

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA



UNLaM

Escuela de Formación Continua

Licenciatura en Matemática Aplicada

Tesis

“Modelización de la Dinámica del Virus del Nilo Occidental”

Alumno: Guede Vater, Carolina S.

Profesor: Mag. Osvaldo Galardo.

Tutor: Lic. Martín P. C. Ramos

Fecha: 22/12/2011

Ciclo lectivo 2011

<i>Índice</i>	<i>Página</i>
<i>Resumen.....</i>	<i>1</i>
<i>Introducción.....</i>	<i>2</i>
<i>Capítulo 1.....</i>	<i>4</i>
1.1. Clasificación de los modelos matemáticos.....	5
1.2. Conceptos básicos de epidemia.....	5
1.3. Principales modelos de transmisión de enfermedades infecciosas.....	6
1.4. Obtención del modelo matemático.....	6
1.5. Clasificación del sistema dinámico No Lineal.....	8
1.6. Análisis de la Estabilidad Interna de los sistemas No Lineales.....	9
1.7. Estabilidad de los Puntos de Equilibrio.....	9
1.8. Análisis de Estabilidad de los Puntos de Equilibrio de los Sistemas No Lineales Mediante sus Aproximaciones Lineales.....	11
1.9. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.....	12
1.10. Principio de Invariancia.....	15
<i>CAPÍTULO 2.....</i>	<i>16</i>
2.1. <i>Formulación Del Modelo.....</i>	16
2.2. <i>Estados Estacionarios Del Modelo.....</i>	20
2.3. <i>Análisis De La Estabilidad.....</i>	22
<i>CONCLUSIÓN.....</i>	<i>27</i>
<i>REFERENCIAS.....</i>	<i>28</i>
<i>BIBLIOGRAFÍA.....</i>	<i>37</i>

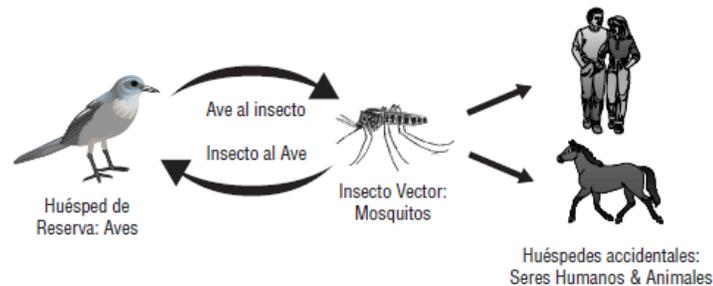
Resumen. En este trabajo se formulará y analizará un modelo matemático para la transmisión de la infección del Virus del Nilo Occidental (*VNO*) entre el vector mosquito y la población aviar.

INTRODUCCIÓN

El Virus del Nilo Occidental es un flavivirus transmitido por mosquitos, principalmente el *Culex* spp, y un patógeno humano, equino y aviar.

Se cree que las aves son el reservorio natural, y los seres humanos, equinos y probablemente otros vertebrados son los huéspedes circunstanciales, es decir que pueden contraer el virus por un mosquito infectado, pero no transmiten la infección.

Ciclo de transmisión:



Cuando un mosquito infectado pica a un pájaro, transmite el virus. Las aves pueden posteriormente desarrollar los títulos virales suficientemente altos durante tres a cinco días para infectar otro mosquito. El virus también puede contagiarse a través de la transmisión vertical, de un mosquito a sus hijos lo que aumenta la supervivencia de virus del Nilo Occidental en la naturaleza. La mayoría de las infecciones del *VNO* son subclínicas, pero las infecciones clínicas pueden variar en la severidad desde la fiebre del Nilo Occidental sin complicaciones hasta la meningoencefalitis fatal. En su forma clínica la enfermedad se manifiesta luego de un período de incubación de tres a catorce días con un comienzo súbito de fiebre y cefalea mialgias que duran menos de una semana. Otras manifestaciones incluyen faringitis, inyección conjuntival, dolor ocular, náuseas, vómitos y dolor abdominal. La enfermedad neuroinvasiva es relativamente rara y ocurre en personas de más de cincuenta años de edad y se presenta con los síntomas inespecíficos de la infección viral, conjuntamente con la rigidez de la nuca y debilitamiento muscular. La mortalidad asociada a esta forma de la enfermedad se da en personas de edad avanzada.

El diagnóstico aparente de los aspectos clínicos se establece sobre la base de estudios en sangre. La enfermedad por el virus no tiene un tratamiento específico y su prevención está dirigida al control de mosquitos vectores a través de la eliminación de focos infecciosos (eliminando condiciones peridomésticas que proporcionan criaderos: estancado de agua).

El *VNO* ha circulado durante mucho tiempo en diferentes partes del mundo, principalmente en África, Asia, sur de Europa y Australia, siendo el responsable de epidemias importantes, entre las que destacan las ocurridas en Israel (1950), Francia (1962), Sudáfrica (1974) y Rumania (1996).

Durante el período de verano-otoño en 1999 y 2000, el virus fue detectado por primera vez en América del Norte (Nueva York) durante un brote que incluyó humanos, equinos y pájaros. Desde entonces se ha extendido rápidamente en los Estados Unidos.

En México, los informes de los últimos dos años muestran esta infección ha aparecido causando muertes en aves y enfermedades en los caballos. [1]

En Argentina se detectó la presencia de virus del Nilo Occidental (*VNO*) en muestras de cerebro de tres equinos provenientes de dos localidades de la provincia de Buenos Aires, por lo que se ha estimado pertinente alertar a las Secretarías Regionales Ministeriales de Salud sobre su posible introducción en el país. [2]

Pero aun así la pregunta principal es ¿Por qué la actividad del *VNO* es bastante leve en comparación con la de Estados Unidos? Algunos estudios apuntan a la hipótesis de que la presencia en la región de las infecciones de otros arbovirus como dengue y San Louis Encefalitis, puede provocar la inmunización cruzada de virus del Nilo Occidental. Se sospecha que las aves migratorias son los principales huéspedes introductorias del virus, pues los brotes en las regiones templadas ocurren en general durante el fin del verano y principios del otoño, coincidiendo con la llegada de grandes grupos de aves migratorias.

Los modelos matemáticos se han utilizado ampliamente para explorar la dinámica de las enfermedades ya que puede dar un conocimiento cualitativo de los factores de riesgo asociados con la introducción y propagación de una enfermedad.

En este trabajo se presentará un modelo para explorar el ciclo de transmisión temporal mosquito-ave del Virus del Nilo Occidental. Se compone de las interacciones entre los individuos susceptibles y los infecciosos de las dos especies, asumiendo que la transmisión de la enfermedad es sólo por causa de las picaduras de mosquitos y la transmisión vertical del vector población.

En el siguiente capítulo se desarrolla el marco teórico, en el capítulo 2 la aplicación y análisis del modelo matemático para el Virus del Nilo Occidental y luego se presenta la conclusión.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

La construcción de modelos matemáticos es una de las herramientas utilizadas hoy en día para el estudio de problemas en medicina, biología, bioquímica, epidemiología, entre otras áreas del conocimiento; sus objetivos primordiales son describir, explicar y predecir fenómenos y procesos en dichas áreas.

La relevancia de la construcción de los modelos matemáticos para enfermedades infecciosas es de suma importancia ya que pueden reproducir las características cualitativas de las observaciones. Es posible extraer de ellos propiedades y características de las relaciones entre los elementos que de otra forma permanecerían ocultas porque en la mayor parte de los problemas de enfermedades infecciosas del mundo real no es factible experimentar con la misma.

Por lo tanto, es natural intentar superar esta dificultad con la construcción de un modelo que describa de manera adecuada las características básicas de la epidemia y entonces usar el modelo para predecir las consecuencias de introducir cambios específico.

La función principal de un modelo para una enfermedad infecciosa consiste en proveer un medio que posibilita entender la dispersión de una enfermedad infecciosa a través de una población bajo diferentes escenarios. Es importante resaltar que un modelo está en verdad definido por las relaciones que incorpora. Estas relaciones son independientes de los datos a introducir en el modelo, ya que un modelo puede usarse para diferentes ocasiones y en distintos contextos. Cabe señalar que los modelos matemáticos para enfermedades infecciosas se utilizan como herramienta para tomar decisiones y que deben valorarse en su justa medida, ya que difícilmente es comprensible un problema complejo sin una mínima modelación, aunque también hay que reconocer que no es posible modelar la totalidad de las situaciones reales. En esencia, la función central de crear y analizar modelos matemáticos es mejorar la comprensión de un sistema para prevenir futuras situaciones de enfermedades, determinar la prevalencia e incidencia y coadyuvar a tomar decisiones objetivas para controlar o erradicar las enfermedades.

1.1 Clasificación de los modelos matemáticos

Existen dos tipos de modelos matemáticos: determinísticos y estocásticos. En un modelo determinístico (**modelo que se estudiará en este trabajo**) se pueden controlar los factores que intervienen en el estudio del proceso o fenómeno y por tanto se pueden predecir con exactitud sus resultados. En un modelo estocástico no es posible controlar los factores que intervienen en el estudio del fenómeno y en consecuencia no produce simples resultados únicos. La diferencia es más grande de lo que parece, ya que en un modelo matemático determinístico en el contexto epidemiológico; un solo sujeto causa una epidemia generalizada, mientras que bajo un modelo estocástico existe la posibilidad de que la epidemia se extinga.

1.2 Conceptos básicos de epidemia

Número reproductivo básico. El número reproductivo básico R_0 es el principal parámetro utilizado en epidemiología, definido como el número promedio de infecciosos secundarios producidos por un individuo infeccioso β introducido a una población susceptible N durante el tiempo que este individuo permanece infeccioso $1/\gamma$.

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$$

La media geométrica de estas cantidades $\sqrt{R_0}$ representa el número promedio de infecciones secundarias producidas por una sola infección durante su periodo de contagio

$$\widetilde{R}_0 = \sqrt{R_0}.$$

La condición de umbral que determina la dinámica de la infección está dada por el \widetilde{R}_0 y el comportamiento de la enfermedad a través del tiempo depende de la naturaleza del parámetro, entonces:

$\widetilde{R}_0 \leq 1$ la enfermedad decrece.

