UNLaM

Escuela de Formación Continua
Licenciatura en Matemática Aplicada

Asignatura: Taller de Tesis

Tesina:

Funciones Eulerianas

y Función z de Riemann

Profesor de Tesina: Lic. Miguel CALZÓN

Alumno: Julio Omar ABRAN

Año académico 2010

Año en que se cursó la materia 2009

INDICE

Sección I

Funciones Eulerianas.

Sección II

Función z de Riemann

Introducción

En el año 1729 Euler introdujo la función Gamma con la idea de obtener una generalización del factorial de n para números distintos a los naturales:

$$\alpha! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{\alpha}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}$$

Estos logros de interpolación habían superado los esfuerzos de matemáticos de la talla de Goldbach, Daniel Bernoulli e incluso de J. Stirling.

La solución que propuso Euler lo llevo a ser el matemático del momento.

Euler comunicó esta idea en una carta dirigida a Goldbach el 13 de octubre de 1729. Su fórmula define a $\alpha!$ para cualquier valor de α excepto los enteros negativos (cuando el denominador de la ecuación anterior se convierte en cero) en estos casos $\alpha!$ se toma infinito.

Históricamente se han utilizado muchas notaciones para los factoriales, Euler escribía: [n] y Gauss: $\pi(n)$.

La notación n! universalmente utilizada en la actualidad (cuando n es un entero positivo) fue introducida por un matemático relativamente poco conocido Cristian Kramp, en un texto de algebra en 1808.

Cuando n no es entero , sin embargo se utiliza rara vez y en cambio, se acostumbra la notación de A.M. Legendre :$n!=\Gamma(n+1)=n.\Gamma(n)$.

La función $\Gamma(\alpha)$ se denomina función gamma y por una razón desconocida Legendre tomó al cero como el primer polo de la función:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n)}$$

Debido a la definición del factorial: n!=1.2.3…..n, y a la propuesta que expuso, Euler pudo, como sugiere P.J. Davis, haber experimentado con productos de diversa índole, notando por ejemplo que si $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^{n} \frac{1}{n+1}\right]\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n} \frac{2}{n+2}\right]\cdot\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{n} \frac{1}{n+3}\right]\ldots\ldots = n!$$

Es decir, el factorial de un número como producto infinito.

Ejemplo: si n= 4

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^4\frac{1}{4+1}\right].\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\frac{2}{4+2}\right].\left[\left(\frac{4}{3}\right)^4\frac{3}{4+3}\right].\left[\left(\frac{5}{4}\right)^4\frac{4}{4+4}\right].......=4!$$

$$\left[\frac{2^4}{1^4}\cdot\frac{1}{5}\right]\cdot\left[\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{2}{6}\right]\cdot\left[\frac{4^4}{3^4}\cdot\frac{3}{7}\right]\cdot\left[\frac{5^4}{4^4}\cdot\frac{4}{8}\right].\cdot\left[\frac{6^4}{5^4}\cdot\frac{5}{9}\right]......=4!$$

$$\frac{2^4}{1^4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4^4}{3^4}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{5^4}{4^4}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{6^4}{5^4}\cdot\frac{5}{9}......=4!$$

Simplificando convenientemente:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{6^4}{1}\cdot\frac{1}{9}......=4!$$

Si se repite infinitamente resulta .

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}....=1.2.3.4.1.1.1......=4!$$

Donde deja de lado la pregunta sobre la convergencia del producto y se verifica por cancelación.

Luego la forma en que Euler representa la solución anterior reescribiendo la expresión precedente como:

$$[\alpha]=\frac{1.2^{\alpha}}{1+\alpha}.\frac{2^{1-\alpha}3^{\alpha}}{2+\alpha}\cdot\frac{3^{1-\alpha}4^{\alpha}}{3+\alpha}\cdot..........\ .=$$

Probemos para α= 4

$$[4]=\frac{1.2^4}{1+4}.\frac{2^{1-4}3^4}{2+4}.\frac{3^{1-4}4^4}{3+4}.\frac{4^{1-4}5^4}{4+4}.\frac{5^{1-4}6^4}{5+4}.\frac{6^{1-4}7^4}{6+4}......$$

$$[4]=\frac{1.2^4}{5}.\frac{2^{-3}3^4}{6}.\frac{3^{-3}4^4}{7}.\frac{4^{-3}5^4}{8}.\frac{5^{-3}6^4}{9}.\frac{6^{-3}7^4}{10}$$

$$[4]=\frac{1.2^4 2^{-3}}{5}.\frac{3^4 3^{-3}}{6}.\frac{4^4 4^{-3}}{7}.\frac{5^4 5^{-3}}{8}.\frac{6^4 6^{-3}}{9}.\frac{7^4}{10}..........$$

$$[4]=\frac{1.2^1}{5}.\frac{3^1}{6}.\frac{4^1}{7}.\frac{5^1}{8}.\frac{6^1}{9}.\frac{7^1}{10}.........$$

$$[4]=\frac{1.2^1}{1}.\frac{3^1}{1}.\frac{4^1}{1}.\frac{1}{8}.\frac{1}{9}.\frac{1}{10}.......$$

Luego:

$$[4]=\frac{1.2}{1}.\frac{3}{1}.\frac{4}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}.....=1.2.3.4.1.1.1.....=24=4!$$

$$[4]=4!$$

<u>Generalización</u>

Euler desarrollo la siguiente generalización

$$[\alpha]=\frac{1.2^{\alpha}}{1+\alpha}.\frac{2^{1-\alpha}3^{\alpha}}{2+\alpha}\cdot\frac{3^{1-\alpha}4^{\alpha}}{3+\alpha}.....$$

$$[\alpha]=\frac{1.2^{\alpha}}{1+\alpha}.\frac{2.2^{-\alpha}3^{\alpha}}{2+\alpha}\cdot\frac{3\,3^{-\alpha}4^{\alpha}}{3+\alpha}......$$

$$[\alpha]=\frac{2^{\alpha}}{(1+\alpha).\frac{1}{1}}.\frac{2^{-\alpha}3^{\alpha}}{(2+\alpha)\frac{1}{2}}\cdot\frac{3^{-\alpha}4^{\alpha}}{(3+\alpha)\frac{1}{3}}......$$

$$[\alpha]=\frac{\left(\frac{2}{1}\right)^{\alpha}}{\frac{(1+\alpha)}{1}}.\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha}}{\frac{(2+\alpha)}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\alpha}}{\frac{(3+\alpha)}{3}}.....$$

$$[\alpha]=\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^{\alpha}}{\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)}.\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^{\alpha}}{\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)}.....\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}$$

$$[\alpha]=\left(1+\frac{1}{1}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{3}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)^{-1}.....\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-1}$$

$$[\alpha]=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-1}$$

Función Gamma

Como ya adelantamos, Legendre introdujo un cambio en la expresión encontrada por Euler. Dado que en la mayoría de los casos se aplica la expresión de Legendre, en este trabajo nos dedicaremos al estudio de la misma.

