Universidad Nacional de La Matanza
LIC. EN MATEMÁTICA APLICADA

TESIS

Algunas Aplicaciones del Teorema de Ptolomeo y su Generalización

PROFESOR: LIC. MIGUEL CALZÓN

AUTORA: JÉSICA VENIALBO

AÑO 2009.

"…Parece no haber ninguna parte de la ciencia tan lejos del agotamiento como la Geometría Elemental. Existen vínculos y conexiones entre las distintas fórmulas conocidas que vale la pena investigar, no sólo por su propio bien sino también por su valor histórico…"

(J.L. Coolidge)

ÍNDICE GENERAL

...

1. Introducción…… 1

2. Teorema de Ptolomeo y su generalización por Casey

   2.1 Teorema de Ptolomeo…….. 1
   2.2 Recíproco del teorema de Ptolomeo…… 3
   2.3 Generalización de Casey……. 5
   2.4 Recíproco de la Generalización para un caso particular……. 8

3. Aplicaciones

   3.1 Fórmula de Brahmagupta…… 10
   3.2 Teorema de Feuerbach…….. 16
   3.3 Un problema de Víctor Thébault……. 20

4. Bibliografía…… 22

1. Introducción

En el presente trabajo desarrollaremos un teorema clásico sobre la geometría métrica de cuadriláteros descubierto por Ptolomeo en el sigloI, para tratar luego la generalización del mismo realizada en 1881 por el matemático Irlandés John Casey. Posteriormente utilizaremos estos teoremas para probar de una manera original dos resultados clásicos de la geometría métrica: la fórmula del área de un cuadrilátero inscripto en una circunferencia hallada en el siglo VII por el matemático hindú Brahmagupta, y el teorema de Feuerbach que en su demostración clásica requiere de la geometría inversiva.

Finalmente aplicaremos el teorema de Casey para resolver un problema propuesto por el famoso problemista francés Víctor Thébault en 1938 en el American Mathematical Monthly. Este problema no fue resuelto en el *Monthly* hasta 1983, pero la solución completa no fue publicada porque la única recibida, del aficionado inglés a la Geometría K.B. Taylor, ocupa 24 páginas de cálculos. Más tarde, en 1986, Gerhard Turwald publicó una solución sensiblemente más corta en la revista suiza *Elemente der Mathematik*. En 1989, el holandés G.R.Veldkamp envió a *Crux Mathematicorum* una solución suya del problema, publicada en 1973 en una revista holandesa de no muy extendida circulación, el *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, y que debió pasar inadvertida a los redactores del *Monthly*. Para completar la historia, a finales de 1989 *Elemente der Mathematik* publicó otra solución del problema, sin usar trigonometría, probando resultados más generales que incluyen el problema de Thébault como caso particular.

2. El Teorema de Ptolomeo y su Generalización

2.1 Teorema de Ptolomeo

Antes de enunciar este Teorema necesitamos definir a los cuadriláteros cíclicos.

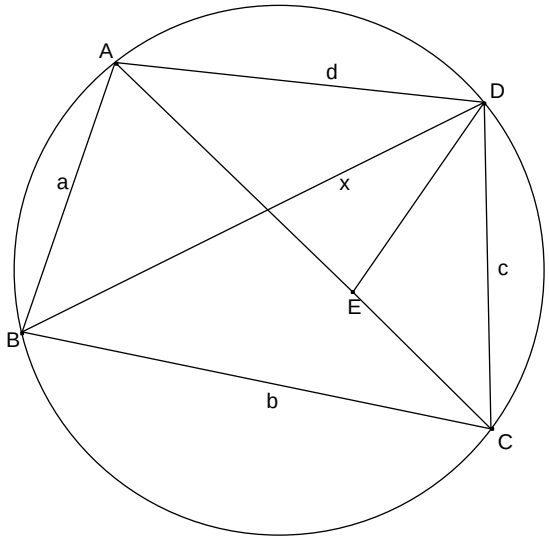
Decimos que un cuadrilátero es cíclico cuando todos sus vértices pertenecen a una misma circunferencia.

Enunciamos el Teorema:

"Si un cuadrilátero es cíclico, el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos".

Demostración

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, de lados $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, siendo $x = BD$ e $y = AC$ sus diagonales. Tomamos un punto E perteneciente al segmento AC, tal que $C\hat{D}E = A\hat{D}B$, nos queda que $y = AE + EC$.



En los triángulos BDA y DEC, tenemos que $A\hat{D}B = E\hat{D}C$ (por construcción). Además $A\hat{B}D = E\hat{C}D$ ya que abarcan el mismo arco de circunferencia AD. Por lo tanto resulta que BDA y DEC son triángulos semejantes y tenemos

$$\frac{a}{EC} = \frac{d}{DE} = \frac{x}{c} \implies \frac{a}{EC} = \frac{x}{c} \implies ac = x\,EC \quad [2.1.1]$$

También $$\frac{d}{DE} = \frac{x}{c} \Rightarrow \frac{c}{DE} = \frac{x}{d} \quad [2.1.2]$$

Por construcción tenemos que $C\hat{D}E = A\hat{D}B$, sumando ambos miembros $B\hat{D}E$, obtenemos:

$$A\hat{D}B + B\hat{D}E = C\hat{D}E + B\hat{D}E \implies A\hat{D}E = B\hat{D}C \quad [2.1.3]$$

Además de[2.1.2] tenemos que $\frac{c}{DE} = \frac{x}{d}$ [2.1.4]

Por [2.1.3] y [2.1.4] tenemos que los triángulos ADE y BCD son semejantes, luego sus lados homólogos son proporcionales, obteniendo:

$$\frac{b}{AE} = \frac{c}{DE} = \frac{x}{d} \implies \frac{b}{AE} = \frac{x}{d} \implies bd = xAE \qquad [2.1.5]$$

Sumando miembro a miembro las igualdades de la expresión [2.1.1] y [2.1.5], tenemos que:

$$ac + bd = xEC + xAE = x(EC + AE)$$

Como $y = AE + EC$ sustituimos en la expresión anterior, obtenemos

$$ac + bd = xy$$

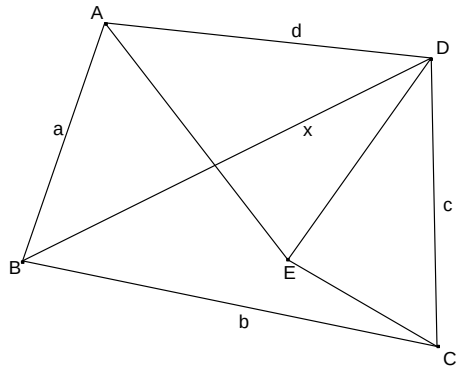
Que es lo que queríamos demostrar.