$\widetilde{R}_0 > 1$ la enfermedad sigue siendo endémica.

1.3 Principales modelos de transmisión de enfermedades infecciosas

Modelos SI, SIS y SIR.

Los modelos matemáticos para dinámicas de población son muy conocidos. Uno de los más comunes es el modelo *SIR*. Este modelo considera que una población se puede dividir en tres clases excluyentes. Los vulnerables a la enfermedad infecciosa son la clase susceptibles. Los que pueden transmitir la enfermedad a otros son la clase infecciosa. Los que son inmunes, son la clase recuperada. En su forma estándar, el modelo *SIR* considera el evento a corto plazo en el que un pequeño número de infecciosos se introduce en una población en la que por lo general no se encuentra la enfermedad. Dependiendo de los valores de los parámetros, la enfermedad puede desaparecer, o transformarse en una epidemia.

1.4 Obtención del modelo matemático:

Sean $S_{(t)}$, $I_{(t)}$ y $R_{(t)}$ las poblaciones de las clases de los susceptibles, de los infecciosos y de los recuperados y sea $N_{(t)}$ la población total. Se supone que cada individuo pertenece exactamente a una de las clases, por lo tanto

$$S + I + R = N \quad (1)$$

Cada una de las incógnitas poblacionales puede modificarse con el tiempo ya que los individuos cambian de una clase a otra. Sólo se necesita obtener ecuaciones diferenciales para tres de estas cantidades.

La clave para obtener las ecuaciones diferenciales es modelar las interacciones entre las clases usando análisis compartamental. Al nacer, los individuos ingresan a la clase de los susceptibles. Los susceptibles se pueden convertir en infecciosos, y los infecciosos se pueden recuperar. Los individuos de cualquiera de las clases pueden morir por causas ajenas a la enfermedad, y los individuos infecciosos también pueden morir a causa de la enfermedad. La figura siguiente ilustra los vínculos entre las clases así como expresiones que indican las velocidades a las que ocurren los cambios.

Las cantidades k_b, k_i, k_r, k_d , y k_m , indican los coeficientes de proporcionalidad en las tasas o velocidades de nacimiento, infección, recuperación, muerte y mortalidad debido a otras causas, respectivamente. La velocidad de infección es también proporcional a la población de infectados. El coeficiente del índice de natalidad se considera dependiente del total de la población, lo que permite una solución de equilibrio estable en ausencia de la enfermedad.

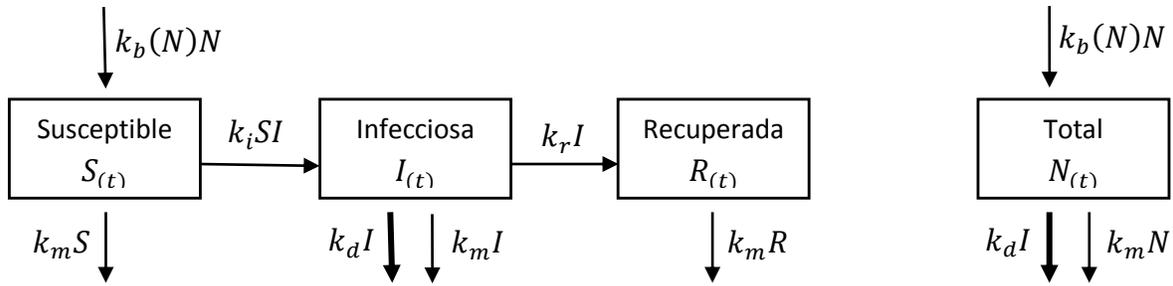


diagrama del modelo *SIR* a largo plazo: las flechas más oscuras indican procesos que ocurren en una escala a corto plazo.

A la vista del diagrama es posible dar un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que describan el sistema. Se elige escribir ecuaciones para la población N , para la población susceptible S y para la población infectada I . Estas ecuaciones son:

$$\frac{dN}{dt} = k_b(N)N - k_dI - k_mN \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dt} = k_b(N)N - k_iSI - k_mS \quad (3)$$

$$\frac{dI}{dt} = k_iSI - (k_i + k_m + k_r)I \quad (4)$$

Para terminar el modelo, es necesario conocer las constantes de velocidad y la función de índice de natalidad. Los valores numéricos son problemáticos, ya que ninguna de éstas constantes es fácil de medir.

Un ejemplo sirve para ilustrar esto: sea $\mu = \frac{k_d}{k_r + k_d}$, esta cantidad mide la mortalidad de la enfermedad; la razón de muertes a causa de la enfermedad respecto de la velocidad total de muerte y recuperación es la misma que la fracción de enfermos que mueren por la enfermedad, ignorando a aquellos que, durante la enfermedad, mueren por causas no relacionadas con la enfermedad.

Lo principal que hay que notar es que la carencia de datos precisos con los cuales determinar las constantes de velocidad hacen que no tenga sentido tratar de obtener un alto grado de precisión cuantitativa en la solución, se debe elegir con libertad toda aproximación que introduzca menos incertidumbre en los resultados que la que es introducida automáticamente por la incertidumbre de los parámetros.

1.5 Clasificación del sistema dinámico No Lineal:

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones (sistema) y dinámicos porque sus parámetros varían generalmente en la variable tiempo. El estudio del sistema se enfoca en el análisis cualitativo del modelo.

Los sistemas dinámicos que se utilizaran para este estudio son aquellos en los que el tiempo varía continuamente y se expresan con ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs). En las ODEs sólo hay una variable independiente que es generalmente el tiempo.

Un sistema dinámico continuo n-dimensional se puede representar por la ecuación: $\dot{x} = f(x)$.

donde $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\dot{x} = d[x_1, \dots, x_n]^T / dt \in \mathbb{R}^n$ y

$f = [f_1(x) \dots f_n(x)]^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Un sistema dinámico es autónomo si está representado por una ecuación diferencial ordinaria autónoma o no forzada de la forma $\dot{x} = f(x)$ la cual no contiene ningún estímulo externo al sistema dependiente que fuerce el comportamiento natural de la dinámica del sistema.

Un sistema es invariante en el tiempo si éste no depende explícitamente del tiempo.

De la definición se puede concluir que todo sistema autónomo es invariante en el tiempo si:

$$x(0) = x(\delta) = x_0 \implies x(t) = x(t + \delta) \forall t$$

es decir, para que el sistema sea invariante en tiempo dos trayectorias que pasen por el mismo punto en diferentes tiempos tendrán la misma evolución con un desplazo en el tiempo.

1.6 Análisis de la Estabilidad Interna de los sistemas No Lineales:

La riqueza dinámica de los sistemas no lineales presenta ciertos fenómenos que no se evidencian al estudiar los sistemas lineales. Uno de estos fenómenos es la existencia de múltiples puntos de equilibrio aislados. Un sistema lineal puede tener un solo punto de equilibrio aislado, y por lo tanto un solo estado de régimen estacionario, si el punto es asintóticamente estable atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial. En cambio, los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial. Debido a esto, resulta importante estudiar la estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio de los sistemas no lineales para poder entender mejor el comportamiento del mismo.

Aquí se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales mediante el estudio del comportamiento del estado en un entorno de los mismos.

Para ello se presenta el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov¹ como así también una introducción los métodos de Lyapunov para el análisis de estabilidad.

1.7 Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov si todas las soluciones que nacen en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en dichas cercanías; de otra forma resulta inestable. El punto de equilibrio además es asintóticamente estable si las soluciones además de permanecer en las cercanías del mismo, tienden hacia el punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo, a continuación se formalizan estos conceptos:

Considérese el siguiente sistema autónomo:

$$\dot{x} = f(x) \quad (5)$$

donde las componentes del vector *n-dimensional* $f(x)$ son continuas y además son funciones Lipschitzianas² en forma local de x , definidas para todo x en el dominio $D \in \mathbb{R}$. La condición de Lipschitz garantiza la existencia y unicidad de la solución de (5) que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$.

1- Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), matemático ruso cuyos trabajos, que aparecieron publicados a mediados de 1892, dieron origen al estudio de estabilidad mediante un enfoque teórico que hoy lleva su nombre.

2- Una función $f(x)$ se denomina Lipschitziana en forma local en un punto x_0 si satisface la condición de Lipschitz: $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ para x, y en un entorno de x_0 , donde L es una constante positiva y $\|\cdot\|$ denota la norma Euclídea en \mathbb{R}^n , i. e., $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Suponiendo que $\bar{x} \in D$ es un **punto de equilibrio** de (5); o sea $f(\bar{x}) = 0$, se pretende caracterizar y analizar la estabilidad de \bar{x} . Por conveniencia se considera $\bar{x} = 0$ lo cual no representa una pérdida de generalización ya que cualquier punto de equilibrio $\bar{x} \neq 0$ puede ser trasladado al origen mediante el cambio de variable $y = x - \bar{x}$ con lo que se tiene:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) = g(y), \quad \text{con } g(0) = 0$$

En esta nueva variable y , el sistema $\dot{y} = g(y)$ tiene como punto de equilibrio al origen del espacio de estados. En consecuencia, de ahora en más se considerará que $f(x)$ satisface $f(0) = 0$ y se estudiará la estabilidad del origen del espacio de estados $x = 0$ como punto de equilibrio.

Definición 1: Si $\phi(t, t_0, x_0)$ representa la solución de (5) dada a partir de la condición inicial $x(t_0) = x_0$ a partir del instante inicial $t = t_0$, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de (5) es:

- **Lyapunov estable** si para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

- **Inestable** si no es estable
- **Asíntoticamente estable** si es estable y δ se puede elegir de modo que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, t_0, x_0) = 0$$

En la figura se muestra una representación gráfica de la *definición 1* para los tres casos de estabilidad definidos.

