Universidad Nacional de La Matanza
Escuela de Formación Continua
Licenciatura en Matemática Aplicada

Tesis de Licenciatura

“Teorema de Sarkovskii”

Autor: Prof. Paula Soledad Núñez
Director: Lic. Miguel Calzón

Diciembre 2010

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

Introducción

El Teorema de Sarkovskii es un extraordinario hallazgo matemático tanto por su aplicación como por su simplicidad ya que es para funciones continuas de una sola variable. Fue publicado en el año 1.964 por el matemático soviético Oleksandr Mikolaiovich Sarkovskii[1] en una revista ucraniana.

Lo genial del Teorema de Sarkovskii es que, a pesar de que las funciones continuas han sido extensamente estudiadas en los últimos 200 años por grandes matemáticos como Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716) y Euler (1707-1783), muestra que aún queda un amplio terreno por descubrir.

He llegado al Teorema de Sarkovskii mediante un artículo de la revista *American Mathematical Monthly* llamado "Period three implies Chaos" publicado en el año 1975 cuya traducción es "Período tres implica caos". En dicho artículo, sus autores Tien-Yien Li y James A. Yorke, matemáticos norteamericanos, anuncian que un nuevo teorema para funciones continuas de una sola variable fue descubierto.

El teorema establece que si una función continua tiene periodo tres, entonces debe tener período n para todo entero n.

La traducción de "period three" como "período tres" tiene un sentido diferente al habitual, aquí quiere decir que existe un punto x_0 tal que $f^3(x_0) = f\left(f\left(f(x_0)\right)\right) = x_0$ con $f^k(x_0) \neq x_0$ cuando k=1, 2.

[1] Matemático ucraniano nacido el 7 de diciembre de 1936. En 2006 se convirtió en miembro de la Academia Nacional de Ciencias de Ucrania.

En otra palabras, la imagen de x_0 vuelve a x_0 luego de tres iteraciones.

Poco después, se encontró que el teorema de Li y Yorke era sólo un caso particular del teorema de Sarkovskii, que había permanecido ignorado para la comunidad matemática durante más de 15 años y en el cual se da una respuesta completa a muchos interrogantes. Existen innumerables trabajos dedicados al resultado de Li y Yorke o resultados relacionados con éste, incluso el título del mismo "Período tres implica caos", se convirtió en una de las frases más usadas en los estudios del caos.

Sarkovskii reordenó los números naturales estableciendo el *orden de Sarkovskii* y probó que si $l \lhd m$ [2] y si una función tiene período l entonces debe tener período m. El número 3 es el menor número en el orden de Sarkovskii. Entonces, obviamente, el período tres implica a todos los otros períodos, y el teorema de Li y Yorke no era un teorema nuevo. Sin embargo, es en el artículo de Li y Yorke donde el nuevo concepto de caos aparece por primera vez en la Matemática.

Es sorprendente ver que incluso las iteraciones de una función continua muy simple de una sola variable pueden mostrar un comportamiento caótico extremadamente complicado.

La demostración original del teorema de Sarkovskii es bastante compleja. Aquí, se dará una demostración que está basada en el teorema del valor intermedio, accesible a los lectores con cierto conocimiento de análisis matemático para luego analizar algunas aplicaciones.

[2] $l \lhd m$ se lee l es menor que m con el orden de Sarkovskii.

CAPÍTULO 2

2.1 El Teorema del Valor Intermedio

Sin necesidad de poseer un conocimiento especial de matemática, uno puede entender los siguientes hechos comunes:

Es sencillo hallar el promedio de un conjunto de números dados, sólo debemos realizar el siguiente cálculo $y_{prom} = \frac{y_1+y_2+y_3+\ \dots+y_n}{n}$

¿Cómo calculamos la temperatura promedio durante un día si se puede tener numerosas lecturas de temperaturas?

Dos trenes que parten al mismo tiempo, uno desde New York hacia Chicago y el otro desde Chicago hacia New York, deben cruzarse en algún momento a lo largo de sus viajes.

Ahora, juguemos un poco sobre estos hechos comunes. ¿Es tan obvio esto?

Supongamos que Roberto comienza a escalar una montaña a las 8 a.m. y alcanza la cima a las 6 p.m. y entonces, al día siguiente, a la misma hora inicia su regreso yendo por el mismo camino. ¿Hay algún lugar de su camino de ida y vuelta por la montaña donde su reloj indique la misma hora?

La respuesta es sí. Podemos imaginar a dos Robertos al mismo tiempo, uno subiendo y otro bajando por la misma ruta. Si se ajustan sus relojes antes de comenzar, se mostrará exactamente el momento en que los dos Robertos se encuentran en su camino.

Esta idea puede ser expresada en Matemática como el siguiente teorema:

Teorema del Valor Intermedio:

Si f es una función continua en el cerrado $[a; b]$ y N es cualquier número entre f (a) y f (b) entonces existe al menos un x_0 entre a y b tal que f (x_0) = N

Demostración T.V.I.:

Supongamos una función $g(x) = f(x) - N$, con N una constante cualquiera.

-$f(x)$ es una función continua por la hipótesis del teorema,

- N es continua por ser función constante,

-la resta de funciones continuas da como resultado una función continua.

- g(x) es continua.

Evaluamos g en un punto a: $g(a) = f(a) - N$

La función en ese punto es negativa, ya que por hipótesis tenemos que N pertenece a $(f(a)\,; f(b))$ o sea que $N > f(a)$

Evaluamos g en un punto b: $g(b) = f(b) - N$

La función en ese punto es positiva, ya que por hipótesis tenemos que N pertenece a $(f(a)\,; f(b))$ o sea que $N < f(b)$

Como g es continua, $g(a) < 0$ y $g(b) > 0$, podemos aplicar el Teorema de Bolzano. Al aplicarlo, deducimos que existe un x_0 perteneciente a $(a\,; b)$ tal que $g(x_0) = 0$

Evaluamos g en ese punto x_0: $g(x_0) = f(x_0) - N$

Reemplazando y despejando, $0 = f(x_0) - N$

$$f(x_0) = N$$

Así queda probado el teorema.

Este es uno de los teoremas elementales del Cálculo Matemático. Aunque es muy simple, se sigue poniendo mucha atención sobre él e incluso, se lo utiliza como una pregunta de examen. Por ejemplo, la siguiente consigna se propone muy a menudo: Probar

Proposición 2.1:

Sea f una función continua en el cerrado $[a; b]$. Si el rango de f contiene a $[a; b]$ entonces la ecuación

$$f(x) = x$$

Tiene por lo menos una solución en $[a; b]$.