2.2 Teorema recíproco de Ptolomeo

Ahora demostraremos el recíproco del teorema de Ptolomeo, es decir, si en un cuadrilátero de lados $a, b, c\ y\ d$ con diagonales $x\ e\ y$ se cumple $ac + bd = xy$ entonces el cuadrilátero es cíclico.

Demostración

Para demostrarlo, construimos en el cuadrilátero $ABCD$ el ángulo $C\widehat{D}E = A\widehat{D}B$ determinándose DE de manera tal que $\frac{x}{c} = \frac{d}{DE}$, como muestra la figura. Cabe aclarar que el punto E no necesariamente pertenece al segmento AC.



Tenemos que los triángulos BAD y DEC tienen en ángulo igual y dos lados proporcionales por lo tanto estos triángulos son semejantes, entonces sus lados homólogos también lo son, es decir:

$$\frac{x}{c} = \frac{d}{DE} = \frac{a}{CE} \implies \frac{x}{c} = \frac{d}{DE} \implies ac = x\,CE \qquad [2.2.1]$$

Y además se obtiene que todos sus ángulos son iguales, en particular que

$$\hat{A} = D\hat{E}C \quad [2.2.2]$$

Por construcción tenemos que $C\hat{D}E = A\hat{D}B$, sumando ambos miembros $B\hat{D}E$, obtenemos

$$A\hat{D}B + B\hat{D}E = C\hat{D}E + B\hat{D}E \implies A\hat{D}E = B\hat{D}C \quad [2.2.3]$$

En los triángulo ADE y BDC, tenemos que $\frac{x}{c} = \frac{d}{DE}$ por [2.2.1], es decir dos lados proporcionales, además por [2.2.3] tenemos que el ángulo comprendido entre los lados proporcionales es igual. En consecuencia ADE y BDC resultan ser semejantes, por lo tanto, se cumple

$$\frac{d}{x} = \frac{DE}{c} = \frac{AE}{b} \implies \frac{d}{x} = \frac{AE}{b} \implies bd = x\,AE \quad [2.2.4]$$

También sus lados resultan ser iguales en particular $\hat{C} = D\hat{E}A$ [2.2.5]

Sumamos miembro a miembro [2.2.1] y [2.2.4]

$$ac + bd = x\,CE + x\,AE = x(CE + AE) \implies \frac{ac + bd}{x} = CE + AE \quad [2.2.6]$$

Por hipótesis tenemos que $\frac{ac+bd}{x} = y$,, sustituyendo en [2.2.6], obtenemos que:

$$EC + AE = y$$

Es decir, que A, E y C están alineados, entonces $D\hat{E}A + D\hat{E}C = 180°$

Luego por [2.2.2] y [2.2.5]

$$\hat{A} + \hat{C} = 180°$$

Como $\hat{A}$ y $\hat{C}$ son ángulos opuestos de un cuadrilátero y además son suplementarios, tenemos que el cuadrilátero $ABCD$ resulta ser cíclico como queríamos demostrar.

2.3 Teorema de Casey

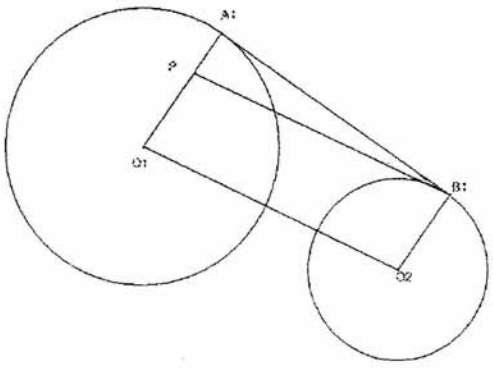
Este teorema es una generalización del teorema de Ptolomeo, donde los segmentos que cumplen con la propiedad $t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14}$ son las tangentes a cuatro circunferencias tangentes interiores a una misma circunferencia, previamente a enunciar y demostrar el teorema demostraremos una propiedad.

Propiedad: Si dos circunferencias $c_1(O_1, r_1)$ y $c_2(O_2, r_2)$ no son tangentes entre sí pero son tangentes interiores a una circunferencia $c(O, r)$ en los puntos A y B respectivamente y t es la longitud del segmento tangente entonces:

$$t = \frac{AB}{r}\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}$$

Demostración

Supongamos que $r_1 > r_2$, determinamos $c_1 \cap t = \{A_1\}$ y $c_2 \cap t = \{B_1\}$ y tomamos el punto $P \in O_1A_1$ tal que $A_1P = r_2$



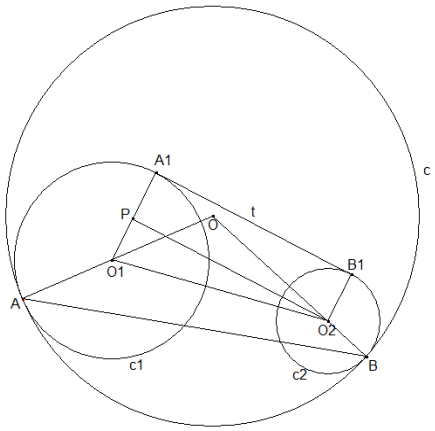
Si aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo PA_1B_1, obtenemos:

$$O_1O_2^2 = t^2 + (r_1 - r_2)^2 \quad [2.3.1]$$

Ahora, en el triángulo OO_1O_2 aplicamos el teorema del coseno, llamando $\varphi = O_1\hat{O}O_2$

$$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \cos\varphi$$

$$O_1O_2^2 = (r - r_1)^2 + (r - r_2)^2 - 2(r - r_1)(r - r_2)\cos\varphi \quad [2.3.2]$$