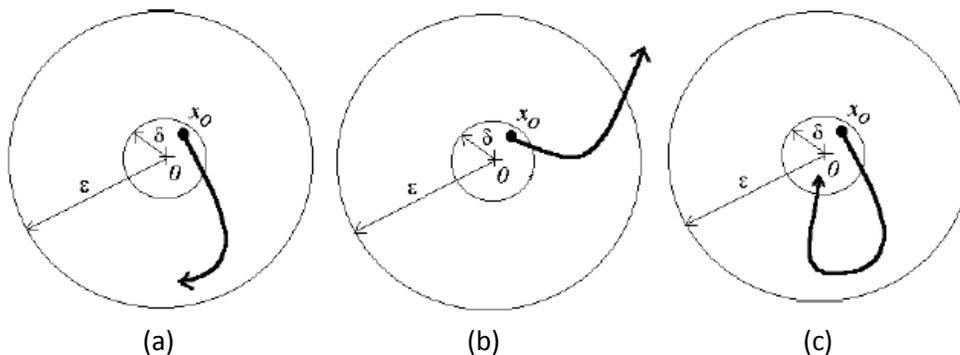


Fig.1 Puntos de equilibrio en $x = 0$ con trayectorias solución representativas para un caso: (a) estable, (b) inestable y (c) asíntoticamente estable.

Una vez definidos los diferentes tipos de estabilidad de los puntos de equilibrio, es necesario encontrar métodos para determinar la misma.

1.8 Análisis de Estabilidad de los Puntos de Equilibrio de los Sistemas No Lineales Mediante sus Aproximaciones Lineales

Usualmente, el primer paso en el análisis de sistemas no lineales es realizar una linealización en torno a un punto de equilibrio y analizar el comportamiento del modelo lineal. Entonces el siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales es posible extraer conclusiones sobre la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema no lineal a través del análisis de estabilidad del modelo linealizado en torno a dicho punto de equilibrio. El Teorema se conoce como Método Indirecto de Lyapunov.

Teorema 1 (Método Indirecto de Lyapunov): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por $\dot{x} = f(x)$ donde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, es continuamente diferenciable y D es un entorno del origen. Sea la matriz Jacobiana.

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \text{ continua sobre } D$$

Entonces, notando con λ_i a los autovalores de $A = (i = 1, \dots, n)$

- El origen es asintóticamente estable si $\Re\{\lambda\} < 0$, para todo λ_i
- El origen es inestable si $\Re\{\lambda\} > 0$ para uno o más autovalores de A . [3]

Este teorema brinda un simple procedimiento para determinar la estabilidad del origen como punto de equilibrio de un sistema no lineal a través de su modelo incremental lineal. Sin embargo, todavía es posible extraer más información del sistema linealizado como lo muestra el siguiente teorema:

Teorema 2 (Hartman-Grobman): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por $\dot{x} = f(x)$ donde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, es continuamente diferenciable y D es un entorno del origen. Sea la matriz Jacobiana

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \text{ continua sobre } D$$

Entonces, si A no tiene autovalores nulos o imaginarios con parte real nula, existe un homeomorfismo h , es decir una función que tiene inversa y ambas continuas definida en un entorno abierto U del origen, tal que para cada $x_0 \in U$, hay un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al cero de modo que para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$:

$$h(\phi(t, t_0, x_0)) = e^{A(t-t_0)}h(x_0)$$

donde $\phi(t, t_0, x_0)$ representa la solución de $\dot{x} = f(x)$ dada a partir de la condición inicial $x(0) = x_0$ a partir del instante inicial $t = t_0$. [4]

Es decir, que h transforma las trayectorias del sistema no lineal en las del sistema linealizado, preservando la parametrización, o sea el sentido en el que se recorren.

Este teorema no solo brinda información sobre la estabilidad del punto de equilibrio sino que también permite conocer cualitativamente el comportamiento de las trayectorias en un entorno del mismo.

Ninguno de ambos teoremas establece condición alguna cuando $\Re\{\lambda_i\} \leq 0$ para todo i , y $\Re\{\lambda_i\} = 0$ para algún i . En este caso, la linealización no es suficiente para determinar la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema no lineal, como así tampoco para establecer la forma del retrato de fase entorno al origen, y se debe recurrir a alguna otra herramienta para el análisis.

1.9 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

De la teoría clásica de la Mecánica, es sabido que un sistema es estable si su energía, una función positiva, es continuamente decreciente, o sea tiene derivada negativa, hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio. El segundo método de Lyapunov es una generalización de este hecho. Lyapunov demostró que ciertas otras funciones aparte de la función energía pueden ser usadas para la determinación de la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema. Antes de presentar el teorema de Lyapunov se necesario revisar algunos conceptos.

Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, entonces:

- $V(x)$ se dice que es una función **definida positiva** si $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ en $D - \{0\}$
- $V(x)$ se dice que es una función **semidefinida positiva** si $V(0) = 0$ y $V(x) \geq 0$ en D
- $V(x)$ se dice que es una función **definida negativa** si $-V(x)$ es definida positiva.
- $V(x)$ se dice que es una función **semidefinida negativa** si $-V(x)$ semidefinida positiva.

- La derivada temporal de V sobre las trayectorias de (5) se denomina **derivada orbital**, se denota $\dot{V}(x)$, y está dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

La derivada de V sobre las trayectorias del sistema depende de la ecuación vectorial de estado del sistema. De este modo, $\dot{V}(x)$ será diferente para diferentes sistemas.

Si $\phi(t, t_0, x_0)$ representa la solución de (5) dada a partir de la condición inicial $x(0) = x_0$ a partir del instante inicial $t = t_0$, entonces

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi(t, t_0, x_0))$$

Consecuentemente, si $\dot{V}(x)$ es negativa, V será decreciente sobre las trayectorias solución de (5). Ahora se está en condiciones de presentar el segundo método o método directo de Lyapunov:

Teorema 3 (Método directo de Lyapunov): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$ y sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, entonces:

Si $V(x)$ es **definida positiva** y $\dot{V}(x)$ es **semidefinida negativa**, el origen es un punto de equilibrio **estable**.

Si $V(x)$ es **definida positiva** y $\dot{V}(x)$ es **definida negativa**, el origen es un punto de equilibrio **asintóticamente estable**. [5]

Una función $V(x)$ que cumple con las condiciones impuestas en el teorema anterior se denomina **función de Lyapunov**. Este método es una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, presenta dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov por lo tanto hay que proponer una función candidata a función de Lyapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad. La segunda es que el teorema solo brinda condiciones suficientes por lo tanto el hecho de no encontrar una función candidata a Lyapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica no significa que el origen es inestable o no asintóticamente estable.

Se puede demostrar que si $V(x)$ es una función de Lyapunov, el conjunto de los x tal que $V(x) = c$, para alguna constante $c > 0$ es una hypersuperficie cerrada (denominada **superficie de Lyapunov** o **superficie de nivel**) en el espacio de estados que encierra al origen. El uso de las superficies de Lyapunov hace que el teorema sea fácilmente interpretable. Las superficies que corresponden a constantes decrecientes $0 < c_2 < c_1$, se encuentran íntegramente contenidas como lo muestra la figura 2 para el caso de \mathbb{R}^2 .

La condición $\dot{V}(x) \leq 0$ se puede interpretar geoméricamente a través de (6) ya que la misma significa que el producto escalar entre el gradiente de V y el campo vectorial f es negativo:

$$\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$$

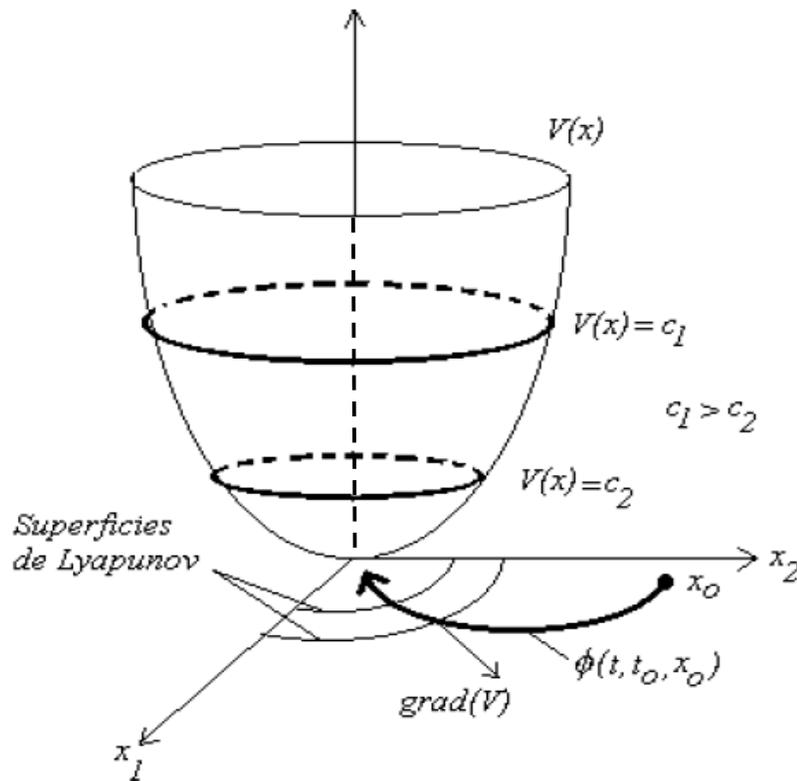


Fig.2 Interpretación geométrica de las superficies de Lyapunov para el caso de \mathbb{R}^2

Teniendo en cuenta que f es un vector tangente a la trayectoria solución, la condición: $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ significa que cuando una trayectoria cruza una superficie de Lyapunov, esta trayectoria lo hace hacia adentro y nunca vuelve a salir. Además cuando $\dot{V}(x) < 0$ las trayectorias se mueven desde una superficie hacia otra interior correspondiente a un c menor. Cuando c decrece, las superficies de Lyapunov correspondientes se achican hacia el origen mostrando que las trayectorias se

aproximan al origen a medida que transcurre el tiempo. En cambio, si $\dot{V}(x) \leq 0$ no se puede asegurar que las trayectorias converjan al origen, pero se puede concluir que el origen es estable ya que las trayectorias quedarán contenidas en algún entorno ε del origen si la condición inicial x_0 está dentro de alguna superficie de Lyapunov contenida en dicho entorno ε .