Demostración:

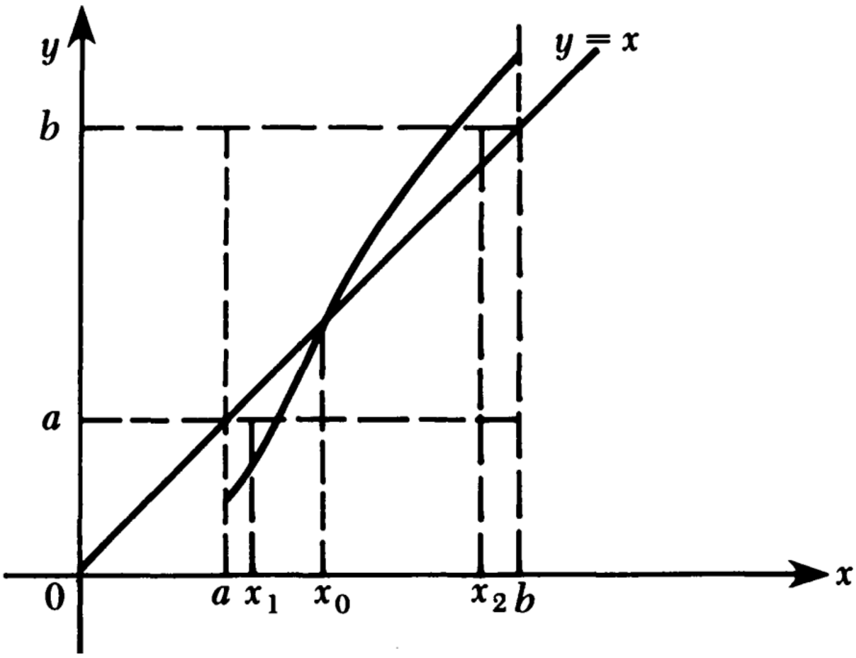
La solución es sencilla. Dado que el rango de f contiene $[a; b]$ debe haber algunos $x_1, \ x_2 \ \epsilon \ [a; b]$ tal que

$$f(x_1) \leq a \leq x_1 \qquad , \qquad f(x_2) \geq b \geq x_2$$

Sea $g(x) = f(x) - x$

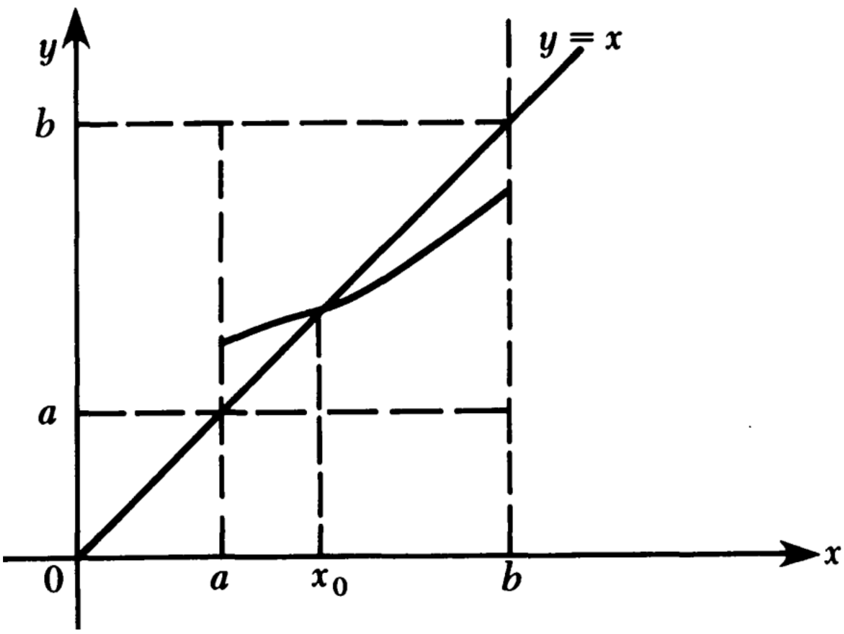
El siguiente resultado viene de la aplicación del Teorema del Valor Intermedio con $N = 0$.

Gráficamente,



Por cierto, si en la Proposición 2.1 el supuesto "el rango de f contiene" se sustituye por "el rango de f está contenido en $[a; b]$", ésta sigue siendo válida.

Gráficamente,



2.2 Puntos periódicos

Vamos a mostrar notaciones y a definir conceptos tales como punto fijo, punto periódico y órbita de una función que posteriormente serán necesarios.

Notación:

Se asume que el rango de f está contenido en el dominio de f. $R\{f\} \subset D\{f\}$

$$f^0(x) = x$$

$$f^1(x) = f(x)$$

$$f^2(x) = f[f(x)]$$

$$f^3(x) = f[f^2(x)]$$

.

.

.

$$f^n(x) = f[f^{n-1}(x)]$$

Definición 1: Punto fijo

Es un punto x_0 que satisface la ecuación

$$f^1(x_0) = f(x_0) = x_0$$

En términos gráficos, un punto fijo significa que el punto $(x; f(x))$ pertenece a la recta $y = x$; o en otras palabras, la gráfica de f tiene un punto en común con esa recta.

Una generalización natural de ese punto fijo es el punto periódico.

Definición 2: Punto periódico

Si x_0 satisface la ecuación

$$\begin{cases} f^n(x_0) = x_0 \\ f^k(x_0) \neq x_0 \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Entonces x_0 se denomina un punto n-periódico cuyo período es n.

Como vemos, un punto fijo es un punto 1-periódico.

Si f tiene un punto de n-periódico, se dice que f tiene período n.

Definición 3: Órbita periódica de f

Si x_0 es un punto n-periódico de f, entonces x_0, $f(x_0)$, … , $f^{n-1}(x_0)$ son distintos y el conjunto $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ se denomina una *órbita periódica de f.*

La existencia de un punto fijo de una función es generalmente clara por la mera inspección de su gráfico. Pero la existencia de un punto de n-periódico no es tan fácil de ver, incluso si n es un número entero pequeño.