Por otra parte, mediante la aplicación del teorema del coseno en el triángulo OAB, obtenemos:

$$AB^2 = r^2 + r^2 - 2rr\cos\varphi = 2r^2(1-\cos\varphi)$$

$$\Longrightarrow \cos\varphi = 1 - \frac{AB^2}{2r^2} \qquad [2.3.3]$$

Luego, sustituyendo [2.3.3] en [2.3.2], obtenemos:

$$O_1O_2{}^2 = (r-r_1)^2 + (r-r_2)^2 - 2(r-r_1)(r-r_2)\left(1-\frac{AB^2}{2r^2}\right)$$

Utilizando la expresión [2.3.1]

$$t^2 + (r_1-r_2)^2 = (r-r_1)^2 + (r-r_2)^2 - 2(r-r_1)(r-r_2)\left(1-\frac{AB^2}{2r^2}\right)$$

$$t^2 = (r-r_1)^2 + (r-r_2)^2 - (r_1-r_2)^2 - 2(r-r_1)(r-r_2)\left(1-\frac{AB^2}{2r^2}\right)$$

$$t^2 = r^2 - 2rr_1 + r_1^2 + r^2 - 2rr_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2$$
$$- 2(r-r_1)(r-r_2)\left(1-\frac{AB^2}{2r^2}\right)$$

$$t^2 = r^2 - 2rr_1 + r^2 - 2rr_2 + 2r_1r_2 - 2(r-r_1)(r-r_2)\left(1-\frac{AB^2}{2r^2}\right)$$

$$t^2 = 2(r^2 - rr_1 - rr_2 + r_1r_2) - 2(r-r_1)(r-r_2)\left(1-\frac{AB^2}{2r^2}\right)$$

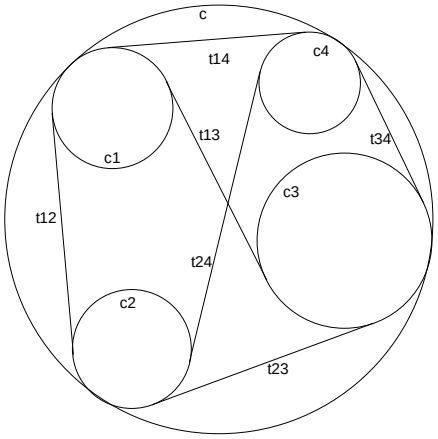
$$t^2 = 2(r-r_1)(r-r_2) - 2(r-r_1)(r-r_2)\left(1-\frac{AB^2}{2r^2}\right)$$

$$t^2 = 2(r-r_1)(r-r_2)\left[1-\left(1-\frac{AB^2}{2r^2}\right)\right] = 2(r-r_1)(r-r_2)\frac{AB^2}{2r^2}$$

$$\Longrightarrow t = \frac{AB}{r}\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)}$$

Ahora enunciamos el *Teorema de Casey*:

"Sean las circunferencias $c_1(O_1, r_1)$, $c_2(O_2, r_2)$, $c_3(O_3, r_3)$ y $c_4(O_4, r_4)$ interiores a la circunferencia $c(O, r)$; y sean los segmentos tangentes t_{ij} a las circunferencias $c_i(O_i, r_i)$ y $c_j(O_j, r_j)$, se tiene que : $t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14}$"



Para demostrar este teorema utilizamos la propiedad anterior y calculamos $t_{13}t_{24}$

Tenemos que $t_{13} = \frac{AC}{r}\sqrt{(r-r_1)(r-r_3)}$ siendo A el punto de tangencia de la circunferencia $c_1(O_1, r_1)$ con la circunferencia $c(O, r)$ y C el punto de tangencia de la circunferencia $c_3(O_3, r_3)$ con la circunferencia $c(O, r)$.

Tenemos que $t_{24} = \frac{BD}{r}\sqrt{(r-r_2)(r-r_4)}$ siendo B el punto de tangencia de la circunferencia $c_2(O_2, r_2)$ con la circunferencia $c(O, r)$ y D el punto de tangencia de la circunferencia $c_4(O_4, r_4)$ con la circunferencia $c(O, r)$.

Luego

$$t_{13}t_{24} = \frac{AC.BD}{r^2}\sqrt{(r-r_1)(r-r_3)(r-r_2)(r-r_4)}$$

Análogamente desarrollamos $t_{12}\, t_{34} + t_{23}\, t_{14}$

$$t_{12}\, t_{34} = \frac{AB.DC}{r^2}\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)}$$

$$t_{23}\, t_{14} = \frac{BC.AD}{r^{\,2}}\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)} \qquad [2.3.4]$$

Sumando miembro a miembro

$$t_{12}\, t_{34} + t_{23}\, t_{14} = \left(\frac{AB.DC}{r^{\,2}} + \frac{BC.AD}{r^{\,2}}\right)\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)}$$

$$\Longrightarrow t_{12}\, t_{34} + t_{23}\, t_{14} = \left(\frac{AB.DC+BC.AD}{r^{\,2}}\right)\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)} \quad [2.3.5]$$

Además, como los puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia forman un cuadrilátero $ABCD$ cíclico y por [1.1] sabemos que:

$$AC.BD = AB.DC + BC.AD$$

Sustituyendo en la expresión[2.3.5] y por [2.3.4], tenemos que:

$$\Longrightarrow t_{12}\, t_{34} + t_{23}\, t_{14} = \left(\frac{AC.BD}{r^{\,2}}\right)\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)} = t_{23}\, t_{14}$$

$$\Longrightarrow \qquad t_{13}t_{24} = t_{12}\, t_{34} + t_{23}\, t_{14}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

2.4 Recíproco del Teorema de Casey

Demostraremos el teorema recíproco de Casey para un caso particular, donde tres de las cuatro circunferencias tienen radio cero. Es decir, **"**si tres puntos A, B y C con una circunferencia $c(O_1, r_1)$ cumplen la condición $t_{AC}t_{Bc} = t_{AB}\, t_{Cc} + t_{BC}\, t_{Ac}$ entonces existe circunferencia tangente a $c(O_1, r_1)$ que pasa por los tres puntos".