De la expresión de Euler Legendre propuso:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-1}$$

De esta manera se tendrá: $\Gamma(\alpha)=[\alpha-1]=(\alpha-1)!$

Comprobemos para $\alpha=4$

$$\Gamma(4) = \frac{1}{4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{4}.2^4.\frac{1}{5}.\frac{3^4}{2^4}.\frac{2}{6}.\frac{4^4}{3^4}.\frac{3}{7}.\frac{5^4}{4^4}.\frac{4}{8}.\frac{6^4}{5^4}.\frac{5}{9}.........= (4-1)!$$

Simplificando convenientemente:

$$\Gamma(4) = \frac{1}{4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{1}.1.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}.\frac{2}{6}.\frac{1}{1}.\frac{3}{7}.\frac{1}{1}.\frac{1}{8}.\frac{6^4}{1}.\frac{1}{9}.......... = (4-1)!$$

Si continuamos:

$$\Gamma(4) = \frac{1}{4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{1}.1.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}.\frac{2}{1}.\frac{1}{1}.\frac{3}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}\frac{1}{1}.......... = (4-1)!$$

$$\Gamma(4) = \frac{1}{4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{1}.\frac{2}{1}.\frac{1}{1}.\frac{3}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}\frac{1}{1}.......... = 1.2.3.1.1... = 6 = (4-1)!$$

Otra expresión de Gamma

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha} \left(1+\frac{\alpha}{k}\right)^{-1}$$

Desarrollamos el producto hasta n:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2^{\alpha}}{1} \cdot \frac{1}{\alpha+1}\right] \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} \cdot \frac{2}{\alpha+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{\alpha} \cdot \frac{3}{\alpha+3}\right] \ldots\ldots\ldots$$

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2^{\alpha}}{1} \frac{1}{\alpha+1}\right]\left[\frac{3^{\alpha}}{2^{\alpha}} \cdot \frac{2}{\alpha+2}\right]\left[\frac{4^{\alpha}}{3^{\alpha}} \frac{3}{\alpha+3}\right] \ldots\ldots \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \left[\frac{n^{\alpha}}{(n-1)^{\alpha}} \cdot \frac{n-1}{\alpha+n-1}\right] \cdot \left[\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}} \cdot \frac{n}{\alpha+n}\right]$$

reordenamos

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{2^{\alpha}}{1} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{3^{\alpha}}{2^{\alpha}} \cdot \frac{2}{\alpha+2} \cdot \frac{4^{\alpha}}{3^{\alpha}} \cdot \frac{3}{\alpha+3} \ldots\ldots \frac{(n)^{\alpha}}{(n-1)^{\alpha}} \cdot \frac{n-1}{\alpha+n-1} \cdot \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}} \cdot \frac{n}{\alpha+n}$$

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{\alpha+2} \cdot \frac{4^{\alpha}}{1} \cdot \frac{3}{\alpha+3} \ldots\ldots \frac{n^{\alpha}}{1} \cdot \frac{n-1}{\alpha+n-1} \cdot \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}} \cdot \frac{n}{\alpha+n}$$

Pero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}} = 1$$

Reordenando convenientemente:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha+1} \frac{2}{\alpha+2} \frac{3}{\alpha+3} \cdots \frac{n^{\alpha} \cdot (n-1)}{\alpha+n-1} \cdot \frac{n}{\alpha+n}\right]$$

Nuevamente:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha+1} \frac{2}{\alpha+2} \frac{3}{\alpha+3} \ldots \frac{(n-1)\cdot n}{\alpha+n-1} \cdot \frac{n^{\alpha}}{\alpha+n}\right]$$

Obtenemos otra expresión de la función Gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}$$

Es la expresión lograda por Euler pero con el primer polo en cero

Propiedad importante:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

Comprobación:

$$\Gamma_{(\alpha+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}$$

Multiplicando numerador y denominador por α y haciendo $n^{\alpha+1} = n^{\alpha} . n$

$$\Gamma_{(\alpha+1)} = \lim_{n\to\infty} \alpha \frac{n!\cdot n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n-1)} \cdot \frac{n}{(\alpha+n)}$$

Como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\alpha+n)} = 1$$

Entonces:

$$\Gamma_{(\alpha+1)} = \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n-1)}$$

Luego

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

Aproximación al factorial de un numero aplicando productos infinitos

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n)}$$

Veremos ahora de que manera se puede aproximar al factorial de un número por medio de la expresión anterior.

En primer lugar sabemos que

$$\Gamma(5) = 4! = 24$$

Si para α=5 hacemos n=10, se tendrá

$$\Gamma(5) \cong \frac{10!.10^{5}}{5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15} = \frac{3{,}63.10^{6}.10^{5}}{5{,}45.10^{10}} = 6{,}6$$

Comprobamos que para un número tan pequeño como n=10, el error es intolerable
Veamos qué valor se obtiene para, por ejemplo, n=100

$$\Gamma(5) \cong \frac{100!.100^{5}}{5.6.7.8.9.10.11.12....105} = \frac{4{,}024.10^{6}.10^{2582}}{1{,}702.10^{2581}} = 23{,}64$$

Se observa en efecto una mejor aproximación.

<u>Integral Euleriana de segunda especie, la función Gamma</u>

La función holomorfa, definida como integral, que extiende a la sucesión de los factoriales de los números naturales estudiada por Euler es la siguiente:

$$[n] = \int_0^1 \left(Ln\frac{1}{y} \right)^n dy = n!$$

En la actualidad esta ecuación es más conocida en la forma equivalente que utilizó Gauss, que se obtiene de la anterior mediante el siguiente cambio de variable:

$$[n] = \int_0^1 \left(Ln\frac{1}{y} \right)^n dy$$

$$t = Ln\frac{1}{y} \Rightarrow e^t = \frac{1}{y} \Rightarrow y = e^{-t}$$

derivamos

$$dy = -e^{-t}dt$$

extremos de integración:

$y=0\square 0=e^{-t}\ \square t=\infty$

$y=1\square 1=e^{-t}\square t=0$

reemplazando

$$[n] = \int_0^1 \left(Ln\frac{1}{y} \right)^n dy \Rightarrow \Pi(n) = -\int_\infty^0 t^n e^{-t} dt = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$$

También fue Gauss el que utilizó el término factorial para referirse a la función definida por esta integral:

$$\Pi(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \qquad \text{para } n>-1$$