1.10 Principio de Invariancia

Cuando $\dot{V}(x)$ semidefinida negativa, todavía es posible determinar la estabilidad asintótica del origen como lo muestra el siguiente corolario del Principio de Invariancia de LaSalle:

Corolario: Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (5). Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida positiva continuamente diferenciable sobre el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen $x = 0$, y además $\dot{V}(x) \leq 0$ en D . Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$. Si ninguna trayectoria solución de (5) que entra en la región S permanece allí indefinidamente salvo la solución trivial, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. [6]

Este corolario establece que si para un sistema de la forma de (5) se encuentra una función de Lyapunov que es semidefinida positiva, para concluir que el origen es asintóticamente estable se debe demostrar que cuando las trayectorias entran en la zona del espacio de estado donde se anula \dot{V} no permanecen allí para siempre a menos que se esté en el punto de equilibrio

CAPÍTULO 2

2.1 Formulación Del Modelo

Para describir la dinámica de la transmisión del *VNO* se consideran modelos del tipo S-I-R y tipo S-I.

Sean: $N_a(t)$ El vector población de aves y $N_v(t)$ el vector población mosquito en función del tiempo t .

La población aviar incluye individuos susceptibles (que pueden ser infectados), infecciosos y removidos (resistentes temporales).

La población del vector mosquito está constituida en susceptibles e infectados. (No se considera la clase recuperadora en esta población ya que por su corta vida un mosquito nunca se recupera de la infección).

Entonces se denota por:

$S_a(t)$, $I_a(t)$ y $R_a(t)$ al número de individuos susceptibles, infectados y recuperados en el vector población aviar.

$S_v(t)$ y $I_v(t)$ al número de mosquitos susceptibles e infectados en la población mosquito.

Con las condiciones: $S_a(t) + I_a(t) + R_a(t) = N_a(t)$

$$S_v(t) + I_v(t) = N_v(t)$$

Para la población aviar se asume:

Δ_a : Tasa de crecimiento constante (debido a los nacimientos e inmigraciones).

μ_a : Tasa de mortalidad per cápita.

$\mu_a \cdot N_a$: Tasa total de muertes.

γ_a : Tasa de recuperación de aves infectadas, constante.

α_a : Índice de mortalidad específica asociada con el virus NO.

El ajuste del periodo infeccioso teniendo en cuenta la tasa de mortalidad está dada por: $\frac{1}{(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)}$ siendo $\alpha_a \leq \gamma_a$

Para la población mosquito:

μ_v : Tasa de nacimiento y mortalidad constante.

$0 \leq p \leq 1$: Fracción de descendencia de los mosquitos contagiosa (Transmisión del virus verticalmente)

b : Tasa de picadura de los mosquitos constante (Esta tasa depende de una serie de factores en particular climáticos; los valores típicos son una vez cada dos o tres días)

$b \left(\frac{N_v}{N_a} \right)$: Picaduras que recibe un pájaro promedio en unidad de tiempo.

La tasa de infección de cada especie depende de la tasa de las picaduras de mosquitos, las probabilidades de transmisión así como del número de infecciosos y susceptibles de cada especie entonces:

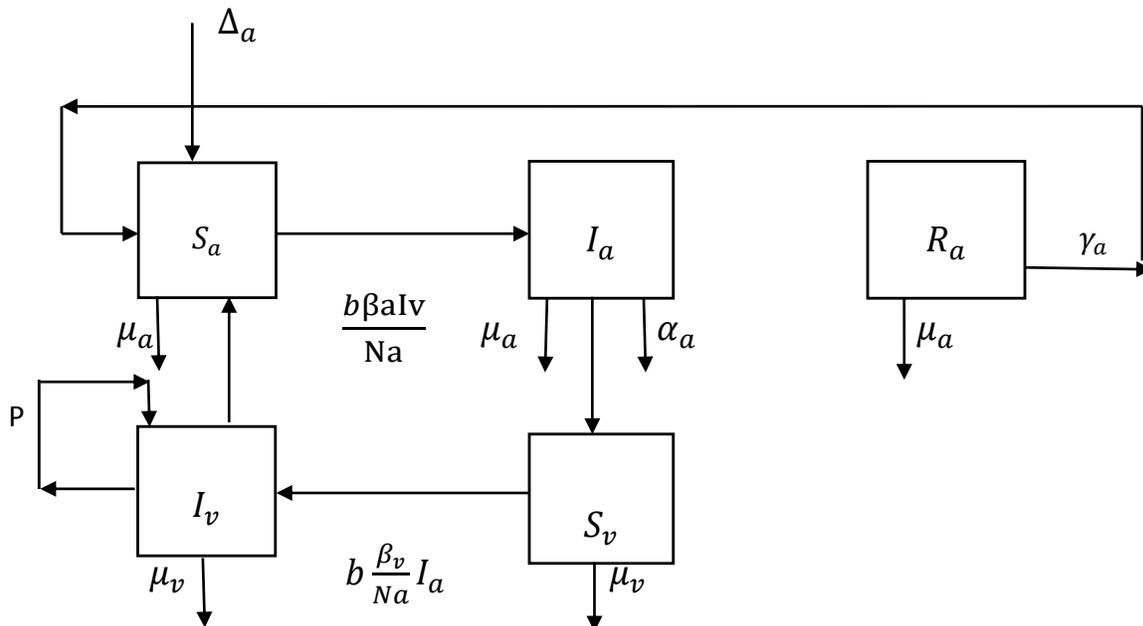
La tasa de infección por aves susceptibles está dada por:

$b \beta_a \frac{N_v I_v}{N_a N_v} = b \frac{\beta_a}{N_a} I_v$, donde β_a es la probabilidad de transmisión de los vectores mosquitos a las aves.

La tasa de infección por vector mosquito susceptible está dada por:

$b \frac{\beta_v}{N_a} I_a$, donde β_v es la probabilidad de transmisión de las aves a los vectores mosquitos.

El diagrama de la dinámica de transmisión y control del vector es el siguiente:



Los sistemas de ecuaciones diferenciales que interpretan la dinámica son:

$$\frac{ds_a}{dt} = \Delta_a - b \cdot \frac{\beta_a}{N_a} \cdot I_v \cdot S_a - \mu_a \cdot S_a \quad (7)$$

$$\frac{dI_a}{dt} = b \cdot \frac{\beta_a}{N_a} \cdot I_v \cdot S_a - (\gamma_a + \mu_a + \alpha_a) \cdot I_a \quad (8)$$

$$\frac{dR_a}{dt} = \gamma_a \cdot I_a - \mu_a \cdot R_a \quad (9) \quad (2.1)$$

$$\frac{ds_v}{dt} = \mu_v \cdot S_v + (1 - p) \cdot \mu_v \cdot I_v - b \cdot \frac{\beta_v}{N_a} \cdot I_a \cdot S_v - \mu_v \cdot S_v \quad (10)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = p \cdot \mu_v \cdot I_v + b \cdot \frac{\beta_v}{N_a} \cdot I_a \cdot S_v - \mu_v \cdot I_v \quad (11)$$

$$\frac{dN_a}{dt} = \Delta_a - \mu_a \cdot N_a - \alpha_a \cdot I_a \quad (12)$$

- Las ecuaciones (7) y (8) interpretan la transmisión de la infección por la picadura de mosquitos infecciosos a individuos susceptibles.
- La ecuación (9) interpreta la recuperación y pérdida de resistencia.
- Las ecuaciones (10) y (11) la transmisión del VNO a la población mosquitos susceptible por la picadura de aves infectadas.
- La ecuación (12) representa la dinámica de la población aviar libre de enfermedad.

Siendo $\mu_a N_a$ la tasa del total de muertes, la ecuación diferencial que gobierna la población libre de enfermedad aviar es la dinámica $\frac{dN_a}{dt} = \Delta_a - \mu_a N_a$. Las soluciones N_a de esta ecuación se aproxima al equilibrio $\frac{\Delta_a}{\mu_a}$ si $t \rightarrow \infty$.

Con las condiciones $S_a + I_a + R_a = N_a$ y $S_v + I_v = N_v$. El primer octante en el espacio $S_a, I_a, R_a, N_a, S_v, I_v$ es positivamente invariante para el sistema (2.1) ya que el campo vectorial en la frontera no apunta al exterior. Por otra parte ya que $\frac{dN_a}{dt} < 0$ para $N_a > \frac{\Delta_a}{\mu_a}$ y N_v constante, todas las trayectorias entran o permanecen en la región:

$$T_+ = \left\{ S_a + I_a + R_a = N_a \leq \frac{\Delta_a}{\mu_a}, S_v + I_v = N_v \right\}$$

La continuidad de la parte derecha del sistema implica que las soluciones únicas existen en un intervalo máximo, desde que las soluciones se acercan o permanecen en T_+ en T_+ y al final se limitan y por lo tanto existen para $t > 0$.

Por lo tanto el problema para el valor inicial del sistema es matemáticamente bien planteado y biológicamente razonable, ya que todas las variables siguen siendo no negativas.