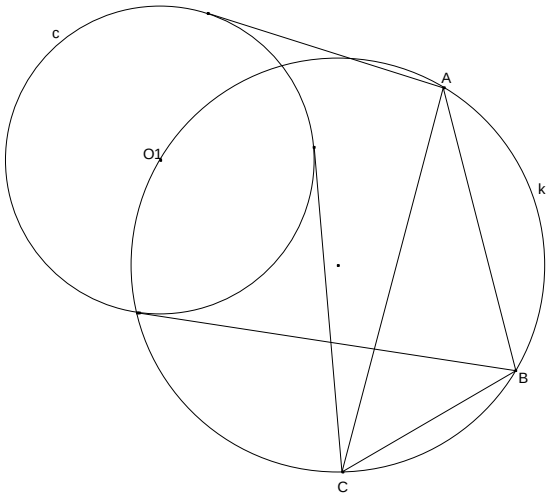
Demostración

Dados tres puntos A, B y C, existe una única circunferencia, que llamamos $k(O, r)$, que pasa por dichos puntos.

La circunferencia $c(O_1, r_1)$ tiene distintas posiciones relativas con respecto a $k(O, r)$, puede ser interior, exterior, tangente o secante.

Si el centro de la circunferencia $c(O_1, r_1)$ es interior o exterior a $k(O, r)$, tenemos que para $r_1 = 0$, el centro O_1es un vértice del cuadrilátero $O_1 A\ B\ C$ pero al ser interior o exterior a $k(O, r)$ el cuadrilátero $O_1 A\ B\ C$ no es cíclico. Absurdo ya que por el teorema recíproco de Ptolomeo [2.2], si se cumplen las condiciones de hipótesis $O_1 A\ B\ C$ es cíclico. Por lo tanto $c(O_1, r_1)$ no es interior, exterior ni es secante si su centro no pertenece a $k(O, r)$.[2.4.1]

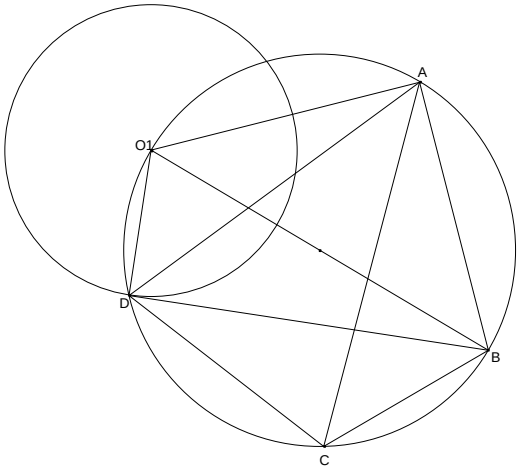
La otra posibilidad es que $O_1 \in k(O, r)$ como indica la figura:



Supongamos que tres puntos A, B y C con una circunferencia $c(O_1, r_1)$ cuyo centro pertenece a circunferencia que pasa por los puntos A, B y C cumple la condición $t_{AC} t_{Bc} = t_{AB}\ t_{Cc} + t_{BC}\ t_{Ac}$

Por hipótesis tenemos que los segmentos $t_{AC}, t_{Bc}, t_{AB,}\ t_{Cc}, t_{BC}\ y\ t_{Ac}$ forman un cuadrilátero cíclico que llamaremos $ABCD$ inscripto en $k(O, r)$ que es la circunferencia que pasa por A, B y C, como indica la figura. Tenemos que el punto A es exterior a la circunferencia $c(O_1, r_1)$ entonces $t_{Ac} < O_1 A$ [2.4.2]

Tenemos que el punto D pertenece a $c(O_1, r_1) \cap k(O, r)$ entonces $t_{Bc} = BD$, como BD es un segmento tangente a $c(O_1, r_1)$, resulta que $BD \perp O_1 D$, en consecuencia BDO_1 es un triángulo rectángulo en D, por lo tanto BO_1es diámetro de la circunferencia $c(O_1, r_1)$.



Como $A\hat{B}C = A\hat{B}O_1 + D\hat{B}O_1 \Longrightarrow A\hat{B}C > A\hat{B}O_1 \Longrightarrow t_{Ac} = AD > O_1A.$

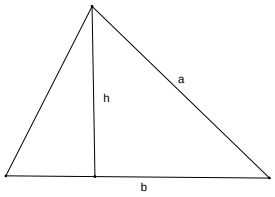
Resultando absurdo por la proposición [2.4.3]. Es decir que O_1no pertenece a $k(O,r)$. [2.4.4]

De las expresiones [2.4.1] y [2.4.4] se tiene que la circunferencia $c(O_1,r_1)$ no puede ser interior o exterior ni secante $k(O,r)$, luego $c(O_1,r_1)$ es tangente a $k(O,r)$.

3. <u>Aplicaciones</u>

3.1 Fórmula de Brahmagupta

Empecemos calculando el área de un triángulo de la figura con la siguiente fórmula: $[A] = \frac{bh}{2}$ [3.1.1]



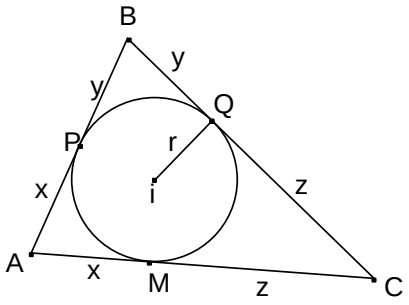
Siendo h la altura de triángulo con respecto al lado b, considero el triángulo de lados h, a, b y calculo el seno del ángulo que forman los lados $a\ y\ b$.

$$sen\widehat{ab} = \frac{h}{a} \Longrightarrow a\ sen\widehat{ab} = h$$

Sustituyendo en [3.1.1], obtenemos que $[A] = \frac{1}{2}absen\widehat{ab}$ [3.1.2]

Otra manera del calcular el área de un triángulo:

Dado triángulo ABC, i el incentro, r el radio de la circunferencia inscripta y P, Q, M los puntos de tangencias de la circunferencia inscripta sobre los lados AB, BC, AC respectivamente.