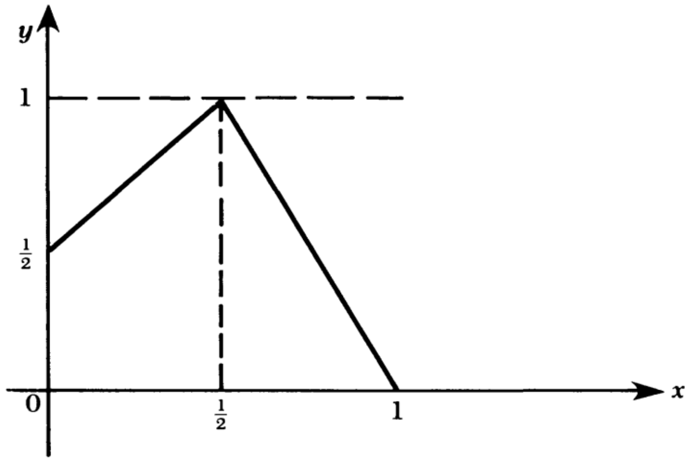
Veamos esto con un ejemplo:

Ejemplo:

Sea la función $\psi(x)$

$$\psi(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & , \quad o \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Cuya gráfica es



Como se puede calcular, tenemos:

$\psi^1(0) = \frac{1}{2} \longrightarrow \psi(0) = \frac{1}{2}$

$\psi^2(0) = \psi[\psi(0)] = \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \longrightarrow \psi^2(0) = 1$

$\psi^3(0) = \psi[\psi^2(0)] = \psi(1) = 0 \longrightarrow \psi^3(0) = 0$

$\psi^4(0) = \psi[\psi^3(0)] = \psi(0) = \frac{1}{2} \longrightarrow \psi^4(0) = \frac{1}{2}$

$\psi^5(0) = \psi[\psi^4(0)] = \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \longrightarrow \psi^5(0) = 1$

$\psi^6(0) = \psi[\psi^5(0)] = \psi(1) = 0 \longrightarrow \psi^6(0) = 0$

.

.

.

Así, la función ψ tiene un punto 3-periódico en cero.

Ahora pensemos lo siguiente: ¿La función ψ tiene un punto 5-periódico? ¿Y un punto 7-periódico? Es difícil saber esto sólo mirando el gráfico. Es necesario hacer un análisis más profundo.

Llegamos a la siguiente proposición que es una versión generalizada del Teorema del Valor Intermedio.

Proposición 2.2:

Sea f una función continua en el cerrado $[a;b]$ y sean $I_{0,}\, I_1, \dots, I_{n-1}$ subintervalos cerrados de $[a;b]$. Si

$f(I_k) \supset I_{k+1}$, $k = 0, 1, \;\dots\;, n-2$

$f(I_{n-1}) \supset I_0$

entonces, la ecuación

$$f^n(x) = x$$

tiene por lo menos una solución $x = x_0 \in I_0$ tal que

$$f^k(x_0) \in I_k \;, \qquad k = 0, 1, \dots\;, n-1$$

Notación:

-En esta proposición, $f(I_k) \supset I_{k+1}$ significa que el rango de f en I_k contiene a I_{k+1}. Este hecho le denotaremos así:

$$\left.\begin{matrix} I_i \longrightarrow I_j \\ I_j \longleftarrow I_i \end{matrix}\right\} \quad si \quad f(I_i) \supset I_j$$

I_j está contenido en $f(I_i)$. En otras palabras, $f(I_i)$ "cubre" I_j.

-Las condiciones $f(I_k) \supset I_{k+1}$, $k = 0, 1, \;\dots\;, n-2$ y $f(I_{n-1}) \supset I_0$ se pueden expresar de la siguiente manera:

$$I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \;\dots\; \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$$

Claramente, si n = 1 la proposición 2.2 se reduce a la proposición 2.1.

Demostración:

La prueba de la Proposición 2.2 se basa en el siguiente hecho:

Si $I_1 \longrightarrow I_2$ entonces existe un subintervalo $I_1^* \subset I_1$ tal que $f(I_1^*) = I_2$

Esto es cierto, pues si $I_2 = [c\,;d]$ existen x_1 y x_2 en I_1 tales que $f(x_1) = c$ y $f(x_2) = d$

Sea $I_1^* = [x_1\,;\,x_2]$ entonces y por el Teorema del Valor Intermedio $f(I_1^*) = I_2$

Este hecho implica que existen

$I_{n-1}^* \subset I_{n-1} \quad tal\ que \quad f(I_{n-1}^*) = I_0$

$I_{n-2}^* \subset I_{n-2} \quad tal\ que \quad f(I_{n-2}^*) = I_{n-1}^*$

.

.

.

$I_0^* \subset I_0 \quad tal\ que \quad f(I_0^*) = I_1^*$

En otras palabras, existe $I_k^* \subset I_k$ tal que

$f(I_k^*) \supset I_{k+1}^*$ $,k = 0, 1, \ \dots \ , \ n-2$ y $f(I_{n-1}^*) = I_0 \supset I_0^*$

De esto, tenemos que $f^*(I_0^*) = I_k^*$ $,para\ k = 0, 1, \ \dots \ , \ n-2$ y $f^n(I_0^*) \supset I_0^*$. Por lo tanto, por la proposición 2.1 tenemos que la ecuación $f^n(x) = x$ tiene una solución $x_0 \in I_0^* \subset I_0$ tal que $f^k(x_0) \in I_k$, $k = 0, 1, \dots \ , n-1$ se cumple.

<u>Nota</u>:

En geometría, $f^k(x_0) \in I_k$, $k = 0, 1, \dots \ , n-1$ significa que hay que asignar sucesivamente a f, x_0 dando $I_1, I_{2,\dots,} I_{n-1}$ para finalmente, volver donde comenzaba.

Definición 4: Orden tipo τ de período n

Un orden tipo τ de período n es una permutación cíclica τ del conjunto finito $\{1, \dots, n\}$.

Definición 5: Orden tipo τ de una órbita periódica

Una órbita periódica de $f: I \longrightarrow I$ tiene orden tipo τ si sus elementos, cuando son indexados en orden creciente como $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, satisfacen la condición $f: x_i \longrightarrow x_{\tau(i)}$, esto es, $f(x_i) = x_{\tau(i)}$.

Desde la definición, dos órbitas periódicas tienen el mismo tipo de orden si y sólo si existe una correspondencia entre ellas la cual conmuta con la función, la cual preserva el orden.