Con el fin de reducir el número de parámetros del sistema (2.1) se normalizan el vector pájaro y el vector población.

$$s_a = \frac{S_a}{\Delta/\mu_a} \quad i_a = \frac{I_a}{\Delta/\mu_a} \quad r_a = \frac{R_a}{\Delta/\mu_a} \quad n_a = \frac{N_a}{\Delta/\mu_a} \quad s_v = \frac{S_v}{N_v} \quad i_v = \frac{I_v}{N_v}$$

$$\text{Siendo } r_a = n_a - s_a - i_a \text{ y } s_v = 1 - i_v$$

Entonces el sistema (2.1) es equivalente al sistema de 4 dimensiones no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned} \frac{ds_a}{dt} &= \mu_a - \frac{b\beta_a m}{n_a} i_v s_a - \mu_a s_a \\ \frac{di_a}{dt} &= \frac{b\beta_a m}{n_a} i_v s_a - (\gamma_a + \mu_a + \alpha_a) i_a \\ \frac{di_v}{dt} &= \frac{b\beta_v}{n_a} i_a (1 - i_v) - (1 - P)\mu_v i_v \\ \frac{dn_a}{dt} &= \mu_a - \mu_a n_a - \alpha_a i_a \end{aligned} \quad (2.2)$$

En el subconjunto $\Omega = \{0 \leq s_a, 0 \leq i_a, s_a + i_a \leq n_a \leq 1, 0 \leq i_v \leq 1\}$ siendo $m = \frac{N_v}{\Delta_a/\mu_a}$, la relación entre el vector población y el equilibrio libre de enfermedad aviar

Número reproductivo básico

Para el modelo: $\widetilde{R}_0 = \sqrt{R_0} = \sqrt{\frac{m \cdot b^2 \cdot \beta_a \cdot \beta_v}{(1-p)\mu_v(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)}}$ es el número reproductivo básico del Nilo Occidental.

La media geométrica de estas cantidades, $\sqrt{R_0}$ representa el número promedio de infecciones secundarias producidas por una sola infección durante su periodo de contagio.

Si $\widetilde{R}_0 \leq 1$ la enfermedad se desvanece,

Si $\widetilde{R}_0 > 1$ la fracción de infectados las poblaciones de mosquitos y aves se acercarán a un estado de equilibrio endémico.

- El número de infecciones producidas por un solo pájaro durante su periodo de contagio en una población de mosquitos susceptibles viene dada por $\frac{m \cdot b \cdot \beta_v}{(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)}$
- Análogamente, el número de infecciones en una población de aves sensibles producidas por un solo mosquito infeccioso durante su vida útil está dada por $\frac{b \cdot \beta_a}{(1-p)\mu_v}$

Es importante tener en cuenta que si los parámetros de R_0 son modificadas, entonces los brotes más graves podrían producirse, o la enfermedad podría desaparecer.

La cantidad \widetilde{R}_0 es proporcional a la raíz cuadrada de la relación m , entre mosquitos y la población aviar. En consecuencia, la propagación de enfermedades es mayor cuando las aves emigran a regiones con alta densidad de mosquitos

2.2. Estados Estacionarios Del Modelo

El sistema tiene dos estados de equilibrio uno en ausencia de la enfermedad P_0 y el otro en coexistencia con la enfermedad P_1 , $0 \leq P < 1$.

Los estados estacionarios se obtienen igualando las derivadas a cero y resolviendo las ecuaciones resultantes. Los puntos de equilibrio $(\widehat{s}_a, \widehat{t}_a, \widehat{t}_v, \widehat{n}_a)$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\widehat{s}_a = \frac{\mu_a - (\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)\widehat{t}_a}{\mu_a}$$

$$\widehat{n}_a = \frac{\mu_a - \alpha_a\widehat{t}_a}{\mu_a} \quad (2.3)$$

$$\widehat{t}_v = \frac{\mu_a \cdot b \cdot \beta_v \widehat{t}_a}{(b \cdot \beta_v \cdot \mu_a - \alpha_a(1-P) \cdot \mu_v)\widehat{t}_a + (1-P) \cdot \mu_v \mu_a}$$

(Análisis del caso $p = 0$)

Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema (2.2). Se obtiene que las soluciones para $\hat{i}_a = 0$ son las raíces de la ecuación:

$$r(\hat{i}_a) = Ai_a^2 + Bi_a + C \quad (2.4)$$

Donde $A = [\mu_a b \beta_v - \alpha_a(1 - P)\mu_v] \frac{\alpha_a}{\mu_a}$,

$$B = 2\alpha_a(1 - P)\mu_v - \mu_a b \beta_v - (1 - P)\mu_v(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)R_0$$

$$C = (1 - P)\mu_a\mu_v(R_0 - 1),$$

$$\text{y } R_0 = \frac{mb^2\beta_a\beta_v}{(1-p)\mu_v(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)} \quad (2.5)$$

La solución $\hat{i}_a = 0$ da el punto de equilibrio libre de enfermedad P_0 cuyas coordenadas son: $\hat{s}_a = 1$ $\hat{n}_a = 1$ $\hat{i}_v = 0$ $\hat{i}_a = 0$ $P_0 = (1,0,0,1)$

Pero estamos buscando soluciones de equilibrio no triviales, dentro de Ω se puede ver de forma implícita en (2.3) que $\hat{i}_a \in \left(0; \frac{\mu_a}{\gamma_a + \mu_a + \alpha_a}\right)$

Evaluando las raíces $r(i_a)$ en los puntos extremos del intervalo se tiene:

$$r(0) = (1 - P)\mu_a\mu_v(R_0 - 1)$$

$$r\left(\frac{\mu_a}{\gamma_a + \mu_a + \alpha_a}\right) = -\frac{\mu_a^2 b \beta_v (\gamma_a + \mu_a)}{(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)^2} - \frac{(1 - P)\mu_a\mu_v(\gamma_a + \mu_a)^2}{(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)} < 0$$

- Si $R_0 = 1$

$\hat{i}_a = 0$ es una raíz de $r(\hat{i}_a)$ y la otra raíz queda fuera del intervalo.

- Si $R_0 < 1$

El valor del polinomio $r(\hat{i}_a)$ es negativo en los extremos finales del intervalo y analizando las posibilidades de tener al menos una raíz no son compatibles, no hay raíces en el intervalo.

- Si $R_0 > 1$

$r(0) > 0$ por lo tanto existe una raíz única en el intervalo. Lo que implica la existencia de un único punto de equilibrio $P_1 = (\hat{s}_a, \hat{i}_a, \hat{i}_v, \hat{n}_a)$ en el intervalo Ω .

Por lo tanto, queda probado **que para $R_0 \leq 1$ P_0 (estado de equilibrio en ausencia de la enfermedad) es el único punto de equilibrio en Ω , y en el caso de $R_0 > 1$, P_1 (estado de equilibrio endémico) también se encuentra en Ω .**

Ahora, se procede a analizar el caso $p = 1$. Los puntos de equilibrio de (2.2) son P_0 y la solución de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \widehat{s}_a &= \frac{\mu_a - (\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)\widehat{i}_a}{\mu_a} \\ \widehat{n}_a &= \frac{\mu_a - \alpha_a\widehat{i}_a}{\mu_a} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\widehat{i}_v = 1 \quad (2.7)$$

Donde \widehat{i}_a es una raíz del polinomio:

$$q(i_a) = \alpha_a(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)i_a^2 - (b\beta_a m + \mu_a)(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)i_a + b\beta_a m\mu_a \quad (2.8)$$

en el intervalo $\left(0; \frac{\mu_a}{\gamma_a + \mu_a + \alpha_a}\right)$.

Evaluando $q(i_a)$ en los puntos finales, obtenemos:

$$q(0) = b\beta_a m\mu_a > 0$$

$$q\left(\frac{\mu_a}{\gamma_a + \mu_a + \alpha_a}\right) = -\frac{\mu_a^2(\gamma_a + \mu_a)}{(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)} < 0$$

Entonces (2.8) siempre tiene una raíz única \widehat{i}_a en $\left(0; \frac{\mu_a}{\gamma_a + \mu_a + \alpha_a}\right)$.

Por lo tanto, P_1 (estado de equilibrio endémico) se encuentra en Ω independientemente de los valores del parámetro R_0 . Aunque en este caso R_0 no esté definido igual existen dos puntos de equilibrio.

2.3. Análisis De La Estabilidad

En esta sección se estudia la estabilidad de los estados estacionarios del sistema (2.2).

Linealizando alrededor del equilibrio libre de enfermedad P_0 , se obtiene la matriz:

$$D_F(P_0) = \begin{pmatrix} -\mu_a & 0 & -b\beta_a m & 0 \\ 0 & -(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a) & b\beta_a m & 0 \\ 0 & b\beta_v & -(1-P)\mu_v & 0 \\ 0 & -\alpha_a & 0 & -\mu_a \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

D_F denota la derivada del campo vectorial de la ecuación (2.2).

Los valores propios de (2.9) son $-\mu_a$ y las raíces del polinomio son:

$$\lambda^2 + (\gamma_a + \mu_a + \alpha_a + (1-P)\mu_v)\lambda + (\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)(1-P)\mu_v(1-R_0)$$

Las raíces de un polinomio de grado dos tienen parte real negativa si y solo si sus coeficientes son positivos.

En este caso, ambos coeficientes son positivos si y solo si $R_0 < 1$. Por lo tanto:

El equilibrio libre de enfermedad P_0 es localmente asintótico y estable para $R_0 < 1$, e inestable para $R_0 > 1$.

Cuando $\alpha_a = 0$ y $R_0 \leq 1$ se demuestra la estabilidad global de P_0 . En este caso $n_a(t) \rightarrow 1$ y el sistema (2.2) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{ds_a}{dt} &= \mu_a - b\beta_a m i_v s_a - \mu_a s_a \\ \frac{di_a}{dt} &= b\beta_a m i_v s_a - (\gamma_a + \mu_a) i_a \\ \frac{di_v}{dt} &= b\beta_v i_a (1 - i_v) - (1-P)\mu_v i_v \end{aligned} \quad (2.10)$$

Se define la función de Lyapunov en Ω

$$L = i_a + \frac{b\beta_a}{(1-P)\mu_v} i_v \quad (2.11)$$

La derivada orbital está dada por:

$$\dot{L} = -mb\beta_a(1-s_a)i_v - (\gamma_a + \mu_a)(1 - R_0(1 - i_v))i_a \quad (2.12)$$

que es menor o igual a cero para $R_0 \leq 1$. El subconjunto invariante máximo contenidos en $\dot{L} = 0$ consiste en el eje s_a . En este conjunto el sistema (2.2) se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{ds_a}{dt} &= \mu_a - \mu_a s_a \\ \frac{di_a}{dt} &= 0 \\ \frac{di_v}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones vemos que $s_a(t) \rightarrow 1$, $i_a(t) = 0$, $i_v(t) = 0$ para $t \geq 0$.