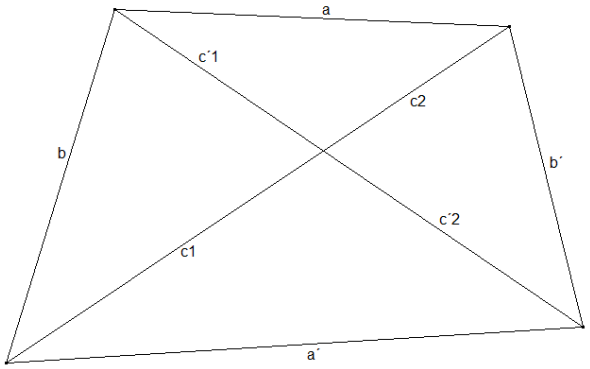


Tenemos que: $[APi] = [AMi] = \frac{xr}{2}$, $[BPi] = [BQi] = \frac{yr}{2}$, $[CQi] = [CMi] = \frac{zr}{2}$

$$[ABC] = [APi] + [AMi] + [BPi] + [BQi] + [CQi] + [CMi]$$

$$[A] = [ABC] = \frac{2xr}{2} + \frac{2yr}{2} + \frac{2zr}{2} = xr + yr + zr = r(x + y + z) = r.s \quad [3.1.3]$$

Ahora calculemos el área de un cuadrilátero convexo, como se indica en la figura, de lados $a, a´, b$ y $b´$, de diagonales c y $c´$ que forman un ángulo θ. Cada diagonal divide a la otra en dos segmentos: $c = c_1 + c_2$ y $c´ = c_1´ + c_2´$ (como el cuadrilátero es convexo las diagonales se cortan en un punto interior del mismo)



Utilizando [3.1.2] determinamos el área de los cuatro triángulos determinados por las diagonales del cuadrilátero de la siguiente manera:

$$[A_1] = \frac{1}{2} c_2 c_1' sen\theta$$

$$[A_1´] = \frac{1}{2} c_1 c_2´ sen\theta$$

$$[A_2] = \frac{1}{2} c_1 c_1´ sen(\pi - \theta) = \frac{1}{2} c_1 c_1´ sen\theta$$

$$[A_2´] = \frac{1}{2} c_2´ c_2 sen(\pi - \theta) = \frac{1}{2} c_2´ c_2 sen\theta$$

Luego calculamos el área del cuadrilátero sumando el área de los cuatro triángulos

$$[A] = [A_1] + [A_1´] + [A_2] + [A_2´]$$

$$[A] = \frac{1}{2} c_2 c_1' sen\theta + \frac{1}{2} c_1 c_2´ sen\theta + \frac{1}{2} c_1 c_1´ sen\theta + \frac{1}{2} c_2´ c_2 sen\theta$$

$$[A] = \frac{1}{2} sen\theta (c_2 c_1´ + c_1 c_2´ + c_1 c_1´ + c_2 c_2´) = \frac{1}{2} sen\theta [c_1 (c´_1 + c´_2) + c_2 (c´_1 + c´_2)]$$

$$[A] = \frac{1}{2} sen\theta (c_1 + c_2)(c_1´ + c_2´) = \frac{1}{2} cc´ sen\theta$$

Luego:

$$2[A] = cc´ sen\theta \implies 4[A]^2 = c^2 c´^2 sen^2\theta$$

$$4[A]^2 = c^2 c´^2 (1 - cos^2\theta) \implies [A]^2 = \frac{c^2 c´^2}{4} (1 - cos^2\theta) \text{ [3.1.4]}$$

Aplicamos el teorema de coseno en cada uno de los triángulos

$$a^2 = c_1^2 + c´_1^2 - 2 c_1 c´_1 cos\theta \implies \frac{c_1 c´_1}{2} = \frac{c_1^2 + c´_1^2 - a^2}{4cos\theta}$$

$$a´^2 = c_2^2 + c´_2^2 - 2 c_2 c´_2 cos\theta \implies \frac{c_2 c´_2}{2} = \frac{c_2^2 + c´_2^2 - a´^2}{4cos\theta}$$

$$b^2 = c_2^2 + c´_1^2 - 2 c_2 c´_1 \cos(\pi - \theta) \implies \frac{c_2 c´_1}{2} = \frac{c_2^2 + c´_1^2 - b^2}{4cos(\pi - \theta)} = -\frac{c_2^2 + c´_1^2 - b^2}{4cos\theta}$$

$$b´^2 = c_1^2 + c´_2^2 - 2 c_1 c´_2 \cos(\pi - \theta) \implies \frac{c_1 c´_2}{2} = \frac{c_1^2 + c´_2^2 - b´^2}{4cos(\pi - \theta)} = -\frac{c_1^2 + c´_2^2 - b´^2}{4cos\theta}$$

Y sumamos las expresiones anteriores

$$\frac{c_1 c´_1 + c_2 c´_2 + c_2 c´_1 + c_1 c´_2}{2} = \frac{c_1^2 + c´_1^2 - a^2 + c_2^2 + c´_2^2 - a´^2 - c_2^2 - c´_1^2 + b^2 - c_1^2 - c´_2^2 + b´^2}{4cos\theta}$$

$$\frac{c_1 (c´_1 + c´_2) + c_2 (c´_1 + c´_2)}{2} = \frac{-a^2 - a´^2 + b^2 + b´^2}{4cos\theta}$$

$$\frac{(c_1 + c_2)(c'_1 + c'_2)}{2} = \frac{b^2 + b'^2 - (a^2 + a'^2)}{4cos\theta}$$

$$\frac{cc'}{2} = \frac{b^2 + b'^2 - (a^2 + a'^2)}{4cos\theta}$$

$$cos\theta = \frac{b^2 + b'^2 - (a^2 + a'^2)}{2cc'} \qquad [3.1.5]$$

Sustituyendo [3.1.5] en [3.1.4], obtenemos:

$$[A]^2 = \frac{c^2c'^2}{4}\left[1 - \frac{(b^2 + b'^2 - (a^2 + a'^2))^2}{4c^2c'^2}\right]$$

$$[A]^2 = \frac{c^2c'^2}{4} - \frac{[b^2 + b'^2 - (a^2 + a'^2)]^2}{16} =$$

$$= \frac{c^2c'^2}{4} - \frac{a^4 + a'^4 + b^4 + b'^4 - 2(a^2b^2 + a'^2b^2 + a^2b'^2 + a'^2b'^2) + 2(a^2a'^2 + b^2b'^2)}{16}$$

Como

$$a^2b^2 + a'^2b^2 + a^2b'^2 + a'^2b'^2 = a^2(b^2 + b'^2) + a'^2(b^2 + b'^2)$$

$$a^2b^2 + a'^2b^2 + a^2b'^2 + a'^2b'^2 = (a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2)$$