Comprobación de $\Pi(n) = n!$

Se tratara de probar que:

$$\int_0^\infty e^{-t}.t^n dt = n!$$

Aplicando la integración por partes

$$\int_0^\infty e^{-t}.t^n dt = \left\{ \begin{matrix} u = t^n; du = n.t^{n-1} \\ dv = e^{-t}dt; v = -e^{-t} \end{matrix} \right\} = -e^{-t}\Big|_0^\infty + n.\int_0^\infty e^{-t}.t^{n-1}dt$$

Se vuelve a aplicar la integración por partes

$$\left\{ \begin{matrix} u = t^{n-1}; du = (n-1).t^{n-2}dt \\ dv = e^{-t}dt; v = -e^{-t} \end{matrix} \right\} = -e^{-t}t^n\Big|_0^\infty - nt^{n-1}e^{-t}\Big|_0^\infty + n(n-1)\int_0^\infty e^{-t}.t^{n-2}dt$$

Y así sucesivamente llegamos a la expresión

$$\int_0^\infty e^{-t}.t^n dt = -e^{-t}(t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} + \ldots(n-1)!.t^{n-(n-1)} + n!)\Big|_0^\infty$$

Operando convenientemente se tiene

$$\int_0^\infty e^{-t}.t^n dt = -e^{-t}(t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} + \ldots(n-1)!.t^{n-(n-1)})\Big|_0^\infty + (-e^{-t}n!)\Big|_0^\infty$$

El primer termino tiende a cero al sustituir t por ∞ ya que resulta de calcular límites del tipo $\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0$, y lógicamente al sustituir a t por cero, Luego quedará:

$$\int_0^\infty e^{-t}.t^n dt = (-e^{-t}n!)\Big|_0^\infty = (-e^{-\infty}n!) - (-e^0 n!) = 0 + 1.n! = n!$$

Recordando que $\Gamma(x) = (x-1)!$

Como conclusión: $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}.t^{x-1}$, que es la expresión integral de la función Gamma, donde $\Gamma(x) \in P^+ \to P^+$,x es un *número arbitrario*, y t la *variable de integración*.

La función Γ permite extender el concepto de *producto factorial*, o simplemente *factorial*, a números que trascienden del conjunto de los naturales, proporcionando al mismo tiempo las herramientas para efectuar su cálculo

Convergencia de Γ(x)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}.t^{x-1}dt$$

Se demuestra que Γ(x) está definida para todo x>0(P⁺), es decir, que la integral impropia converge para valores positivos de x.
Para establecer la convergencia de esta integral impropia conviene separarla en dos integrales así:

$$\Gamma(x) = \int_0^{1} e^{-t}.t^{x-1}dt + \int_1^{\infty} e^{-t}.t^{x-1}dt =$$

Sobre el primer término de esta expresión se puede decir, que como t>0 entonces 0< e^{-t}<1 y por lo tanto es posible acotarla de la siguiente manera

$$\int_0^{1} e^{-t}.t^{x-1}dt \langle \int_0^{1} t^{x-1}dt$$

Si el segundo término converge el primero también y viceversa.

Si x>0 entonces

$$\int_0^{1} t^{x-1}dt =$$

$$\lim_{b\to 0}\int_b^{1} t^{x-1}dt = \lim_{b\to 0}\frac{t^x}{x}\bigg|_b^1 = \lim_{b\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{b^x}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

Puesto que 0^x=0, para x>0, entonces

$\int_0^{1} t^{x-1}dt =$ converge $\therefore$ $\int_0^{1} e^{-t}.t^{x-1}dt$ converge.

Si x =0 entonces

$$\int_0^{\infty} t^{x-1}dt = \int_0^{\infty} t^{-1}dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{t}dt = \lim_{b\to 0}\int_b^{\infty}\frac{1}{t}dt = \lim_{b\to 0} Lnt\Big|_b^1 = \lim_{b\to 0}\left(Ln(1) - Ln(b)\right) =$$

$$\lim_{b\to 0}\left(e^0 - Lnb\right) = \infty$$

Pues Ln 0=-∞, entonces si x= 0, $\int_0^{1} t^{x-1}dt =$ diverge $\therefore$ $\int_0^{1} e^{-t}.t^{x-1}dt$ diverge

Si $x<0$ entonces $x-1<0$, se tendrá

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \left.\frac{t^x}{x}\right|_0^1 \quad \text{como } x<o \quad \left.\frac{t^x}{x}\right|_0^1 = \left.\frac{1}{xt^{-x}}\right|_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{0} = -\infty \quad \text{entonces si } x<0 \int_0^1 t^{x-1}dt \text{ , diverge}$$

$$\therefore$$

$$\int_0^1 e^{-t}.t^{x-1}dt \quad \text{converge si } x>0$$

Para estudiar la convergencia de la segunda parte de la integral se consideran 2 casos:

Primer caso, $x \leq 1$□ $x-1 \leq 0$ por lo tanto

$$\int_1^\infty e^{-t}.t^{x-1}dt = \int_1^\infty e^{-t}.\frac{1}{t^{1-x}}dt =$$

Como el intervalo de integración es $[1,\infty)$ entonces $t \geq 1$, pero como la $f(t)=t^{1-x}$ es creciente pues su derivada $f'(t)= (1-x)t^{-x} \geq 0$ entonces $t^{1-x} \geq 1 \;\therefore\; \frac{1}{t^{1-x}} \leq 1$ por lo tanto la integral se puede acotar de la siguiente manera aplicando el criterio de comparación:

$$\int_1^\infty e^{-t}.\frac{1}{t^{1-x}}\, d \leq \int_1^\infty e^{-t} \quad \text{luego} \quad \int_1^\infty e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-t}dt = -\lim_{b\to\infty} \left. e^{-t}\right|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

De esta manera para $0 < x \leq 1$ las dos partes de la integral convergen y así la integral

$$\int_1^\infty e^{-t}.t^{x-1}dt \quad \text{converge.}$$

Segundo caso $x>1$

$$\int_1^\infty e^{-t}.t^{x-1}dt$$

Sea $\alpha =[x]$, la parte entera de x:

Se aplica la integración por partes

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$u = t^{x-1} \Rightarrow du = (x-1) \cdot t^{x-2} dt$$
$$dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$
$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-t} \cdot t^{x-1} \right]_1^b + (x-1) \int_1^b e^{-t} t^{x-2} dt$$
$$\lim_{b\to\infty} \left[-e^{-t} \cdot t^{x-1} \right]_1^b = -\lim_{b\to\infty} \frac{b^{x-1}}{e^b} + \frac{1}{e}$$
$$-\lim_{b\to\infty} \frac{b^{x-1}}{e^b} = \frac{\infty}{\infty}$$

Entonces aplicamos la regla de L'hopital α veces

$$-\lim_{b\to\infty} \frac{b^{x-1}}{e^b} = -\lim_{b\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(\alpha-1))(x-\alpha) \cdot b^{x-(\alpha+1)}}{e^b}$$