Por lo tanto del teorema de La Salle-Lyapunov se deduce que:

P_0 es a nivel local estable y todas las trayectorias de Ω se aproximan a P_0 para $R_0 \leq 1$.

Queda demostrado la estabilidad global asintótica de P_0 para $R_0 \leq 1$ y $\alpha_a = 0$.

Cuando $R_0 > 1$, P_0 se convierte en un punto de equilibrio inestable, y el equilibrio endémico P_1 emerge de Ω .

La estabilidad local de P_1 se rige por la matriz:

$$D_F(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{mb\beta_a \hat{i}_v}{\hat{n}_a} - \mu_a & 0 & -\frac{mb\beta_a \hat{s}_a}{\hat{n}_a} & \frac{mb\beta_a \hat{i}_v \hat{s}_a}{\hat{n}_a^2} \\ \frac{mb\beta_a \hat{i}_v}{\hat{n}_a} & -(\gamma_a + \mu_a + \alpha_a) & \frac{mb\beta_a \hat{s}_a}{\hat{n}_a} & -\frac{mb\beta_a \hat{i}_v \hat{s}_a}{\hat{n}_a^2} \\ 0 & \frac{b\beta_v(1 - \hat{i}_v)}{\hat{n}_a} & -\frac{b\beta_v \hat{i}_a}{\hat{n}_a} - (1 - p)\mu_v & -\frac{b\beta_v \hat{i}_a(1 - \hat{i}_v)}{\hat{n}_a^2} \\ 0 & -\alpha_a & 0 & -\mu_a \end{pmatrix}$$

A partir de las ecuaciones del sistema (2.2) en equilibrio se obtiene las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} \frac{mb\beta_a \hat{i}_v}{\hat{n}_a} + \mu_a &= \frac{\mu_a}{\hat{s}_a} \\ \gamma_a + \mu_a + \alpha_a &= \frac{mb\beta_a \hat{i}_v \hat{s}_a}{\hat{i}_a \hat{n}_a} \\ \frac{b\beta_v \hat{i}_a}{\hat{n}_a} + (1 - p)\mu_v &= \frac{b\beta_v \hat{i}_a}{\hat{i}_v \hat{n}_a} \\ \mu_a &= \mu_a \hat{n}_a + \alpha_a \hat{i}_a \end{aligned} \quad (2.13)$$

Entonces la matriz anterior se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} -\frac{\mu_a}{\hat{s}_a} & 0 & -\frac{mb\beta_a \hat{s}_a}{\hat{n}_a} & \frac{mb\beta_a \hat{i}_v \hat{s}_a}{\hat{n}_a^2} \\ \frac{mb\beta_a \hat{i}_v}{\hat{n}_a} & -\frac{mb\beta_a \hat{i}_v \hat{s}_a}{\hat{i}_a \hat{n}_a} & \frac{mb\beta_a \hat{s}_a}{\hat{n}_a} & -\frac{mb\beta_a \hat{i}_v \hat{s}_a}{\hat{n}_a^2} \\ 0 & \frac{b\beta_v(1 - \hat{i}_v)}{\hat{n}_a} & -\frac{b\beta_v \hat{i}_a N_v}{\hat{i}_v \hat{n}_a} & -\frac{b\beta_v \hat{i}_a(1 - \hat{i}_v)}{\hat{n}_a^2} \\ 0 & -\alpha_a & 0 & -\mu_a \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son $-\mu_a$ y las raíces de la ecuación:

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (2.14)$$

donde

$$P = \frac{\mu_a}{\widehat{s}_a} + \frac{mb\beta_a\widehat{t}_v\widehat{s}_a}{\widehat{i}_a\widehat{n}_a} + \frac{b\beta_v\widehat{i}_a}{\widehat{t}_v\widehat{n}_a}$$

$$Q = \frac{\mu_a b\beta_v\widehat{i}_a}{\widehat{s}_a\widehat{t}_v\widehat{n}_a} + \frac{mb^2\beta_a\beta_v\widehat{s}_a\widehat{t}_v}{\widehat{n}_a^2} + \frac{mb\beta_a\widehat{i}_v(\mu_a\widehat{n}_a - \alpha_a\widehat{i}_a\widehat{s}_a)}{\widehat{i}_a\widehat{n}_a^2}$$

$$R = \frac{\mu_a mb^2\beta_a\beta_v((\widehat{n}_a - \widehat{s}_a) + \widehat{s}_a\widehat{t}_v)}{\widehat{n}_a^3} - \frac{\alpha_a mb^2\beta_a\beta_v\widehat{s}_a\widehat{t}_v}{\widehat{n}_a^3}$$

Por el criterio de Routh-Hurwitz, se deduce que todos los valores propios de la ecuación (2.14) tienen parte real negativa si y sólo si $P > 0$, $Q > 0$ y $PQ > R$.

Es claro que $P > 0$.

De las desigualdades $\widehat{s}_a < \widehat{n}_a$ y $\alpha_a\widehat{i}_a < \mu_a$ se obtiene $Q > 0$.

Usando la relación $\widehat{n}_a - \widehat{s}_a = \widehat{i}_a + \widehat{r}_a = \frac{(\gamma_a + \mu_a)}{\mu_a}\widehat{i}_a$, R se convierte en

$$R = \frac{mb^2\beta_a\beta_v\widehat{i}_a((\gamma_a + \mu_a) - \alpha_a\widehat{s}_a)}{\widehat{n}_a^3} + \frac{\mu_a mb^2\beta_a\beta_v\widehat{s}_a\widehat{t}_v}{\widehat{n}_a^3}$$

Siendo $\widehat{s}_a < 1$ y $\alpha_a \leq \gamma_a + \mu_a$ entonces $R > 0$. Finalmente la desigualdad $PQ > R$.

Por lo tanto, queda demostrado que **P_1 es localmente asintótico y estable.**

Ahora, se analiza la estabilidad de los equilibrios en el caso $P = 1$.

Los valores propios del Jacobiano alrededor del punto de equilibrio sin enfermedad P_0 son $-\mu_a$ y las raíces del polinomio $\lambda^2 + (\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)\lambda - mb^2\beta_a\beta_v$

Siendo que el último coeficiente de esta ecuación es negativo, entonces:

P_0 es siempre inestable.

Por otra parte, para el equilibrio endémico P_1 , los valores propios son $-\mu_a$, $-\frac{b\beta_v\widehat{i}_a}{\widehat{n}_a}$ además de las raíces del polinomio.

$$\lambda^2 + \left(\frac{mb\beta_a}{\widehat{n}_a} + \gamma_a + 2\mu_a + \alpha_a\right)\lambda + (\gamma_a + \mu_a + \alpha_a)\left(\frac{mb\beta_a}{\widehat{n}_a} + \mu_a\right) + \alpha_a\frac{mb\beta_a\widehat{s}_a}{\widehat{n}_a^2}$$

Que tienen parte real negativa ya que los coeficientes son positivos. Por lo tanto,

P_1 es localmente asintóticamente estable.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente teorema:

Si $0 \leq p < 1$, entonces el equilibrio libre de enfermedad a nivel local es P_0 asintóticamente estable para $R_0 < 1$. Cuando $R_0 > 1$, P_0 se vuelve inestable, y el equilibrio endémico P_1 a nivel local es asintóticamente estable. Si $p = 1$, P_0 es siempre inestable, y P_1 es localmente asintóticamente estable.

CONCLUSIÓN

La matemática en epidemiología y en general en las ciencias biológicas constituye, además de una herramienta, una forma de pensar y estructurar predicciones, descripciones y explicaciones de procesos. Por ello, tanto en epidemiología como en otras áreas del conocimiento biológico, la matemática es utilizada para modelar.

El lenguaje matemático proporciona un medio que, libre de ambigüedades y exigente de definiciones precisas, permite aclarar y especificar mecanismos, funcionamientos y relaciones causales entre sus componentes, que determinan o se supone que determinan, la evolución de un fenómeno dado.

Los modelos matemáticos, no son construcciones abstractas aisladas ni pueden ser un fin en sí mismos. Existe siempre un marco teórico del cual cada modelo en particular se justifica puesto que las hipótesis con las que es elaborado provienen de éste y no de la imaginación de quién lo construye.

Finalmente es importante volver a resaltar que un modelo está en verdad definido por las relaciones que incorpora, estas relaciones son independientes de los datos a introducir en el modelo, ya que un modelo puede usarse para diferentes ocasiones y en distintos contextos. Esta modelización desarrollada para la infección del Virus del Nilo Occidental se puede utilizar para estudiar la dinámica para la enfermedad del Dengue entre otras epidemias.

REFERENCIAS Y ANEXOS:

[1] Comité Internacional de la Salud. “Guía para la vigilancia, prevención y control del Virus del Oeste del Nilo”. Agosto 2003.

[2] Instituto de Salud Pública. Gobierno de Chile. “Vigilancia y diagnóstico Virus del Nilo Occidental (West Nile)”. Circular, vigilancia y formulario. www.ispch.cl/vigilancia-y-diagnostico-virus-del-nilo-occidental-west-nile

[3] **Teorema indirecto de Lyapunov**

Teoremas y conceptos previos para la demostración del teorema

Teorema 3.1 (Lyapunov). Sea el origen $x = 0$ un PE de $\dot{x} = f(x)$ y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen. Sea $V(x):D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable tal que

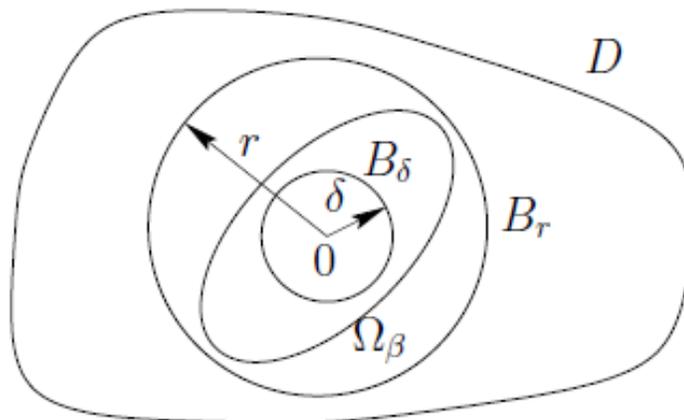
$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \quad en \quad D - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad en \quad D$$

Entonces $x = 0$ es estable. Más aún,

$$\dot{V}(x) < 0 \quad en \quad D - \{0\}$$

Entonces $x = 0$ es AE.