Notación:

$(1,\ i_2, \dots, i_n)$ es la permutación cíclica τ donde

$$\tau : 1 \longrightarrow i_2 \longrightarrow i_3 \longrightarrow \dots \longrightarrow i_n \longrightarrow 1$$

o equivalentemente

$$f: x_1 \longrightarrow x_{i_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i_n} \longrightarrow x_1$$

Aquí, $i_2 \dots i_n$ es una permutación arbitraria de $\{2, \dots, n\}$. Luego, el numero de períodos tipo n distintos es igual a $(n-1)!$.

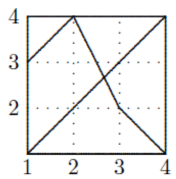
<u>Ejemplo</u>:

Para $n = 2$ existe sólo un orden tipo, el cual es $(1, 2)$.

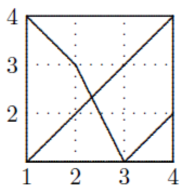
Para $n = 3$ existen dos orden tipo distintos, dados por $(1, 2, 3)$ y $(1, 3, 2)$

Para $n = 4$ existen seis orden tipo

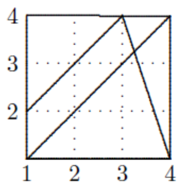
$\tau = (1, 3, 2, 4)$



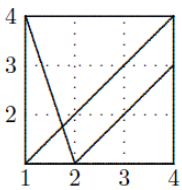
$\tau = (1, 4, 2, 3)$



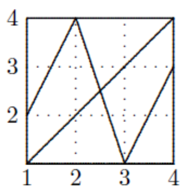
$\tau = (1, 2, 3, 4)$



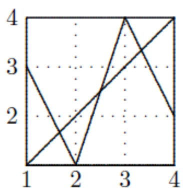
$\tau = (1, 4, 3, 2)$



$\tau = (1, 2, 4, 3)$



$\tau = (1, 3, 4, 2)$



Definición 6: Aplicación lineal por partes

Dado un orden tipo $\tau: \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$ asociamos a este una aplicación lineal por partes $L_\tau: [1,n] \longrightarrow [1,n]$ la cual aplica cada subintervalo $K_i = [i,\ i+1]$ afínmente [3] sobre el intervalo con extremos $\tau(i)$ y $\tau(i+1)$.

Para $n = 4$, los gráficos de las correspondientes aplicaciones L_τ están arriba.

Para analizar el orden tipo, se subdivide el intervalo $[1,n]$ en los subintervalos

$K_1 = [1,2]$

.

.

.

$K_{n-1} = [n-1,n]$.

[3] Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos de un espacio afín $(A;V)$. Se dice que S_2 *depende afínmente de S_1*, si $S_2 \subset L_A(S_1)$. Se comprueba de modo elemental: a) S_1 depende afínmente de S_1. b) Si $S_1 \subset S_2$, entonces S_1 depende afínmente de S_2. c) Si S_1 depende afínmente de S_2 y S_2 depende afínmente de S_3, entonces S_1 depende afínmente de S_3.

Proposición 2.3:

Sea $f: I \longrightarrow I$ una función continua y sea f una función con una órbita periódica de período n impar, pero la función f no tiene una órbita periódica de período $n-2$. Entonces el orden tipo de este período es igual a una de las siguientes dos permutaciones:

(i) $1 < m < m+1 < m-1 < m+2 < m-2 < \ \dots\ < n-2 < 3 < n-1 < 2 < n$

(ii) $n < 2 < n-1 < 3 < n-2 < \ \dots\ < m-2 < m+2 < m-1 < m+1 < m < 1$

Donde $n = 2m-1$

Luego, aún cuando existen $(n-1)!$ órdenes tipo de período n sólo dos de ellos pueden de hecho ocurrir en el caso de período impar mínimo. Esos órdenes tipos son unimodales, esto es, la aplicación L_r asociada es unimodal, es decir, tiene un único extremo, máximo o mínimo.

Demostración:

Se construye un camino

$$J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow \ \dots\ \longrightarrow J_l \longrightarrow J_1$$

de intervalos distintos, donde también

$$\circlearrowright J_1 \text{ esto es, } J_1 \longrightarrow J_1$$

y donde

$$2 \leq l \leq n-1$$

Como f tiene puntos periódicos de todos los períodos mayores o iguales que l, pero no de período $n - 2$, se sigue que $l = n - 1$. Esto es, la sucesión de intervalos $J_1, \dots, J_l$ debe ser alguna permutación de la sucesión de intervalos

$$I_1 = [x_1, x_2]$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$I_{n-1} = [x_{n-1}, x_n]$$

Además, como el camino de flechas desde J_1 en sí mismo, es mínimo, no pueden haber flechas de la forma

$$J_i \longrightarrow J_i \qquad con\ (i+1) < j$$

Sin pérdida de generalidad, podemos trabajar con la función lineal por partes L_τ .

Sea $J_1 = [m,\ m+1]$.

Como J_1 se aplica sólo sobre dos intervalos distintos, es decir, J_1 y J_2, la imagen $L_\tau(J_1)$ debe ser

(a) $L_\tau(J_1) = [m-1, m+1]$

(b) $L_\tau(J_1) = [m,\ \ m+2]$

Se supone el caso (a). Entonces, claramente,

$$\tau(m) = m + 1$$

y

$$\tau(m+1) = m - 1$$

Ahora la imagen bajo L_r de $J_2 = [m-1, m]$ no puede cubrir J_1, y puede cubrir sólo un nuevo intervalo J_3 . El único modo que esto ocurra es $J_3 = [m+1, m+2]$, con $\tau(m-1) = m+1$.
Continuando, inductivamente, vemos que

$$\tau: \ 1 \longrightarrow m+1 \longrightarrow m-1 \longrightarrow m+2 \longrightarrow \ \dots \ \longrightarrow m+(m-1) \longrightarrow 1$$

o

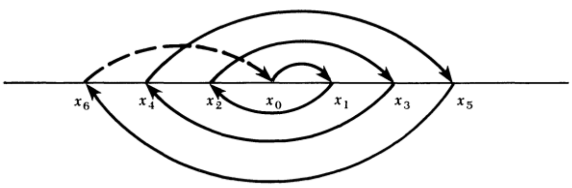
$$\tau: \ 1 \longrightarrow m+1 \longrightarrow m-1 \longrightarrow m+2 \longrightarrow \ \dots \ \longrightarrow 2m-1 \longrightarrow 1$$

Se sigue entonces que $n = 2m - 1$.
El resto de la prueba es análogo.