Sustituyo

$$[A]^2 = \frac{c^2c'^2}{4} + \frac{-(a^4 + a'^4 + b^4 + b'^4) + 2(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) - 2(a^2a'^2 + b^2b'^2)}{16}$$

$$[A]^2 = \frac{-(a^4 + a'^4 + b^4 + b'^4) + 2(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) + 2(a^2a'^2 + b^2b'^2)}{16} -$$

$$-\left(\frac{a^2a'^2 + b^2b'^2}{4}\right) + \frac{c^2c'^2}{4}$$

$$[A]^2 = \frac{-(a^4 + a'^4 + b^4 + b'^4) + 2(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) + 2(a^2a'^2 + b^2b'^2) + 8aa'bb'}{16}$$

$$- \frac{1}{4}(a^2a'^2 + b^2b'^2 - c^2c'^2 + 2aa'bb') \qquad [3.1.6]$$

Trabajaremos con el primer término de la expresión anterior:

$$\frac{-(a^4+a'^4+b^4+b'^4)+2(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)+2(a^2a'^2+b^2b'^2)+8aa'bb'}{16}$$

$$\frac{1}{16}(-a^4-a'^4-b^4-b'^4+2a^2b^2+2a'^2b^2+2a^2b'^2+2a'^2b'^2+2a^2a'^2+2b^2b'^2 + 8aa'bb')$$

Agrupando los trinomios cuadrados perfectos

$$\frac{1}{16}(-a^4+2a^2a'^2-a'^4-b^4+2b^2b'^2-b'^4+2a^2b^2+2a'^2b^2+2a^2b'^2+2a'^2b'^2 + 8aa'bb')$$

$$\frac{1}{16}[-(a^2-a'^2)^2-(b^2-b'^2)^2+2a^2b^2+2a'^2b^2+2a^2b'^2+2a'^2b'^2+8aa'bb']$$

Sumando y restando dentro del paréntesis $2aa'b^2, 2aa'b'^2, 2bb'a^2$ y $2bb'a'^2$

$$\frac{1}{16}[-(a^2-a'^2)^2-(b^2-b'^2)^2+$$

$$+(a^2b^2+a'^2b^2+a^2b'^2+a'^2b'^2+4aa'bb'-2aa'b^2-2aa'b'^2-2bb'a^2-2bb'a'^2)+$$

$$+(a^2b^2+a'^2b^2+a^2b'^2+a'^2b'^2+4aa'bb'+2aa'b^2+2aa'b'^2+2bb'a^2+2bb'a'^2\ ]$$

Formando cuadrados de dos cuatrinomios, obtenemos:

$$\frac{1}{16}[-(a^2-a'^2)^2-(b^2-b'^2)^2+(ab-ab'-a'b+a'b')^2+(ab+a'b+ab'+a'b')^2\ ]=$$

$$\frac{1}{16}\{-(a^2-a'^2)^2-(b^2-b'^2)^2+[(b-b')(a-a')]^2+[\,(a+b)(a'+b')]^2\}=$$

$$\frac{1}{16}\{-[(a+a')(a-a')]^2-[(b+b')(b-b')]^2+[\,(b-b')(a-a')]^2 + [\,(a+b)(a'+b')]^2\}=$$

$$\frac{1}{16}[-(a+a')^2(a-a')^2-(b+b')^2(b-b')^2+(b-b')^2(a-a')^2+(a+b)^2(a'+b')^2]=$$

$$\frac{1}{16}[(b+b')^2-(a-a')^2\ ][\,(a+a')^2-(b-b')^2]=$$

$$\frac{1}{16}[(b+b')-(a-a')\ ][\,(b+b')+(a-a')\ ][\,(a+a')-(b-b')\,][(a+a')+(b-b')\,]$$

$$\frac{b+b'-a+a'}{2}.\frac{b+b'+a-a'}{2}.\frac{a+a-b+b'}{2}.\frac{a+a'+b-b'}{2} \qquad [3.1.7]$$

Siendo s el semiperímetro, tenemos que $2s = a + a' + b + b' \implies s = \frac{a+a'+b+b'}{2}$

Restando miembro a miembro a tenemos que $s - a = \frac{b+b'-a+a'}{2}$

Restando miembro a miembro a' tenemos que $s - a' = \frac{b+b'+a-a'}{2}$

Restando miembro a miembro b tenemos que $s - b = \frac{b'-b+a+a'}{2}$

Restando miembro a miembro b' tenemos que $s - b' = \frac{b-b'+a+a'}{2}$

Sustituyendo en [3.1.7], obtenemos la siguiente expresión equivalente

$$(s-a)(s-a')(s-b)(s-b') \quad [3.1.8]$$

Utilizando el segundo miembro de la expresión [3.1.6]

$$-\frac{1}{4}(a^2a'^2 + b^2b'^2 - c^2c'^2 + 2aa'bb') = -\frac{1}{4}[(aa' + bb')^2 - c^2c'^2]$$

$$-\frac{1}{4}(aa' + bb' - cc')(aa' + bb' + cc') \quad [3.1.9]$$

Sustituyendo [3.1.8] y [3.1.9] en la expresión [3.1.6]

$$[A]^2 = (s-a)(s-a')(s-b)(s-b') - \frac{1}{4}(aa' + bb' - cc')(aa' + bb' + cc') \quad [3.1.10]$$

Por el teorema de Ptolomeo, tenemos que un cuadrilátero es cíclico si y solo si

$$aa' + bb' = cc'$$

Sustituyendo en [3.1.10] obtenemos la fórmula del área de un cuadrilátero cíclico, descubierta por el matemático hindú Brahmagupta.

$$[A]^2 = (s-a)(s-a')(s-b)(s-b') \quad [3.1.11]$$

Podemos considerar a un triángulo como un caso particular de un cuadrilátero convexo, en el cual uno de sus lados es igual a cero. Como un triángulo siempre es inscriptible en una circunferencia, es decir todos los triángulos son cíclicos, podemos utilizar la ecuación [3.1.11]. Si hacemos, por ejemplo $a = 0$, obtenemos la fórmula de Herón para el área de un triángulo.

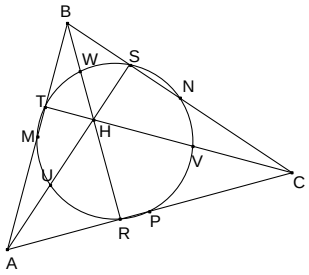
$$[A]^2 = s(s-a')(s-b)(s-b')$$

3.2 Teorema de Feuerbach

Antes de conocer el teorema de Feuerbach, debemos definir la circunferencia de Feuerbach o circunferencia de los nueve puntos.