Representación geométrica de los conjuntos en la prueba del **Teorema 3.1**

Sistemas Lineales y Linealización

El sistema lineal invariante

$$\dot{x} = Ax \quad (3.2)$$

tiene un equilibrio en el origen, que es aislado sí $\det A \neq 0$.

Si $\det A = 0$, todo punto en el kernel o subespacio nulo de A es un PE . Un sistema lineal no puede tener múltiples PE aislados, porque si \bar{x} y \bar{z} son dos PE de $\dot{x} = Ax$, entonces, por linealidad, todo punto en la recta que conecta a \bar{x} y \bar{z} es un PE . Las propiedades de estabilidad del origen pueden caracterizarse mediante la ubicación de los autovalores de A .

Teorema 3.2 (Estabilidad del Origen en Sistemas Lineales). El PE $x = 0$ de (3.2) es estable sí todos los autovalores de A tienen parte real no positiva y cada autovalor con parte real nula tiene un bloque de Jordan asociado de orden 1. El PE $x = 0$ es Globalmente asintóticamente estable (GAE) sí todos los autovalores de A tienen parte real negativa. Cuando todos los autovalores de A tienen parte real negativa, se dice que A es una matriz de estabilidad o matriz Hurwitz. La estabilidad del origen puede también investigarse usando el método de Lyapunov. Consideremos la candidata a función de Lyapunov.

$$V(x) = x^T P x$$

donde P es una matriz real simétrica definida positiva. La derivada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema está dada por:

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x$$

donde Q es una matriz simétrica definida por:

$$PA + A^T P = -Q \quad (3.3)$$

Si Q es definida positiva, podemos concluir por el **Teorema 3.1** que el origen es AE . En el caso de sistemas lineales, es posible revertir los pasos del método de Lyapunov. Supongamos que comenzamos eligiendo Q como una matriz real simétrica definida positiva, y resolvemos (3.3) para encontrar P . Si (3.3) tiene una solución definida positiva, podemos nuevamente concluir que el origen es AE . La ecuación (3.3) se denomina ecuación de Lyapunov.

Teorema 3.3. Una matriz A es Hurwitz, o sea, todos sus autovalores tienen parte real negativa, sí dada una matriz Q simétrica y definida positiva, existe una matriz P simétrica y definida positiva que satisface la ecuación de Lyapunov (3.3). Más aún, si A es Hurwitz, entonces P es la única solución de (3.3).

Teorema 3.4 (Chetaev). Sea $x = 0$ un PE de $\dot{x} = f(x)$. Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $V(0) = 0$ y $V(x_0) > 0$ para algún x_0 con $\|x_0\|$ arbitrariamente pequeña. Definamos el conjunto $U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\}$ y supongamos que $\dot{V}(x) > 0$ en U . Entonces $x = 0$ es inestable.

Teorema (Método Indirecto de Lyapunov): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por $\dot{x} = f(x)$ donde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, es continuamente diferenciable y D es un entorno del origen. Sea la matriz Jacobiana.

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \text{ continua sobre } D$$

Entonces, notando con λ_i a los autovalores de $A = (i = 1, \dots, n)$

- El origen es asintóticamente estable si $\Re\{\lambda\} < 0$, para todo λ_i
- El origen es inestable si $\Re\{\lambda\} > 0$ para uno o más autovalores de A

Demostración:

Para probar la primera parte, asumamos que A es Hurwitz. Por el **Teorema 3.3** sabemos que cualquier $Q > 0$ simétrica, la solución P de (3.3) es definida positiva.

Usamos $V(x) = x^T P x$ como candidata a función de Lyapunov para el sistema no lineal. La derivada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema está dada por:

$$\dot{V}(x) = x^T P f(x) + [f(x)]^T P x$$

$$\dot{V}(x) = x^T P [Ax + g(x)] + [x^T A^T + g^T(x)] P x$$

$$\dot{V}(x) = x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P g(x)$$

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x + 2x^T P g(x)$$

El primer término en el lado derecho es definido negativo, mientras que el segundo es, en general, indefinido. La función $g(x)$ satisface

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|x\|_2 \rightarrow 0$$

Por lo tanto, dado $\gamma > 0$ existe $r > 0$ tal que $\|g(x)\|_2 < \gamma\|x\|_2$, $\forall \|x\|_2 < r$ pero $x^T Qx \geq \lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2$

Notar que $\lambda_{\min}(Q)$ es real y positivo porque Q es simétrica y definida positiva.

Por lo tanto $\dot{V}(x) < -[\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma\|P\|_2\|x\|_2^2]$, $\forall \|x\|_2 < r$.

Eligiendo $\gamma < \lambda_{\min}(Q)/(2\|P\|_2)$ queda asegurado que $\dot{V}(x)$ es negativa definida. Por el **Teorema 3.1**, el origen es asintóticamente estable.

Para probar la segunda parte, consideremos primero el caso en que A no tiene autovalores en el eje imaginario, es decir A tiene un grupo de autovalores en el semiplano derecho abierto y otro grupo en el semiplano izquierdo abierto. Entonces existe una matriz no singular T tal que:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

donde A_1 y A_2 son matrices Hurwitz. Sea

$$z = Tx = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

donde la partición de z es compatible con las dimensiones de A_1 y A_2 . El cambio de variables $z = Tx$ transforma el sistema original

$$\dot{x} = f(x) = Ax + g(x)$$

a la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -A_1 z_1 + g_1(z) \\ \dot{z}_2 &= -A_2 z_2 + g_2(z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde las funciones $g_i(z)$ tienen la propiedad de que para todo $\gamma > 0$ existe $r > 0$ tal que:

$$\|g_i(z)\|_2 < \gamma\|z\|_2; \quad \forall \|z\|_2 < r, i = 1, 2 \quad (3.5)$$

El origen $z = 0$ es un *PE* para el sistema en las coordenadas z . Notemos que toda propiedad de estabilidad de $z = 0$ se aplica directamente al *PE* $x = 0$ en las coordenadas originales ya que T es no singular. Para mostrar que el origen es inestable, vamos a usar el **Teorema 3.4**. La función $V(z)$ del teorema se va a construir con vectores. Sean Q_1 y Q_2

matrices simétricas, definidas positivas, con las mismas dimensiones que A_1 y A_2 , respectivamente. Como A_1 y A_2 son Hurwitz, sabemos por el **Teorema 3.3** que las ecuaciones de Lyapunov

$$P_i A_i + A_i^T P_i^T = -Q_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.6)$$

tienen soluciones únicas definidas positivas P_1 y P_2 . Sea

$$V(z) = z_1^T P_1 z_1 - z_2^T P_2 z_2 = z^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} z$$

En el subespacio $z_2 = 0$, $V(z) > 0$ en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Sea

$$U = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\|_2 \leq r \quad \text{y} \quad V(z) > 0\}$$

En U , usando (3.4), (3.5), (3.6), tenemos:

$$\dot{V} = -z_1^T (P_1 A_1 + A_1^T P_1) z_1 + 2z_1^T P_1 g_1(z) - z_2^T (P_2 A_2 + A_2^T P_2) z_2 - 2z_2^T P_2 g_2(z)$$

$$\dot{V} = -z_1^T Q_1 z_1 + z_2^T Q_2 z_2 + 2z^T \begin{bmatrix} P_1 g_1(z) \\ P_2 g_2(z) \end{bmatrix}$$

$$\dot{V} \geq \lambda_{\min}(Q_1) \|z_1\|_2^2 + \lambda_{\min}(Q_2) \|z_2\|_2^2 - 2\|z\|_2 + \sqrt{\|P_1\|_2^2 \|g_1(z)\|_2^2 + \|P_2\|_2^2 \|g_2(z)\|_2^2}$$

$$\dot{V} > (\alpha - 2\sqrt{2}\beta\gamma) \|z\|_2^2$$

donde $\alpha = \min\{\lambda_{\min}(Q_1), \lambda_{\min}(Q_2)\}$ y $\beta = \max\{\|P_1\|_2, \|P_2\|_2\}$. Eligiendo $\gamma < \alpha 2\sqrt{2}\beta$ nos aseguramos que $\dot{V} > 0$ en U . Por lo tanto, el origen es inestable por **Teorema 3.4**.

Notar que definiendo las matrices

$$P = T^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} T, \quad P = Q^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & -Q_2 \end{bmatrix} T$$

Que satisfacen la ecuación:

$$PA + A^T P = Q > 0$$

se puede probar el resultado aplicando el **Teorema 3.4** en las coordenadas originales, usando el hecho de que la función $V(x) = x^T P x$ es positiva en puntos arbitrariamente cercanos al origen.