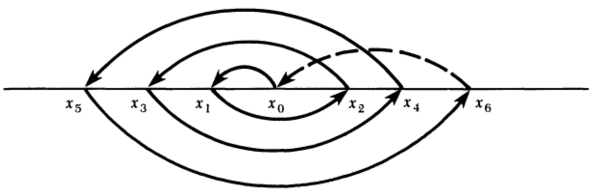
<u>Observación</u>:
Gracias a la proposición 2.3 es suficiente mostrar que para cada $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, f siempre asigna un punto final de S_i llamado A, hasta otro llamado B, siendo que A esté siempre entre B y $f(B)$.

<u>Ejemplo</u>: Para el caso cuando m = 4, esto es, n= 7 tenemos:

(i) $x_6 < x_4 < x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < x_5$



(ii) $x_5 < x_3 < x_1 < x_0 < x_2 < x_4 < x_6$



CAPÍTULO 3

Teorema de Li-Yorke

Se enuncia el famoso teorema de Li- Yorke denominado "Period three implies chaos" publicado en el año 1.975 por la revista *American Mathematical Monthly*.

Teorema de Li-Yorke:

Sea f una función continua en el cerrado $[a;b]$ y su rango está contenido en $[a;b]$. Si f tiene un punto 3-periódico, entonces f tiene puntos n-periódicos para todos los enteros positivos n.

Demostración:

Sea $x_0 < x_1 < x_2$ una órbita 3-periódica de f. Entonces se cumple $f(x_1) = x_0$ o $f(x_1) = x_2$. Sin pérdida de generalidad, se supone $f(x_1) = x_0$. Entonces $f(x_0) = x_2, f(x_2) = x_1$.

Sea $\tilde{I}_0 = [x_0, x_1]$, $\tilde{I}_1 = [x_1, x_2]$. Usando el Teorema del Valor Intermedio,

$$\circlearrowleft \tilde{I}_0 \leftrightarrows \tilde{I}_1$$

Sea

$$I_0 = I_1 = \ldots = I_{n-2} = \tilde{I}_0$$
$$I_{n-1} = \tilde{I}_1$$

La proposición 2.2 implica que existen $x_0 \in \tilde{I}_0$ tal que $f^n(x_0^*) = x_0^*$ y

$$f^k(x_0^*) \in \tilde{I}_0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2$$
$$f^{n-1}(x_0^*) \in \tilde{I}_1$$

Ahora, analicemos lo siguiente. Si x_0^*, $f(x_0^*)$, ... $, f^{n-1}(x_0^*)$ no es un punto n-periódico de f , entonces $f^{n-1}(x_0^*)$ sería uno de los $f^k(x_0^*)$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$. Por lo tanto,

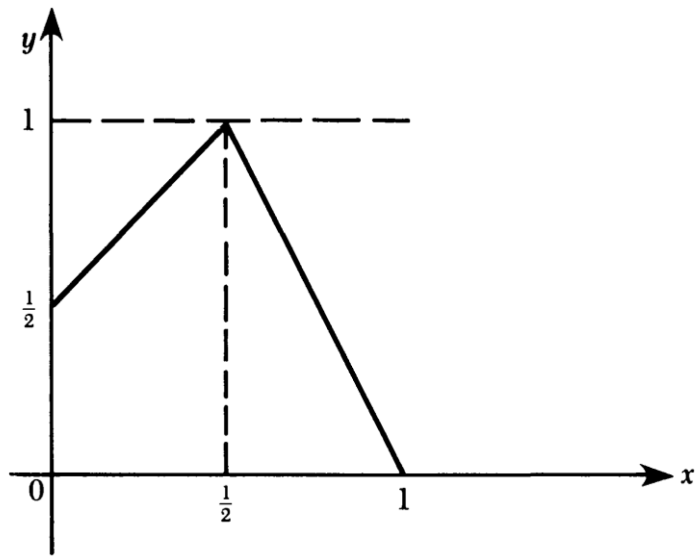
$$f^{n-1}(x_0^*) \in \tilde{I}_0 \cap \tilde{I}_1 = x_1$$

y

$$x_0^* = f^n(x_0^*) = x_0$$
$$f(x_0^*) = f(x_0) = x_2 \notin \tilde{I}_0$$

Que implica una contradicción pues $f(x_0^*) \in \tilde{I}_0$
Quedando la prueba terminada.

Este Teorema nos dice que las funciones que cumplan con un gráfico como el que sigue tienen período n para cada n.



Está más allá de la imaginación que una simple función produzca un fenómeno tan complejo.

En el artículo citado “Period three implies chaos” se introduce por primera vez el nuevo concepto de "caos". El significado del caos en Matemática es que si f tiene un punto 3-periódico en I entonces existen incontables conjuntos $S \subset I$ de modo que para cualesquiera dos puntos $x_0 , y_0 \in S$, la distancia entre dos series iterativas $x_n = f^n(x_0)$, $y_n = f^n(y_0)$, $n = 1, 2, \dots , n-2$ tiene la propiedad de que, como $n \longrightarrow \infty$, el límite inferior es igual a cero mientras que el límite superior es mayor que cero.

Es evidente que los puntos en S tienen propiedades muy interesantes en las sucesivas asignaciones de f.
Que el límite inferior sea igual a cero significa que existe una cantidad infinita de n de modo que $\{f^n(x)\}$ y $\{f^n(y)\}$ sean tan cercanos como se quiera; y que el límite superior sea mayor a cero significa que existe una cantidad infinita de n tal que la distancia entre $\{f^n(x)\}$ y $\{f^n(y)\}$ sea siempre positiva.
En otras palabras, en la iteración sucesiva de f, diferentes puntos de S a veces son cercanos, a veces separados pero ninguno de ellos es periódico.

Así también, demostraron que si una función continua $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un punto de período 3, entonces tenía puntos periódicos para cada uno de los períodos n, siendo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, el comportamiento de f era complejo, algo caótico, pues todo se podía esperar de sus órbitas. Sin embargo, el título “Period Three Implies Chaos” no resulta adecuado.

CAPÍTULO 4

Teorema de Sarkovskii

Se sabe que el orden estándar de los números naturales es:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots$$

Pero podemos reordenarlos de la siguiente manera:

$$3, 5, 7, \ldots \quad , 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \ldots \quad , 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, \ldots, 16, 8, 4, 2, 1$$

En primer lugar, se ordenan los números impares exceptuando el cero; luego, estos mismos impares multiplicados por dos; siguiendo con los mismos impares multiplicados por 2^2 , luego por 2^3 y así. Esto agota a todos los números naturales con la excepción de las potencia de dos que se enumeran al final en orden decreciente. El último número es el uno.