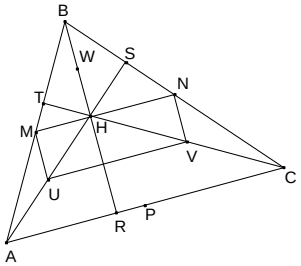
Circunferencia de los nueve puntos.

Es la circunferencia pasa por los pies de las alturas de un triángulo, por los puntos medios de los lados y por los puntos medios de las distancias entre el ortocentro y los vértices.



Debemos probar que existe una circunferencia que pasa por esos nueve puntos.
Consideramos en el triángulo ABC, se tiene que H es el ortocentro, U el punto medio de AH, V el punto medio de HC, W el punto medio de HC. Y sean: P el punto medio del lado AB, N el punto medio del lado BC, M el punto medio del lado CA, R el pie de altura del lado AB, S el pie de altura del lado BC y T el pie de altura del lado CA.

Los triángulos AHC y ABC tienen como base AC. Los puntos U y V son puntos medios de los lados AH y CH por lo tanto UV es base media del AHC, además M y N son puntos medios de los lados AB y BC, por lo tanto MN es base media del ABC. Tenemos que: $AC//UV//MN$ y $\frac{1}{2}AC = UV = MN$



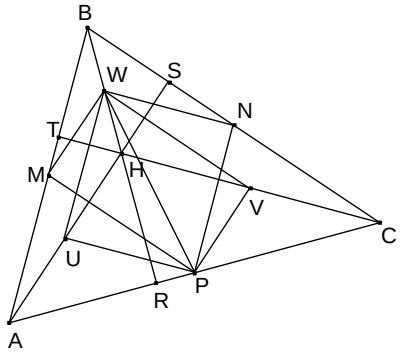
En el triángulo BHC tenemos que N y V son puntos medios, por lo tanto NV es base media, en consecuencia $BH//NV$.

En el triángulo ABH tenemos que M y U son puntos medios, por lo tanto MU es base media, en consecuencia $BH//MU$

Por lo tanto $BH//NV//MU$

Cómo $BH \perp AC$ entonces $NV \perp VU$, por lo tanto $MNVU$ es rectángulo.

Análogamente se demuestra que $WVPM$ y $WNPU$ son rectángulo y tienen la misma diagonal WP.



Todos los rectángulos son cíclicos siendo la diagonal el diámetro de la circunferencia circunscripta, entonces tenemos que P, V, N, W, M, U pertenecen a una misma circunferencia.

Como WP es diámetro y $W\hat{R}P = 90° \Longrightarrow R$ pertenece a la circunferencia.

De manera análoga se demuestra que S y T pertenece a la circunferencia.

Es decir $R, P, V, N, S, W, T, M, U$ pertenecen a una misma circunferencia, llamada circunferencia de los nueve puntos o circunferencia de Feuerbach. [3.2.1]

Teorema de Feuerbach

La circunferencia inscripta en un triángulo es tangente a la circunferencia de los nueve puntos.

Demostración

Sea el triángulo ABC de lados $AB = C$, $BC = a$ y $AC = b$ y sea ω la circunferencia inscripta del ABC, consideramos los puntos $M, N\ y\ P$ puntos medios de todos los lados $a, b\ y\ c$.

Los lados del triángulo MNP resultan ser bases medias del triángulo ABC, por lo tanto tenemos que:

$$PN = \frac{b}{2} \quad MP = \frac{a}{2} \quad MN = \frac{c}{2}$$

Consideramos las circunferencias de radio cero y centros $M, N\ y\ P$ y calculamos los segmentos tangentes entre las cuatro circunferencias. Entonces, tenemos:

$$t_{NP} = NP = \frac{c}{2} \quad t_{MP} = MP = \frac{a}{2} \quad t_{MN} = MN = \frac{b}{2} \quad [3.3.2]$$

Consideramos la circunferencia ω inscripta en el ABC, llamamos $\omega \cap b = \{U\}$, $\omega \cap a = \{V\}$ y $\omega \cap b = \{W\}$, es decir que U, V y W son los puntos de tangencias de la circunferencia ω con los lados del triángulo ABC.

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan las dos tangentes a la misma, los segmentos determinados entre dicho punto y los puntos de tangencia son iguales. Por lo tanto:

$$\Longrightarrow \quad x = AU = AW$$

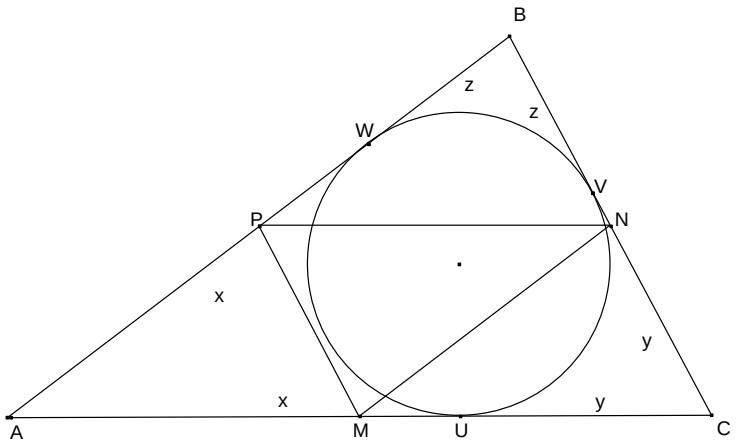
$$\Longrightarrow \quad y = CV = CU$$

$$\Longrightarrow \quad z = BW = BV$$

Siendo $s = \frac{a+b+c}{2}$, tenemos que:

$$2s = a + b + c \implies 2s = 2x + 2y + 2z \implies s = x + y + z$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = s - (y + z) \Longrightarrow x = s - a \\ y = s - (x + z) \Longrightarrow y = s - c \\ z = s - (x + y) \Longrightarrow z = s - b \end{cases}$$