Pero $[x-(\alpha+1)]<0$, entonces:

$$-\lim_{b\to\infty} \frac{b^{x-1}}{-e^b} = -\lim_{b\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(\alpha-1))(x-\alpha)}{e^b \cdot b^{-[x-(\alpha+1)]}} = -\frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(\alpha-1))(x-\alpha)}{\infty} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{b\to\infty} \left[-e^{-t} \cdot t^{x-1} \right]_1^b = -\lim_{b\to\infty} \frac{b^{x-1}}{e^b} - \frac{1}{e} = 0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Se tendrá:

$$\int_1^{\infty} e^{-t}.t^{x-1} dt = \frac{1}{e} + (x-1) \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-t} t^{x-2} dt$$

Integrando α veces se obtiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt =$$
$$\frac{1}{e}\left[1 + (x-1) + (x-1)(x-2) + (x-1)(x-2) + \ldots. + (x-1)(x-2)\ldots(x-(\alpha-1))\right] +$$
$$+ (x-1)(x-2)\ldots(x-\alpha) \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-t} t^{x-(\alpha+1)} dt$$

Pero $[x-(\alpha+1)]<o$

Entonces:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-t}t^{x-(\alpha+1)}dt = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{e^{-t}}{t^{-[x-(\alpha+1)]}}\,dt$$

aplicando el criterio de comparación:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{-[x-(\alpha+1)]}}\,dt \angle \int_1^\infty e^{-t}dt$$

Pero

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-t}dt = -\lim_{b\to\infty} e^{-t}\Big|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b}-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

Entonces:

$\int_1^\infty e^{-t}dt$ es convergente, por lo tanto si $x>1$

$\int_1^\infty e^{-t}.t^{x-1}dt$ es convergente

Conclusión: para $x>0$ la integral impropia

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

Es convergente

Cálculo del factorial de un número aplicando la integral

Como punto de partida calcularemos la función Gamma del número 1:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t}.t^{n-1}dt$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = -e^{-\infty} + 1 = 1$$

Es posible establecer, como veremos a continuación, una fórmula de recurrencia que permite calcular la función Γ (n + 1) a partir del conocimiento de Γ (n). En efecto, reemplazando el número n por n + 1 en la Γ (n), podemos escribir:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}.t^{n}dt$$

Aplicamos la integración por partes, es decir, aplicando la fórmula:

$$\int u.dv = u.v - \int vdu$$

A dicho fin, llamemos:

$$u = t^n \quad \therefore \quad du = n\,t^{n-1}\,dt$$

$$y\ dv = e^{-t}dt \therefore v = -e^{-t}$$

Entonces

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}.t^{n}dt = t^{n}e^{-t}\Big|_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} e^{-t}.t^{n-1}dt = 0 + n\Gamma(n)$$

Si aplicamos este resultado en forma reiterada a partir de esta expresión, estaremos en condiciones de calcular el valor de Γ (n) para cualquier número natural n:

En efecto:

Γ (2) = 1 . Γ (1) = 1!

Γ (3) = 2 . Γ (2) = 2 . 1 = 2!

Γ (4) = 3 . Γ (3) = 3 . 2 . 1 = 6 = 3!

. . . ……………………………….

Γ (n) = (n − 1) . Γ (n - 1) = (n − 1) . ... . 3 . 2 . 1 = (n − 1)!

Γ (n + 1) = n . Γ (n) = n . (n − 1) . ... . 3 . 2 . 1 = n!

Extensión del concepto de la función Gamma para n∈R⁺n

La función Gamma, como el factorial de un número, son en última instancia el producto de sucesiones de números. Sin embargo, solamente son comparables entre sí cuando se trata del factorial de un número entero positivo.

Ejemplo: Si por algún procedimiento adecuado podemos llegar a determinar la función $\Gamma(1{,}5)$ también podremos calcular en forma directa, las sucesivas funciones gamma cuyo argumento difiere del de la anterior en una unidad:

$$\Gamma\,(2{,}5) = 1{,}5.\ \Gamma\,(1{,}5)$$

$$\Gamma\,(3{,}5) = 2{,}5.\ \Gamma\,(2{,}5) = 2{,}5.\ 1{,}5.\ \Gamma\,(1{,}5)$$

etc., y también:

$$\Gamma\,(0{,}5) = -0{,}5.\ \Gamma\,(-\ 0{,}5)$$

Veremos, a titulo de ejemplo, el cálculo de la función $\Gamma\,(0{,}5)$. Aplicando la definición:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}.t^{n-1}dt$$

$$\Gamma(0{,}5) = \int_0^\infty e^{-t}.t^{(0{,}5-1)}dt$$

$$\Gamma(0{,}5) = \int_0^\infty e^{-t}.t^{-0{,}5}dt$$

$$\Gamma(0{,}5) = \int_0^\infty e^{-t}.t^{-0{,}5}dt$$

Introduzcamos el cambio de variables:

$$t = x^2 \quad dt = 2x\ dx$$

$$\therefore \quad \Gamma(0{,}5) = \int_0^\infty e^{-x^2}.x^{-1}2xdx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

A continuación, elevemos ambos miembros de esta igualdad al cuadrado. Obtendremos

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)$$

Como el resultado de la integral definida es independiente de la variable de integración utilizada, podemos cambiar el nombre de la misma en la segunda integral, con lo que obtenemos

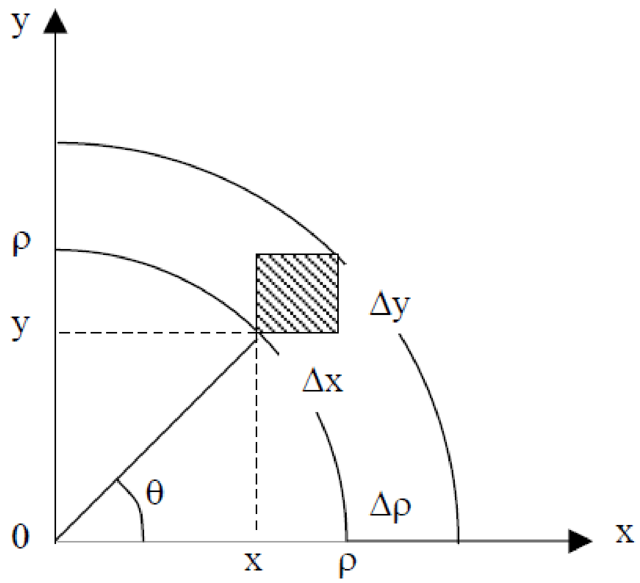
$$\Gamma^2(0{,}5) = 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)$$

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4\left(\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-x^2}dx.\lim_{y\to\infty}\int_0^y e^{-y^2}dy\right)$$

Esto permite agrupar ambas integrales, así:

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\int_0^x\int_0^y e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Trataremos ahora de trasladar esta integral doble a un sistema de coordenadas polares. En la figura siguiente, consideremos un punto de coordenadas cartesianas x e y. Llamemos ρ a la distancia del punto al origen de coordenadas. Evidentemente, las coordenadas polares de dicho punto son ρ y θ.