Esta forma particular de ordenar los números naturales se conoce con el nombre de *Orden de Sarkovskii* para números naturales y se denota de la siguiente manera:

$$3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd \cdots \lhd 2 \cdot 3 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 7 \lhd \cdots \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd 2^2 \cdot 5$$
$$\lhd 2^2 \cdot 7 \lhd \cdots \lhd 16 \lhd 8 \lhd 4 \lhd 2 \lhd 1$$

Se pensará en la siguiente cuestión: ¿Existe alguna aplicación del orden de Sarkovskii? Para ello, se considerará el siguiente teorema del año 1964.

Teorema de Sarkovskii:

Sea $f: I \longrightarrow I$ una función continua y f tiene un punto l-periódico. Si $l \lhd m$, entonces f tiene también un punto m-periódico.

Al no indicar la forma de I, se entiende que I puede ser cualquier intervalo; finito o infinito, abierto o cerrado, semiabierto o semicerrado. Este teorema nos dice que los períodos de una función continua muestran una extraordinaria regularidad. Antes de pasar a la demostración del teorema, se harán algunas aclaraciones importantes.

1. Si f tiene un punto periódico cuyo período no es una potencia de dos, entonces f debe tener infinitos puntos periódicos. Por el contrario, si f tiene solamente un número finito de puntos periódicos, entonces cada período debe ser una potencia de dos. Se considera al número uno $1 = 2^0$.
2. El período 3 es el menor período en el orden de Sarkovskii y por lo tanto, implica la existencia de todos los otros períodos como se vio en el Teorema de Li-Yorke.
3. El recíproco del Teorema de Sarkovskii es también verdadero. Existen funciones que tienen puntos p-periódicos y no tienen puntos periódicos mayores en el sentido del orden de Sarkovskii.

Demostración:

Se analizaran los cuatro casos posibles.

- Caso 1:

Si f tiene período 2^m, entonces f tiene período 2^l para cada $l < m$.

Sólo se necesita probar que el período 2^m implica el período2^{m-1}. Se hace por inducción.

Si $m = 1$ entonces f tiene un punto 2-periódico. Sean x_1, x_2 una órbita 2-periódica de f con $x_1 < x_2$. Quedando $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$ o $f([x_1\ , x_2]) \supset [x_1\ , x_2]$. Por la proposición 2.1, f tiene un punto fijo, es decir, f tiene un punto 2^0-periódico.

Se supone que es válido para $m = k$. Se quiere mostrar que esto también es válido para $m = k + 1$.

Sea $g = f^2$. Entonces f tiene período 2^{k+1} lo que implica que g tiene período 2^k. Usando la hipótesis inductiva, g tiene período 2^{k-1}. Así, existe un $x_0 \in I$ tal que

$$g^{2^{k-1}}(x_0) = x_{0,}$$

$$g^t(x_0) \neq x_0 \;\; para \;\; t = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$$

Lo que equivale a

$$f^{2^k}(x_0) = x_0,$$

$$f^{2t}(x_0) \neq x_0 \;\; para \;\; t = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$$

Si se supone que x_o no es un punto 2^k-periódico de f entonces debe existir algún $s \in \{1, 3, 5, \dots, 2^k - 1\}$ tal que

$$f^s(x_0) = x_0$$

Lo que es imposible pues implica que

$$f^{2s_0}(x_0) = x_0$$

para algún $s_0 \in \{1, 2, 3, \dots, 2^{k-1} - 1\}$.

Así, la inducción completa la demostración.

- Caso 2:

Si f tiene periodo$2m + 1$ con $m > 1$ entonces f tiene periodo k para todo $k > 2m + 1$.

Por la proposición 2.3. tenemos

$$I_1 = [x_0 , x_1]$$

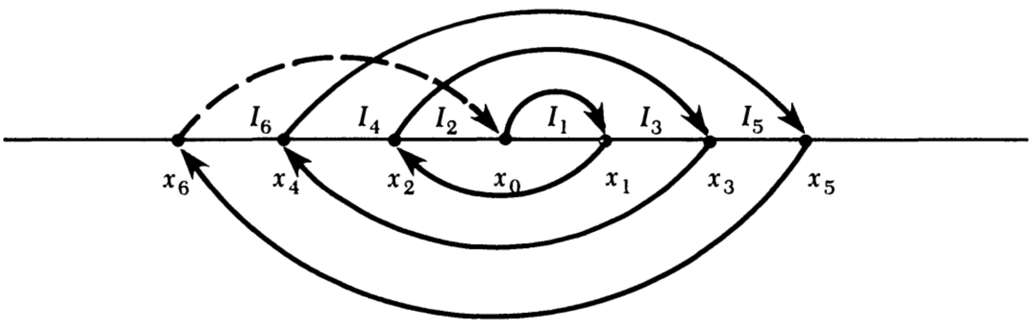
$$I_2 = [x_2 , x_0]$$

$$\vdots$$

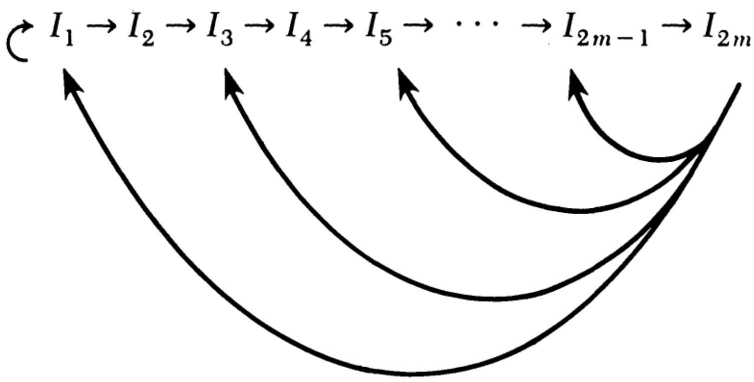
$$I_{2n-1} = [x_{2n-3} , x_{2n-1}]$$

$$I_{2n} = [x_{2n} , x_{2n-2}]$$

Se puede ver en los siguientes diagramas:



y (c)



Si se supone que no existe un punto $(2n+1)$-periódico para $1 \leq n < m$. Entonces para $k > 2m+1$

$$\underbrace{I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_1}_{k-(2m-1)} \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ \ldots \ \longrightarrow I_{2m} \longrightarrow I_1$$

Como no hay un punto común entre I_1 y I_{2n-1} por la proposición 2.2 dará a lugar a que f tenga un punto k-periódico.