Teniendo en cuenta la posición de los puntos $M, N\ y\ P$ con respecto a los puntos $U, V\ y\ W$, utilizaremos valor absoluto para calcular $t_{\omega N}$, $t_{\omega M}$ y $t_{\omega P}$ ya que por ejemplo: $\frac{a}{2} > y$ ó $\frac{a}{2} < y$

$$t_{\omega N} = NV = \left|\frac{a}{2} - y\right| = \left|\frac{a}{2} - (s-c)\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + c\right| = \left|\frac{c-b}{2}\right|$$

$$t_{\omega M} = MU = \left|\frac{b}{2} - y\right| = \left|\frac{b}{2} - (s-c)\right| = \left|\frac{b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + c\right| = \left|\frac{c-a}{2}\right|$$

$$t_{\omega P} = PW = \left|\frac{c}{2} - z\right| = \left|\frac{c}{2} - (s-b)\right| = \left|\frac{c}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + b\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|$$

Luego aplicando el teorema recíproco [2.4], tenemos:

$$t_{MP}t_{\omega N} + t_{NP}t_{\omega P} = t_{MN}t_{\omega M}$$

Sustituyendo

$$\frac{a}{2}\left|\frac{c-b}{2}\right| + \frac{c}{2}\left|\frac{b-a}{2}\right| = \frac{b}{2}\left|\frac{c-a}{2}\right|$$

Verifica para alguna combinación de signos, como por ejemplo al tomar todos los módulos con valor absoluto positivo.

$$ac - ab + cb - ac = bc - ab$$

Por lo tanto, las circunferencias $(M, N, P\ y\ \omega)$ son tangentes a una misma circunferencia, como $M, N\ y\ P$ pertenecen a la circunferencia de los nueve puntos, las

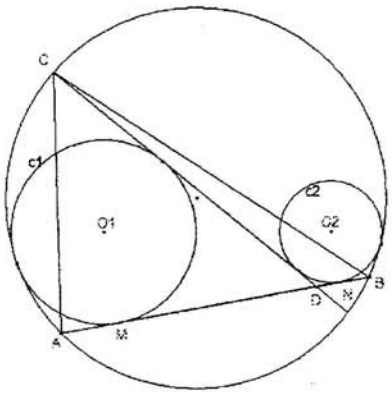
circunferencias $(M, N, P \text{ y } \omega)$ son tangentes interiores a la circunferencia de los nueve puntos.

3.3 Un problema de Víctor Thébault

Sean r_1 y r_2 radios de dos circunferencias c_1 y c_2 tangentes interiores a la circunferencia c_3, sin ser simultáneamente nulos. Sea MNel segmento tangente exterior entre c_1 y c_2 en los puntos M y N respectivamente, sea t en segmento tangente interior entre c_1 y c_2 tal que $t \cap c_3 = \{C\}$ y $t \cap AB = \{D\}$, sea r el radio de la circunferencia inscripta en ABC y $\alpha = A\widehat{D}C$, tenemos que:

$$r = r_1 cos^2\frac{\alpha}{2} + r_2 sen^2\frac{\alpha}{2} \quad con\ 0 < \alpha < \pi$$

Demostración



Llamamos $a = BC, B = AC, c = AB, x = MD\ e\ y = DN$

Consideramos las circunferencias A, B, C y c_1 para aplicar el teorema de Casey

Tenemos: $$c(CD - x) + a(AD - x) = b(DB + x)$$

Operando $$cCD - cx + aAD - ax = bDB + bx$$

$$cCD + aAD - bDB = x(a + b + c) \qquad [3.3.1]$$

Además si consideramos las circunferencias A, B, c_2 y C

$$c(CD - y) + b(DB - y) = a(AD + y)$$

$$cCD - aAD + bDB = y(a + b + c) \qquad [3.3.2]$$

Sumando las expresiones [3.3.1] y [3.3.2]

$$2cCD = (x+y)(a+b+c) \implies x+y = \frac{2cCD}{a+b+c} \qquad [3.3.4]$$

En el triángulo rectángulo O_1MD, tenemos que

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{r_1} \implies x = r_1 \cot\frac{\alpha}{2} \qquad [3.3.5]$$

En el triángulo rectángulo O_2ND, tenemos que

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{r_2} \implies y = r_2 tan\frac{\alpha}{2} \qquad [3.3.6]$$

Sustituyo [3.3.5][3.3.6] en [3.3.4]

$$r_1 \cot\frac{\alpha}{2} + r_2 tan\frac{\alpha}{2} = \frac{2cCD}{a+b+c}$$

Multiplicamos miembro a miembro por $sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}$ y obtenemos

$$r_1 \cos^2\frac{\alpha}{2} + r_2 sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2cos\frac{\alpha}{2}sen\frac{\alpha}{2}cCD}{a+b+c}$$

$$r_1 \cos^2\frac{\alpha}{2} + r_2 sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\alpha.cCD}{a+b+c} \qquad [3.3.7]$$

Luego, en el triángulo ACD tenemos que

$$sen\alpha = \frac{altura\ del\ ADC}{CD} \implies CD.sen\alpha = altura\ del\ ADC = h \quad [3.3.8]$$

Llamamos $2s = a+b+c$ y sustituimos [3.3.8] en [3.3.7]

$$r_1 \cos^2\frac{\alpha}{2} + r_2 sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{hc}{2s} \quad [3.3.9]$$

Por [3.1.3]

$$[A] = \frac{hc}{2} \implies 2[A] = hc = 2rs \qquad [3.3.10]$$

Utilizando la fórmula [3.3.10] en [3.3.9] , obtenemos:

$$r_1 \cos^2\frac{\alpha}{2} + r_2 sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2rs}{2s} \implies r_1 \cos^2\frac{\alpha}{2} + r_2 sen^2\frac{\alpha}{2} = r$$

Bibliografía

- Problem 3887, The American Mathematical Monthly, vol. 7, 1938, p- 482.
- A historically interesting formula for the area of a quadrilateral, J.L. Coolidge, Harvard University, The American Mathematical Monthly, vol. 6, 1939, p-347.
- H. Coxeter. Fundamentos de Geometría. Editorial Limusa-Wiley. México. 1971.
- H. Coxeter; S. Greitzer. Retorno a la Geometría. DLS-EULER, Ed La Tortuga de Aquiles, Madrid, España. Enero 1994.
- F. Bellot Rosado. Los Teoremas de Ptolomeo y su Generalización por Casey. Aplicaciones. Revista de Olimpiada Iberoamericana de Matemática, nro1, 2002. http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero1/Casey.pdf