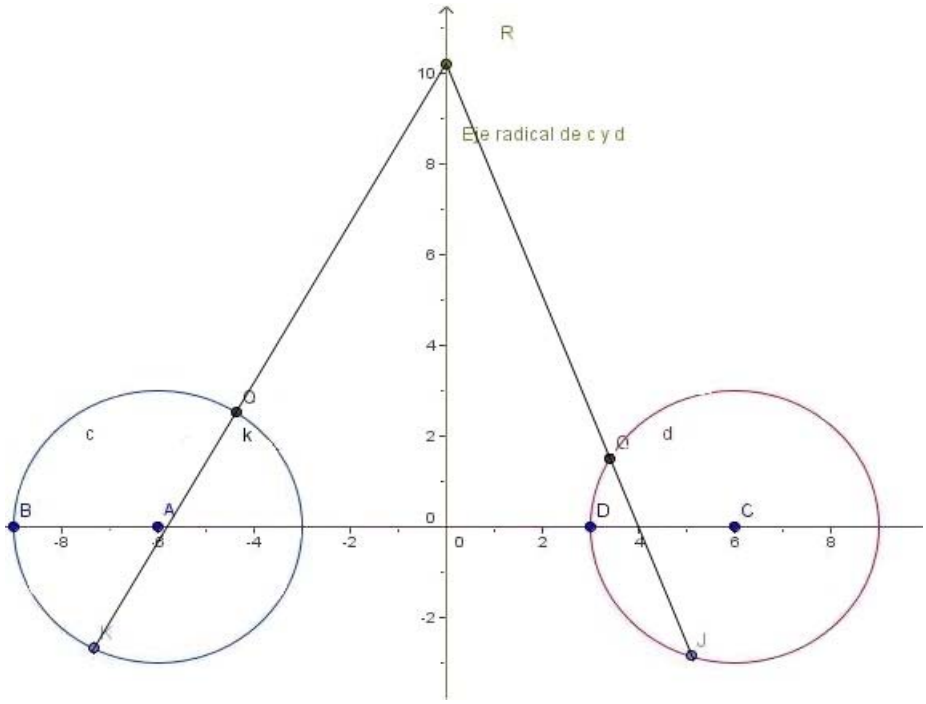


figura 26

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2a'x + c' = 0 \quad [4]$$

Donde $a \neq a'$. Entonces el lugar geométrico se convierte en

$$x = \frac{c' - c}{2(a' - a)}$$

Esta recta, que es paralela al *eje y* y es perpendicular al *eje x* (que es la recta que une a los dos centros). Como la recta puede definirse geométricamente en términos de las circunferencias (como conteniendo todos los puntos de igual potencia), podemos tomarla como el mismo eje y en la figura. Así dos circunferencias cualesquiera pueden expresarse en forma mucha más sencilla.

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0 \quad [5]$$

Entonces el lugar geométrico de los puntos es la recta $x = 0$. Inversamente, cualquier punto $(0, y)$ de la recta $x = 0$ tiene la misma potencia $y^2 + c$ respecto de ambas circunferencias, q.e.d.

Demostración del **teorema**:

Volviendo a la *Figura* 23,

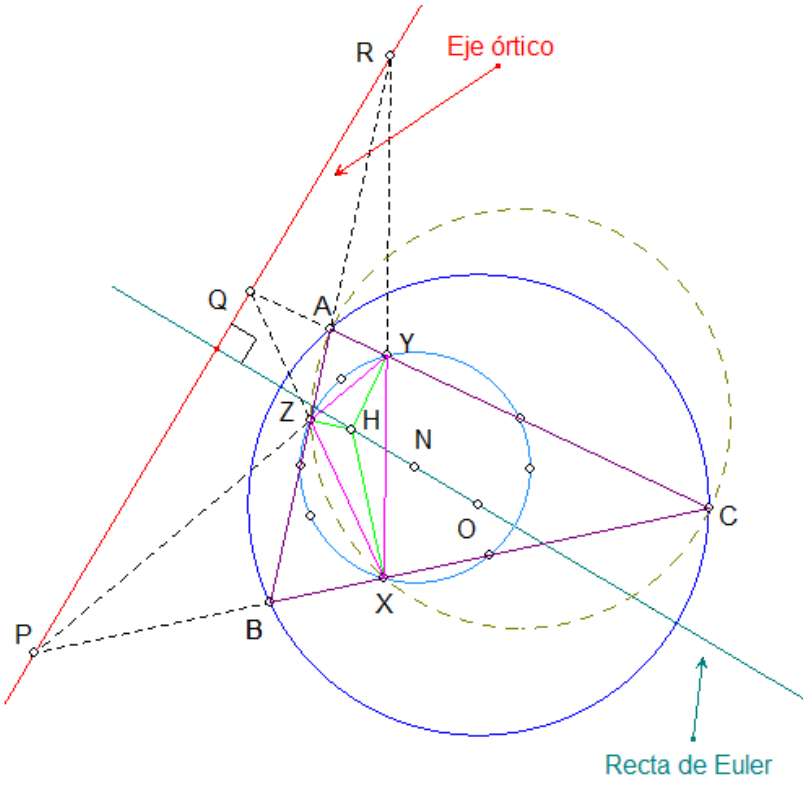


figura 27

Si calculamos la potencia de Q respecto a la circunferencia de diámetro $\overline{AC}$ y pasa por Z y X, ya que AZC y AXC son triangulo rectángulo cuya hipotenusa es $\overline{AC}$, nos da que $QX \cdot QZ = QA \cdot QC$, pero A y C están también en la circunferencia circunscrita a ABC, con centro O, y X y Z están en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC, por lo que $QA \cdot QC \; y \; QX \cdot QZ$ son las potencias del punto Q respecto de estas dos circunferencias. Como son iguales, resulta que Q es un punto que tiene la misma potencia respecto de las dos circunferencias, por lo que Q debe estar en el eje radical de las dos circunferencias.

Lo mismo le ocurrirá a los otros puntos P y R, así que deducimos aquí, no solo que los puntos P, Q, R están alineados, sino que el eje órtico, la recta que los contiene, por ser el eje radical de dos circunferencias, es perpendicular a la recta que une los centros, es decir a la recta de Euler del triángulo ABC, q.e.d.

Bibliografía.

- Mitrea, D. y Mitrea, R. "A generalization of A theorem of Euler". The American Mathematical Monthly, 101 vol. 1 (Enero 1994), 55-58.
- H.S.M. Coxeter. Fundamentos de Geometría. Editorial Limusa-Wiley. México. 1971.
- H.S.M. Coxeter; S.L. Greitzer. Retorno a la Geometría. DLS-EULER, Editores. Colección: "La Tortuga de Aquiles". Madrid, España. Enero 1994
- Martin Isaacs. Geometría universitaria. Thomson Learning. México. 2002.
- P. Puig Adam. Curso de Geometría Métrica, tomo I: fundamentos. Editor: Biblioteca Matemática, S. L. Madrid, España.
- F.J. García Capitán, Lectura atenta del Court (2): el triángulo órtico. http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero37/ortico.pdf (pagina WEB de la olimpiada iberoamericana de matemática)
- F.J. García Capitán, El triángulo ortológicos. http://garciacapitan.auna.com ((pagina WEB personal de F. J. García Capitán)