- <u>Caso 3</u>:

Si f tiene período $2m+1$ con $m>1$ entonces f tiene período $2k$ para cualquier entero positivo k.

Sólo se necesita probar el caso donde $2k \leq 2m$. Del diagrama (c) se tiene

$$I_{2(m-k)+1} \longrightarrow I_{2(m-k)+2} \longrightarrow \ \dots \ \longrightarrow I_{2m} \longrightarrow I_{2(m-k)+1}$$

Con el mismo argumento que el utilizado en el caso 2, f tiene un punto $2k$-periódico.

- <u>Caso 4</u>:

Sea $m \lhd n$, donde $m = 2^k \cdot p$, $n = 2^t \cdot q$, con p y q números impares siendo $p > 1$ y $k \geq 1$. Entonces el período m implica el período n.

Sin pérdida de generalidad, se supone que para $l \lhd m$ no existe un punto l-periódico de f.

De acuerdo al orden de Sarkovskii, se necesitan considerar las siguientes posibilidades:

(i) $t > k$, $q \geq 1$

(ii) $t = k$, $q > p$

Sea $g(x) = f^{2^k}(x)$. Entonces que f tenga período $2^k \cdot p$ implica que g tiene período p.

Por el caso 3, se sabe que g tiene período $2^{t-k} \cdot q$ para $t > k$ y $k \geq 1$. Por lo tanto, f tiene período $2^t \cdot q$ para $t > k$ y $q \geq 1$ y (i) es válido.

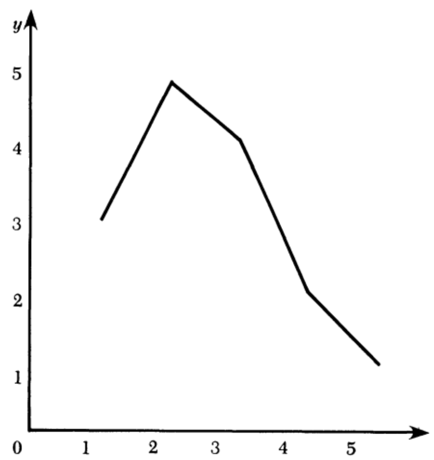
Por el caso 2, que g tengo período p implica que g tiene período q. Entonces f tiene período $2^t \cdot q$ y (ii) es válido.

Queda completa la prueba del Teorema de Sarkovskii.

Ejemplo:

Aquí se muestra que el período 5 no implica período 3.

Sea f la función lineal a trozos definida en el cerrado $[1\,,5]$ con $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$ y $f(5) = 1$ cuyo gráfica es



Es fácil chequear que

(i) $10/3$ es un punto fijo o un punto 1-periódico.

(ii) $5/3$ es un punto 2-periódico.

(iii) $1, 2, 3, 4, 5$ son puntos 5-periódicos.

Se puede probar que f no tiene un punto 3-periódico. Como

$$f^3[1\,,2] = [2\,,5]$$

$$f^3[2\,,3] = [3\,,5]$$

$$f^3[4\,,5] = [1\,,4]$$

f^3 no tiene puntos periódicos en ninguno de estos intervalos. Además, como $f^3[3\,,4] = [1\,,5]$ y f^3 es monótonamente decreciente en $[3\,,4]$, existe un único $x_0 \in [3\,,4]$ tal que

$$f^3(x_0) = x_0$$

Como $f(x) = 10 - 2x$ en $[3\,,4]$, $f(x)$ tiene un punto fijo único $\bar{x} = 10/3$ en $[3\,,4]$.

Así,

$$f^3(\bar{x}) = f^2(\bar{x}) = f(\bar{x}) = \bar{x} = x_0$$

x_0 no es un punto 3-periódico. Por lo tanto, f no tiene un punto 3-periódico.

CAPÍTULO 5

Aplicaciones

Mediante ejemplos se mostrará que, incluso en problemas clásicos, se puede encontrar un beneficio en tomar en cuenta la estructura global del Teorema de Sarkovskii.

Ejemplo 1: "Los monos y sus bananas"

Había un montón de bananas en la playa que pertenecían a cinco monos. El primer mono se acercó, dividió las bananas en cinco pilas con el mismo número de bananas. Como sobró una, la arrojó al mar y se fue con su propia pila de bananas. Luego, el segundo mono se acercó y también dividió el resto de las bananas en cinco montones iguales. Una vez más, sobró una y fue arrojada al mar. Y también se marchó con sus propias bananas. Así, uno por uno, cada mono hizo lo mismo que los dos primeros.

¿Cuál es el menor número de manzanas en la playa al principio?

El problema no es fácil de resolver si utiliza las ecuaciones de costumbre. Así que el famoso físico británico Paul Dirac (1902-1984) sugirió hacerlo de la siguiente manera.

Sea N el número de manzanas al comienzo y sean A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 los números de manzanas tomadas por los monos.

Entonces, tenemos un sistema de ecuaciones lineales como el que sigue:

$$\begin{cases} N - 5A_1 & = 1 \\ \quad 4A_1 - 5A_2 & = 1 \\ \qquad 4A_2 - 5A_3 & = 1 \\ \qquad\quad 4A_3 - 5A_4 & = 1 \\ \qquad\qquad 4A_4 - 5A_5 & = 1 \end{cases}$$

Que tiene una solución particular:

$$(N, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = (-4, -1, -1, -1, -1)$$

El sistema homogéneo correspondiente al sistema de ecuaciones original tiene como solución general:

$$\left(5\left(\tfrac{5}{4}\right)^4 \cdot k, \quad \left(\tfrac{5}{4}\right)^4 \cdot k, \quad \left(\tfrac{5}{4}\right)^3 \cdot k, \quad 5\left(\tfrac{5}{4}\right)^2 \cdot k, \quad \left(\tfrac{5}{4}\right) \cdot k, \quad k\right)$$

Donde k es cualquier constante. Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\left(5\left(\tfrac{5}{4}\right)^4 \cdot k - 4, \left(\tfrac{5}{4}\right)^4 \cdot k - 1, \left(\tfrac{5}{4}\right)^3 \cdot k - 1, 5\left(\tfrac{5}{4}\right)^2 \cdot k - 1, \left(\tfrac{5}{4}\right) \cdot k - 1, k - 1\right)$$

De aquí, se puede determinar que el menor entero positivo para N es $5^5 - 4 = 3121$ con $k = 4^4 = 256$ y el número de manzanas que quedaron es $4A_5 = 4(k-1) = 1020$.