Notemos que la integral doble o integral de superficie anterior está circunscripta a la región del plano delimitada por las rectas

$0 \leq x \leq \infty$ y $0 \leq y \leq \infty$

es decir, al primer cuadrante. Por lo tanto, en coordenadas polares, los límites de integración son, respectivamente,

Para ρ, 0 e ∞

y para θ, 0 y $\pi/2$

En el gráfico anterior se advierte que si introducimos un incremento Δρ del radio ρ, el producto de los incrementos correspondientes Δx y Δy , sobre los ejes x e y respectivamente, es igual al área A del rectángulo rayado. En efecto:

$A = \Delta x \,.\, \Delta y$

En el lìmite, si consideramos un incremento diferencial dρ, el area elemental del rectángulo correspondiente es precisamente el producto de las diferenciales en x e y:

dA = d x . dy

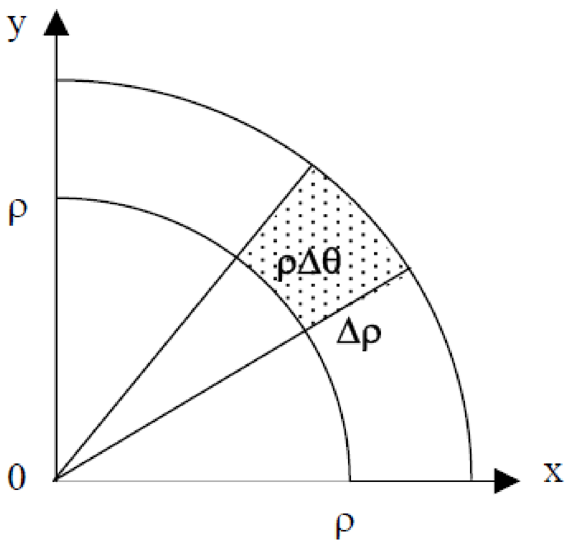
Pasaremos ahora a expresar la integral doble en coordenadas polares. Ya vimos cómo se modifican los límites de integración. Por su parte, las variable "x" e "y" pasarán a ser, respectivamente:

$x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho$ sen θ Y por tanto, $x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) = \rho^2$

El incremento Δρ en el radio ρ implica que el rectángulo elemental se ha transformado en un trapecio curvilineo limitado por las prolongaciones de los radios y por dos arcos elementales, cuya longitud Δλ promedio es igual al radio por la longitud del arco, es decir:

$$\Delta\lambda = \rho\, \Delta\theta$$

como puede verse en la figura siguiente:



El área del trapecio elemental es ahora

$$dA = \rho\, .\, d\theta\, .\, d\rho$$

Reemplazando en la $\Gamma^2(0{,}5) = 4 \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \int_0^x \int_0^y e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ los valores obtenidos hasta aquí,

obtenemos la función Γ expresada en coordenadas polares:

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\rho d\theta d\rho = 4\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

Si llamamos

$$u = -\frac{1}{2}e^{-\rho^2}$$

la diferencial correspondiente es:

$$du = \rho e^{-\rho^2} d\rho$$

Al introducir este resultado en la ecuación (1.5), la misma se puede calcular en forma directa procediendo así:

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = -4\int_0^\infty d\left(\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

Efectuando operaciones:

$$\Gamma^2(0{,}5) = -2e^{-\rho^2}\Big|_0^\infty . \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.\frac{\pi}{2} = \pi$$

Es decir:

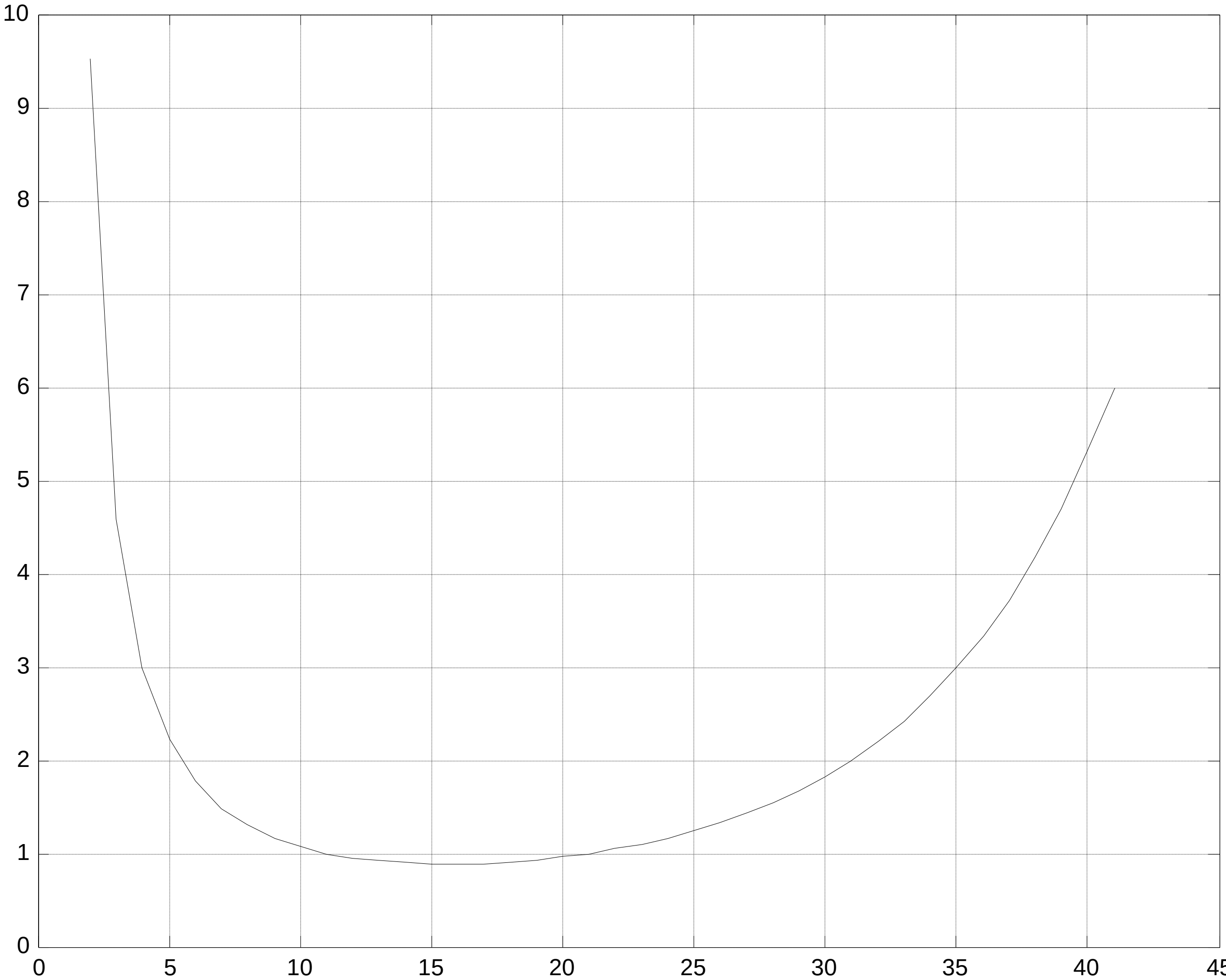
$$\Gamma\ (0{,}5) = \sqrt{\pi}$$

A partir de tal conclusión, podemos definir los valores de la función gamma para todos los números fraccionarios que difieren de 0,5 en un número entero cualquiera. Por ejemplo:

$$\Gamma(1{,}5) = 0{,}5.\Gamma(1{,}5) = 0{,}5.\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(2{,}5) = 1{,}5.\Gamma(1{,}5) = 1{,}5.0{,}5.\sqrt{\pi} = 0{,}75\sqrt{\pi}$$

Gráfico de la función Gamma para n∈R⁺



SECCIÓN I *K*

Extensión de La Función Gamma a los P^{-}

En caso de la función gamma de números fraccionarios negativos, es posible calcular su valor a partir de la expresión

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \Rightarrow \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

Ejemplos:

$$\Gamma(-0{,}5) = \frac{\Gamma(0{,}5)}{-0{,}5} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-1{,}5) = \frac{\Gamma(-0{,}5)}{-1{,}5} = -2.\left(-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

Etc.

Existen tablas calculadas para otros valores entre 0 y 1.A partir de las mismas se puede obtener el valor de Γ para cualquier valor fraccionario que difiera de aquellos en una unidad o un número entero de unidades, como hemos hecho hasta aquí. Lo que equivale a decir que es posible calcular Γ para cualquier número real, con excepción de cero y de los números enteros negativos, para los cuales no existe la función gamma, como se verá en a continuación.

Aplicando también la fórmula

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \Rightarrow \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

para el cálculo de la función Γ (0), encontramos que la misma no existe, pues implica una división por cero. Igualmente, por reiteración, podemos verificar que tampoco existe la función Gamma de cualquier número entero negativo.

$$\Gamma(1) = \frac{\Gamma(2)}{1} = 1$$

$$\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty$$

Reiterando:

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

$$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-1)}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty$$

etc.

En general, si n es un número entero positivo, entonces

$$\Gamma(-n) = \pm\infty$$

Ya hemos visto que, por el contrario, la función Gamma sí existe para números negativos fraccionarios.

Podemos extraer como conclusión que la función gamma es continua para todo n excepto en los puntos (Polos de la función): n = 0, - 1, - 2, - 3, etc.

Grafico de la función gamma entre 0 y 1

El gráfico siguiente muestra la curva para los números reales positivos comprendidos entre 0 y 1, tomados cada dos centésimas. Pero el método es extensible a cualquier otro caso