Supongamos ahora que A tiene además autovalores sobre el eje imaginario. El truco para tratar este caso es trasladar el eje imaginario. Supongamos que todos los autovalores de A en el semiplano derecho abierto tienen parte real mayor que $\delta > 0$. Entonces la matriz $A - (\delta/2)I$ tiene el mismo número que A de autovalores en el semiplano derecho abierto, y ningún autovalor sobre el eje imaginario. Usando argumentos similares a los utilizados recién podemos calcular matrices $P = P^T$ y $Q = Q^T > 0$ tales que

$$P[A - (\delta/2)I] + [A - (\delta/2)I]^T P = Q$$

y además $V(x) = x^T P x$ es positiva en puntos arbitrariamente cercanos al origen. La derivada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema satisface

$$\dot{V}(x) = x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P g(x)$$

$$\dot{V}(x) = x^T [P[A - (\delta/2)I] + [A - (\delta/2)I]^T P]x + \delta x^T P x + 2x^T P g(x)$$

$$\dot{V}(x) = x^T Q x + \delta V(x) + 2x^T P g(x)$$

En el conjunto $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq r \text{ y } V(x) > 0\}$

Donde r se elige tal que $\|g(x)\|_2 < \gamma \|x\|_2, \forall \|x\|_2 \leq r, \dot{V}(x)$ satisface

$$\dot{V}(x) \geq \lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2 - 2\|P\|_2 \|x\|_2 \|g(x)\|_2 \geq (\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma \|P\|_2) \|x\|_2^2$$

que es positiva para $\gamma < \lambda_{\min}(Q) / (2\|P\|_2)$. Aplicando el teorema 3.3, concluimos que el origen es inestable

[4] **Teorema de Hartman-Grobman:** Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por $\dot{x} = f(x)$ donde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, es continuamente diferenciable y D es un entorno del origen. Sea la matriz Jacobiana

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \text{ continua sobre } D$$

entonces, si A no tiene autovalores nulos o imaginarios con parte real nula, existe un homeomorfismo h , es decir una función que tiene inversa y ambas continuas definida en un entorno abierto U del origen, tal que para cada $x_0 \in U$, hay un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero de modo que para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$:

$$h(\phi(t, t_0, x_0)) = e^{A(t-t_0)} h(x_0)$$

donde $\phi(t, t_0, x_0)$ representa la solución de $\dot{x} = f(x)$ dada a partir de la condición inicial $x(0) = x_0$ a partir del instante inicial $t = t_0$.

Es decir, que h transforma las trayectorias del sistema no lineal en las del sistema linealizado, preservando la parametrización, o sea el sentido en el que se recorren.

Observaciones: El Teorema de Hartman-Grobman afirma que es posible “deformar de manera continua todas las trayectorias del sistema no lineal, alrededor del equilibrio aislado, en las trayectorias del sistema linealizado, vía el homeomorfismo h . Sin embargo, el teorema indica que el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal alrededor de un equilibrio aislado es similar al del sistema linealizado.

[5] **Teorema Método directo de Lyapunov:** Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$ y sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, entonces:

Si $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa, el origen es un punto de equilibrio estable.

Si $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es definida negativa, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Para la primera parte se demuestra que si para el sistema $\dot{x} = f(x)$, en una región D conteniendo al origen existe una función de Lyapunov $V: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la posición de equilibrio $x = 0$ es estable en el sentido de Lyapunov.

Demostración:

Supongamos que existe una función de Lyapunov para el sistema no lineal en el origen de coordenadas. Por ser D una región abierta, existe una bola de radio R con centro en el origen $B_R(0) \subset D$. Mostraremos que existe una bola de radio r , $B_r(0)$ totalmente contenida en $B_R(0)$, que satisfaga que para cualquier $x_0 \in B_r(0)$, la solución $x(t, x_0)$ no abandona $B_R(0)$. Consideremos $V_m = \min V(x)$ y tomemos $r > 0$ tal que

$$x \in frB_R(0)$$

$$B_r(0) \subset V^{-1}(-V_m, V_m) \cap B_R(0)$$

Si $x_0 \in B_r(0)$, tomamos la solución $x(t, x_0)$, entonces como V no crece sobre las trayectorias del sistema, se tiene $V(x(t, x_0)) \leq V(x_0)$, es decir, $V(x(t, x_0)) \leq V_m$.

Entonces dicha solución para $t > 0$, no sale de la bola $B_R(0)$ ya que para hacerlo tendría que cruzar la frontera $frB_R(0)$, pero donde la cruce tendríamos $V(x(t, x_0)) \geq V_m$, lo cual no es posible. Por lo tanto el origen es estable.

Para la segunda parte, como se cumplen las condiciones del teorema de estabilidad, entonces el origen es estable.

Sea $\bar{x}(t)$ la solución de $\dot{x} = f(x)$ tal que en $t = t_0$ vale x_0 , entonces $V(\bar{x}(t)) < c_0 = V(x_0)$ para todo $t > t_0$, ya que V es decreciente a lo largo de las trayectorias. Luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\bar{x}(t)) = 0$$

Pero como V es continua, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\bar{x}(t)) = V(\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t)) = 0$, por lo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = 0$. Por lo tanto el origen es asintóticamente estable.

[6] Principio de invariancia de LaSalle

La enunciación y demostración del teorema requiere introducir los siguientes conceptos.

Sea $x(t)$ una solución del sistema $\dot{x} = f(x)$ (6.1)

Un punto p es un punto límite positivo de $x(t)$ si existe una secuencia $\{t_n\}$, con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $x(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$.

El conjunto de todos los puntos límites positivos $x(t)$ se denomina *el conjunto positivo de $x(t)$* .

Un conjunto M es un conjunto invariante con respecto a (6.1) si:

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \in \mathbb{R}$$

Un conjunto M es un conjunto invariante positivo si: $x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq 0$

Decimos que $x(t)$ tiende a M cuando t tiende a infinito si para cada $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $dist(x(t), M) < \varepsilon, \forall t > T$ donde $dist(p, M)$ denota la distancia de un punto p a un conjunto M , es decir, $dist(p, M) = \inf_{x \in M} \|p - x\|$.

Un *punto de equilibrio asintóticamente estable* es el conjunto límite positivo de toda solución que comience suficientemente cerca del punto de equilibrio. Un ciclo límite estable es conjunto límite positivo de toda solución que comience suficientemente cerca

del ciclo límite. La solución tiende al ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$ pero no necesariamente a algún punto específico del ciclo límite, es decir el $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ no necesariamente existe. El punto de equilibrio y el ciclo límite son conjuntos invariantes porque toda solución que comience sobre ellos se queda allí para todo $t \in \mathbb{R}$. El conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq c\}$ con $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_c$ es un conjunto invariante positivo.

Lema 5.1: Si una solución $x(t)$ de (6.1) es acotada y permanece en D para todo $t \geq 0$, entonces su conjunto límite positivo L^+ es un conjunto invariante no vacío y compacto. Además $x(t) \rightarrow L^+$ cuando $t \rightarrow \infty$

Teorema (LaSalle). Sea $\Omega \subset D$ un conjunto compacto que es invariante positivo con respecto a (1). Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos de Ω donde $\dot{V}(x) = 0$. Sea M el mayor conjunto invariante en E . Entonces toda solución que comienza en Ω tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración:

Sea $x(t)$ una solución de (6.1) que comienza en Ω . Como $\dot{V}(x) \leq 0$ es una función decreciente en Ω , $V(x(t))$ es una función decreciente de t . Como $V(x)$ es continua en el conjunto compacto Ω , está acotada inferiormente en Ω , por lo tanto $V(x(t))$ tiene un límite cuando $t \rightarrow \infty$.

Notemos también que el conjunto límite positivo L^+ está en Ω porque Ω es un conjunto cerrado. Para cada $p \in L^+$, existe una secuencia t_n tal que $t_n \rightarrow \infty$ y $x(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por continuidad de $V(x)$, $V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a$, lo que implica $V(x) = a$ en L^+ . Como L^+ es un conjunto invariante por el **Lema 5.1**, $\dot{V}(x) = 0$ en L^+ . Por lo tanto, $L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$

Como $x(t)$ es acotada, $x(t)$ tiende a L^+ cuando $t \rightarrow \infty$ por el **Lema 5.1**. Por lo tanto $x(t)$ tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario: Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (6.1). Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida positiva continuamente diferenciable sobre el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen $x = 0$, y además $\dot{V}(x) \leq 0$ en D . Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0\}$. Si ninguna trayectoria solución de (6.1) que entra en la región S permanece allí indefinidamente salvo la solución trivial, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

BIBLIOGRAFÍA:

- 1- Gustavo Cruz-Pacheco IIMAS, UNAM MÉXICO, D.F 04510. "Modelling the dynamics of West Nile Virus" En: Lourdes Esteve, Departamento de matemáticas. Facultad de Ciencias UNAM; Juan Antonio Montaña, Facultad de Medicina Veterinaria y zootecnia, UNAM; Cristobal Vargas, Departamento de Control Automático, CINVESTAN-IPN, A.P.14-740.
- 2- María Marta Seran, Julio H. Braslavsky, "Sistemas no lineales, notas de clase". Basado en Khalil; H. Nonlinear Systems. Segunda edición. Prentice Hall. 1996.
- 3- Rodolfo Izaguirre Rodríguez; Luis Ernesto López González; Juan Antonio Richard Charlot. "Revista de Especialidades Médico- Quirúrgicas". Instituto de Seguridad de servicios sociales para los trabajadores del Estado" mayo-agosto, vol 8, número 002. México 2003.
- 4- Organización Panamericana de Salud. Oficina Regional de la Organización Mundial de la Salud. "Orientaciones para la vigilancia, prevención y control del Virus del Nilo Occidental" OPS/HCP/HCT/221/2002. Original en Inglés. (13 Septiembre 2003)
- 5- Jorge X. Velasco Hernández. "Modelos matemáticos en epidemiología: enfoques y alcances" Programa de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Computación. Instituto Mexicano del Petróleo. México, D.F.
- 6- Aubin Arroyo y José Searde. "Sistemas dinámicos discretos". 29 Sep. de 2003.
- 7- Luis A. Mosquera y Milton H. Perea. "Modelo matemático para la enfermedad del Dengue". Boletín de Matemáticas. Nueva Serie, Volumen XIII. N°2 (2006), pp 176-185.
- 8- Osval Antonio Montesinos-López. Artículo de Revisión. "Modelos matemáticos para enfermedades infecciosas". Facultad de Telemática, Universidad de Colima, México. Salud pública de México. Vol.49, N°3, mayo-junio de 2007.