Como se puede observar la solución está basada en la estructura de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Y si no se la conoce, es realmente muy difícil resolverlo.

El siguiente método para resolver este problema es básico y muy simple. Se supone que x es el número de manzanas antes de que los monos lleguen y que y es el número de manzanas que dejaron.

Es obvio que y está determinado por x; así $y = f(x)$ siendo

$$f(x) = \frac{4}{5}(x-1)$$

Si hay N manzanas al comienzo y M manzanas al final, entonces

$$M = f\left(f\left(f\left(f\left(f(N)\right)\right)\right)\right) = f^{5}(N)$$

Ahora, se considera cómo obtener la fórmula para $f^{5}(N)$. Reescribimos $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{4}{5}(x+4)-4$$

Donde (-4) es un punto fijo de $f(x)$.

Así,

$$f^{2}(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}(x+4)-4$$

$$f^{3}(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{3}(x+4)-4$$

$$f^{4}(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{4}(x+4)-4$$

$$f^{5}(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{5}(x+4)-4$$

y por lo tanto, $M = \left(\frac{4}{5}\right)^{5}(N+4)-4$

Para obtener el entero positivo M, N+4 debe ser un múltiplo de 5^5. De este modo, el menor valor de N entero positivo es:

$$N = 5^5 - 4 = 3121$$

y queda

$$M = 4^5 - 4 = 1020$$

<u>Ejemplo 2</u>: Sistema de ecuaciones

1) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = \frac{4-x^2}{2} \\ x = \frac{4-y^2}{2} \end{cases}$$

La solución es

$$(0\,,2), (2,0), \left(-1+\sqrt{5};\ -1+\sqrt{5}\right), \left(-1-\sqrt{5};\ -1-\sqrt{5}\right)$$

2) Generalizar el punto anterior, a un sistema de dos ecuaciones. Discutir el problema generalizado.

Una posible generalización es considerar el sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases}$$

Si x es un punto fijo de la función f , esto es, si

$$x = f(x) \qquad \text{(i)}$$

Se tendrá que

$$f^2(x) = f\big(f(x)\big) = x \qquad \text{(ii)}$$

Por lo tanto, entre las raíces de (ii), están todas las raíces de (i), algunas de ellas forman un ciclo de orden dos.

3) Generalizar el sistema del ejercicio 1, a un sistema de p ecuaciones en las variables $x_1, x_2, \dots, x_p$ ¿Tiene tal sistema soluciones $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ con p diferentes números?

Se considera, por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x_2 = \frac{(a-x_1^2)}{2} \\ x_3 = \frac{(a-x_2^2)}{2} \\ x_4 = \frac{(a-x_3^2)}{2} \\ \dots\dots \\ x_p = \frac{(a-x_{p-1}^2)}{2} \\ x_1 = \frac{(a-x_p^2)}{2} \end{cases}$$

En este caso, se usa la composición f^n de la transformación f. Así, este sistema se reduce a la ecuación algebraica de grado 2^p

$$f^p(x) = x$$

La pregunta enunciada, puede reformularse así ¿tiene la transformación $f_a(x) = \frac{a-x^2}{2}$ orbitas periódicas de período p?

Con ayuda del Teorema de Sarkovskii, la respuesta obtenida es la siguiente:

• Para $0 \leq a \leq 3$ hay órbitas de período 1.

• Cuando $a > a_1 = 3$, aparecen órbitas de período 2.

• Cuando $a > a_2 = 5$, aparecen órbitas de período 4.

• Cuando $a > a_3 = 5{,}47$ ... , aparecen órbitas de período 8.

Es interesante obtener el valor límite de esta sucesión $a_\infty = 5,6046...$

• Cuando $a > a_\infty$, el carácter de las órbitas típicas cambia muy radicalmente, f_a admite no sólo órbitas de período2^p. ¿Qué períodos pueden tener las órbitas de la transformación f_a?

• Por último, notemos que 3 es el menor número de acuerdo con el orden de Sarkovskii, lo que significa que cualquier transformación que tenga una órbita de período 3, admitirá órbitas de todos los demás períodos, o sea, período 3 implica caos.

CAPÍTULO 6

Conclusiones

El Teorema de Sarkovskii no da por terminada la discusión acerca de las órbitas periódicas de las funciones continuas. Por el contrario, ha creado una nueva dirección para estudiar el problema. Muchos artículos y libros han ido apareciendo. La pregunta es por qué tantos grandes estudiosos aún no lo han descubierto como un importante teorema. La razón es que los analistas clásicos se concentraron en las propiedades locales de funciones. Esencialmente, la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad son determinadas por las propiedades locales de las funciones. Aunque algunas propiedades globales tales como la continuidad uniforme se hubieran obtenido, éstas propiedades globales pueden derivarse simplemente de las propiedades locales, que es a lo que estamos acostumbrados los que estudiamos Matemática.

Un avance notable en el análisis moderno está viendo la situación en su conjunto en el estudio de las funciones. En realidad, los conceptos tales como la iteración y órbitas periódicas tienen relaciones inseparables de las propiedades globales. Por ejemplo, $f(x)$ puede ser iterada en [a, b], pero no puede iterarse en cualquier subintervalo de [a, b].

Estudiando las propiedades globales de las funciones surge una nueva rama de la Matemática llamada Análisis Global, que incluye sistemas dinámicos diferenciables, geometría diferencial global, teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, topología diferencial, etc. Es una de las principales direcciones de la Matemática moderna.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Xun-Cheng Huang, From Intermediate Value to Chaos, Mathematics Magazine Vol. 65 (1992), 91-103.

2. Tien-Yien Li y James A. Yorke, Período tres implica el caos, American Mathematical Monthly Vol. 82 (1975), 985-992.

3. Juan E. Nápoles-Valdés, Una nota sobre el teorema de Sarkovskii, Lecturas Matemáticas Vol. 16 (1995) 211-214.

4. Juan E. Nápoles-Valdés, Funciones continuas, órbitas y caos. Teorema de Sarkovskii, Boletín de Matemáticas Vol. 12 (2005) 98-113.

5. Sergio Plaza, Introducción a los sistemas dinámicos. Notas de curso USACH, 2001, en http://fermat.usach.cl/~dinamicos/DynSystSPlaza.pdf