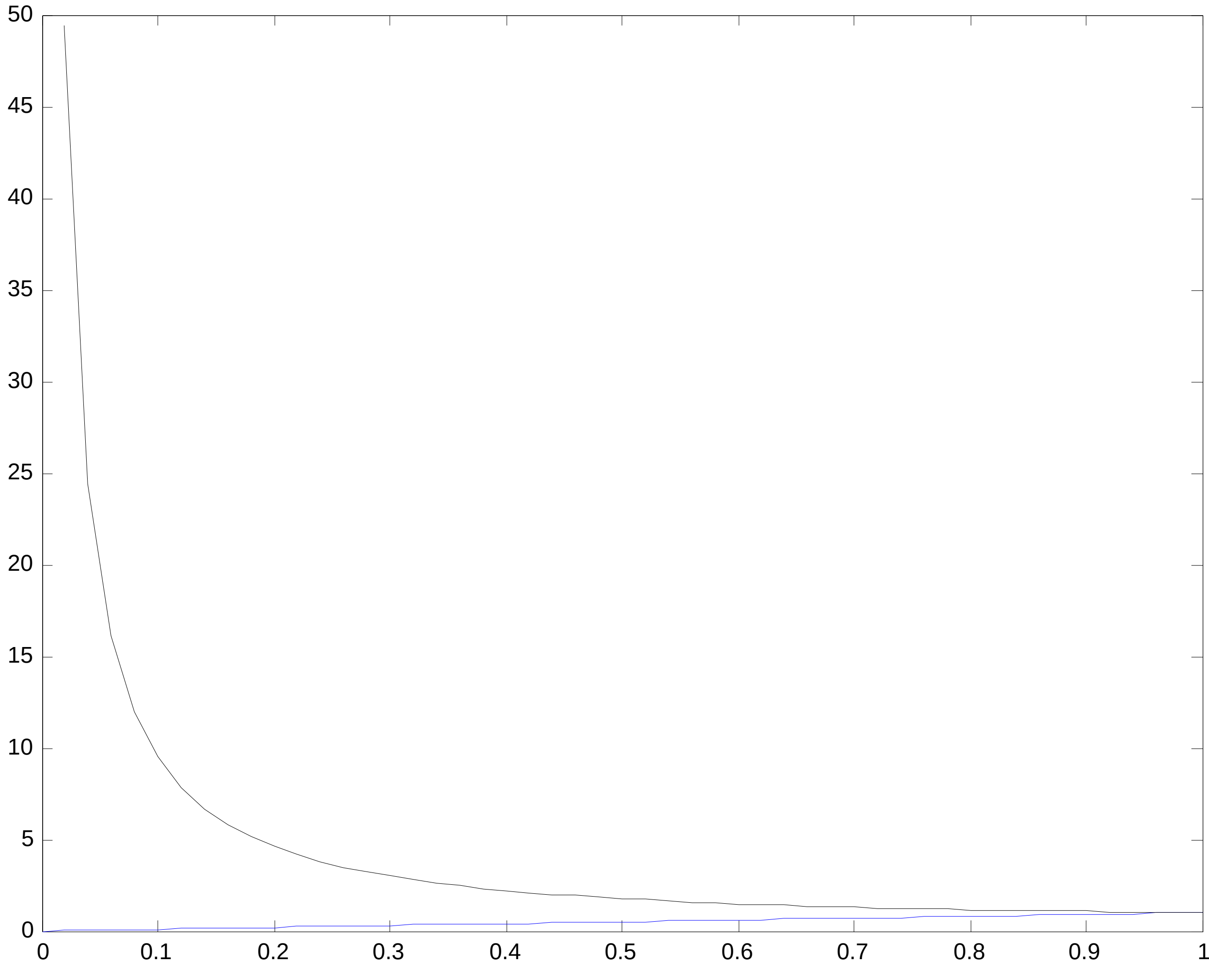
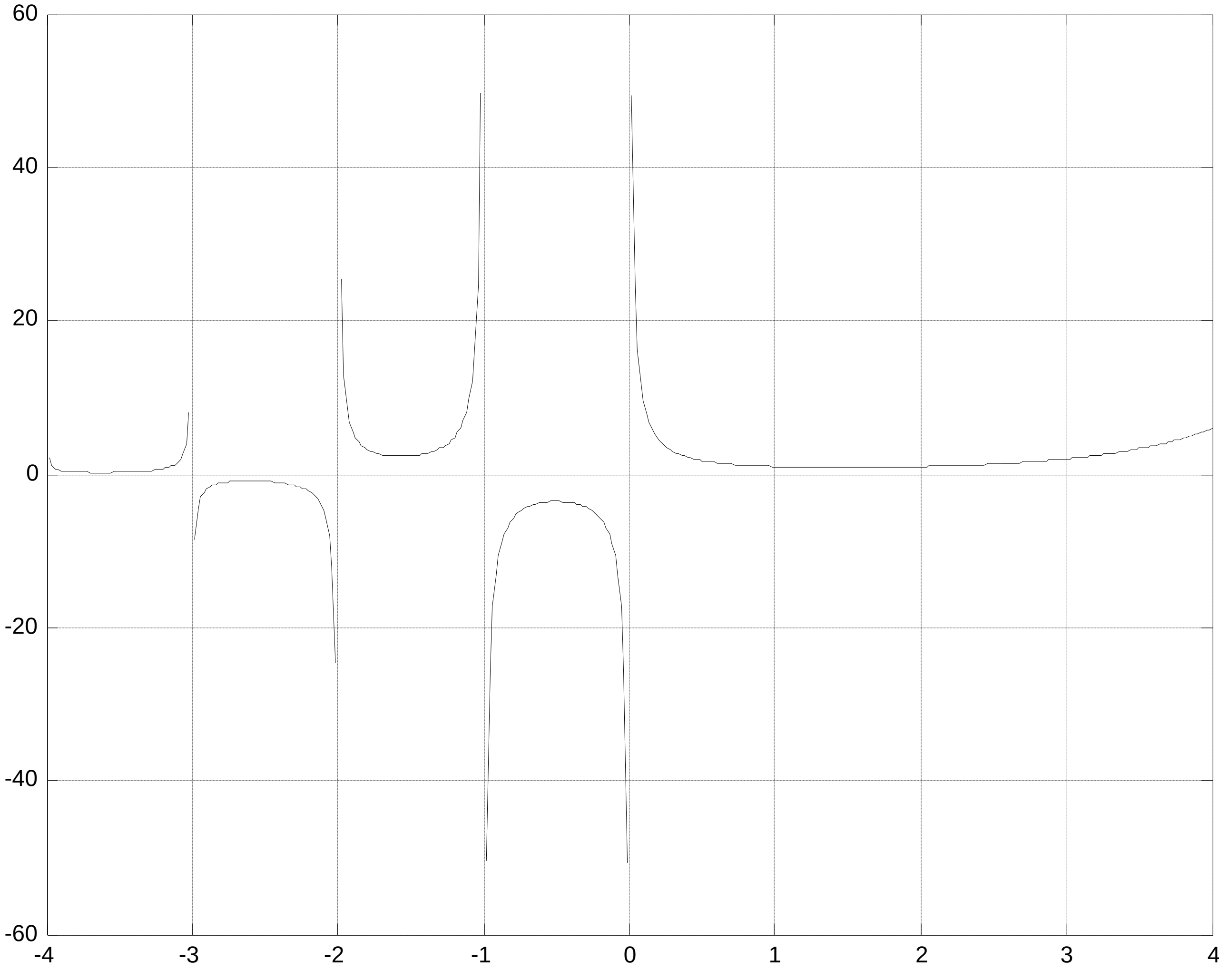


Gráfico de la función Gamma para n∈{P-z⁻}

El gráfico siguiente muestra las curvas determinada por $\Gamma(x)$ para los números reales comprendidos entre
-4 y 4, tomados cada dos centésimas. Se distinguen claramente los polos en los enteros negativos y cero.



SECCIÓN I *N*

Ampliación de la función gamma al plano complejo

En esta parte ampliaremos su aplicación en el plano complejo. Para ello definiremos esta función en términos de producto infinito del tipo que aparece en el teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass

Sea $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ una sucesión (puede ser también un conjunto finito) de números complejos distintos de cero y tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^2} \langle \infty$$

Si $g_{(z)}$ es una función entera (es decir analítica en todo el plano complejo) y ℓ un número natural, la función $f_{(z)}$ definida como

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\ell} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{a_k}\right) e^{-\frac{z}{a_k}} \qquad (1)$$

es entera. El producto converge uniformemente en discos cerrados, tiene ceros en $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y tiene un cero de orden ℓ en z=0, pero no posee ningún otro cero. Recíprocamente, cualquier función entera $f_{(z)}$ con las propiedades citadas puede ser escrita de la forma (1).
Los números $\{a_k\}$ pueden aparecer repetidos un número finito de veces para dar cuenta de la existencia de ceros múltiples.

La función gamma Γ(z)

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)....(\alpha+n)}$$

Se propone reemplazar a α por z, es decir ampliar al conjunto de números complejos, se tendrá:

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^{z}}{z(z+1)(z+2)(z+3)....(z+n)}$$

Luego:

$$n^z=e^{z.\ln(n)}=e^{z\left(\ln(n)-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n})\right)}.e^{z.(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n})}$$

Luego hacemos:

$$\gamma_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n)$$

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$$

Esta ultima es la llamada constante de Euler-Mascheroni

Se puede escribir:

$$n^z=e^{z.\ln(n)}=e^{-z\gamma_n}.e^{z.(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n})}$$

Entonces:

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^{z}}{z(z+1)(z+2)(z+3)....(z+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{z}}{z(z+1)(z+2)(z+3)....(z+n)\frac{1}{n!}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{\frac{z(z+1)}{1}\frac{(z+2)}{2}\frac{(z+3)}{3}....\frac{(z+n)}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)....\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

Reemplazando n^z por $e^{-z\gamma_n}.e^{z.(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n})}$ se tendrá:

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-z\gamma_n}.e^{z.(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n})}}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)....\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}e^{-z\gamma_n}\frac{.e^{(z+\frac{z}{2}+\frac{z}{3}+..+\frac{z}{n})}}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)....\left(1+\frac{z}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-z\gamma_n}\frac{1}{z}.\frac{e^z}{1+z}.\frac{e^{\frac{z}{2}}}{1+\frac{z}{2}}.\frac{e^{\frac{z}{3}}}{1+\frac{z}{3}}...\frac{e^{\frac{z}{n}}}{1+\frac{z}{n}}$$

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}e^{-z\gamma_n}\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{n}}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)}=e^{-z\gamma}\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{n}}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)}=e^{-z\gamma}\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{z}{n}}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}$$

$$\Gamma(z)=\left[e^{z\gamma}z\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z}{n}}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]^{-1}$$

Donde g(z)=zγ ,siendo $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right]=0{,}5772\ldots$

es una función entera, por lo tanto de acuerdo al teorema de Weierstrass se deduce que $\Gamma(z)$ se trata de una función analítica en todo el plano complejo salvo en $z\in\{0,-1,-2,\ldots\}$, puntos en el que presenta polos simples: es por lo tanto una función meromorfa (analítica salvo en los puntos en los que posee polos)

SECCIÓN I *O*

Equivalencia entre la definición de Weierstrass y la dada por Euler

Desarrollando

$$\Gamma(z)=\left[z\,e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{K}}\right]^{-1}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}G(z)=z\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)z}\right]\left[\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{K}}\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)z}\right]\left[\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{K}}\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\lim_{n\to\infty}\left[e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)z}e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\lim_{n\to\infty}\left[e^{\left(\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)\right)z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\lim_{n\to\infty}e^{-\ln(n)z}\left[\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\lim_{n\to\infty}n^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdot\cdot\frac{n}{n-1}\right)^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}\left(1+\frac{z}{k}\right)$$

Y llegamos a lo que pretendíamos demostrar

$$\Gamma(z) = \left[z\, e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{K}}\right]^{-1} = \left[z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]^{-1}$$

SECCIÓN I *P*

<u>La función Beta o Integral de primera especie</u>

Esta función se define de la siguiente manera

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad ,\text{donde } x \in P^+ \text{ e } y \in P^+$$

Es una función simétrica o sea $\beta(x,y) = \beta(y,x)$

Demostración:

Aplicamos un cambio de variables en $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

$1-t = u \Rightarrow -dt = du$

$t = 0 \Rightarrow u = 1$

$t = 1 \Rightarrow u = 0$

$$\therefore \int_1^0 (1-u)^{(x-1)}u^{y-1}(-du) = \int_0^1 u^{(y-1)}(1-u)^{x-1}du = \beta(y,x)$$

SECCIÓN I *Q*

Fórmula de recurrencia

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(X)\Gamma(Y)}{\Gamma(X+Y)}$$

Al igual que en la función Gamma, para calcular la función Beta se emplea una fórmula de recurrencia. Si aplicamos la integración por partes en la función Beta se tendrá:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \left\{ \begin{array}{l} u = (1-t)^{y-1} \Rightarrow du = (y-1)(1-t)^{y-2}dt \\ dv = t^{x-1}dt \Rightarrow v = \int t^{x-1}dt = \dfrac{t^x}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{(1-t)^{y-1}\frac{t^x}{x}\Big|_0^1}_{0} + \int_0^1 \frac{(y-1)}{x}\cdot t^x(1-t)^{y-2}dt = \frac{(y-1)}{x}\beta(x+1,y-1)$$

Aplicando la fórmula de recurrencia se tendrá:

$$\beta(x,y) = \frac{(y-1)(y-2)....3.2.1}{x(x+1)(x+2)...(x+y-2)}\cdot\beta(x+y-1,1)$$

Y como $\beta(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{t^x}{x}\Big|_0^1 = \frac{1}{x}$ entonces $\beta(x+y-1,1) = \frac{1}{x+y-1}$

Luego

$$\beta(x,y)=\frac{(y-1)(y-2)....3.2.1}{x(x+1)(x+2)...(x+y-2)}\cdot\beta(x+y-1,1)=$$

$$\beta(x,y)=\frac{(y-1)(y-2)....3.2.1}{x(x+1)(x+2)...(x+y-2)}\cdot\frac{1}{(x+y-1)}=$$

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(y)}{x(x+1)(x+2)...(x+y-1)}\cdot\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x)}=$$

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(X)\Gamma(Y)}{\Gamma(X+Y)}$$

En esta ecuación se ve claramente la intima relación de la función Beta con la función Gamma

SECCIÓN I *R*

<u>Convergencia de la función beta</u>

$\beta(x,y)=\int_{0^+}^{1^-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ es convergente para $x>0$ e $y>0$

Esta integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$\beta(x,y)=\int_{0^+}^{1^-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1^-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$\int_{0^+}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^{1-x}}<\infty$ si 1-x< 1 □ x> 0

$\int_{\frac{1}{2}}^{1^-}\frac{dt}{(1-t)^{1-y}}<\infty$ si 1-y< 1 □ y> 0

Por lo expuesto $\beta(x,y)=\int_{0^+}^{1^-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ es convergente para $x>0$ e $y>0$

Expresión trigonométrica de la función Beta

Partiendo de $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ y aplicando el siguiente cambio de variables

$$\left\{\begin{array}{l} t = sen^2\varphi \Rightarrow dt = 2sen\varphi\cos\varphi d\varphi \\ t = 0 \Rightarrow \varphi = arcsent^{\frac{1}{2}} = ar\cos en0 = 0 \\ t = 1 \Rightarrow \varphi = arcsent^{\frac{1}{2}} = ar\cos en1 = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ se obtiene}$$

$$\beta(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(sen^2\varphi\right)^{x-1}\left(1 - sen^2\varphi\right)^{y-1} 2sen\varphi\cos\varphi d\varphi =$$

Luego

$$\beta(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen^{2x-1}\varphi.\cos^{2y-1}\varphi)d\varphi =$$

Que es la expresión trigonométrica de la función Beta.

SECCIÓN I *T*

La función Beta con límite infinito

Si a la función $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ se le hace el siguiente cambio de variables

$$\left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{u}{1+u}\Rightarrow 1-t=1-\dfrac{u}{1+u}=\dfrac{1+u-u}{1+u}=\dfrac{1}{1+u}\Rightarrow -dt=-\dfrac{1}{(1+u)^2}du \\ \dfrac{1}{1+u}=1-t\Rightarrow 1+u=\dfrac{1}{1+t}\Rightarrow u=\dfrac{1}{1-t}-1=\dfrac{1-1+t}{1-t}\Rightarrow u=\dfrac{t}{1-t} \\ t=0\Rightarrow u=\dfrac{t}{1-t}=0 \\ t=1\Rightarrow u=\dfrac{t}{1-t}=\dfrac{1}{0}=\infty \end{array}\right\}$$

Se obtiene

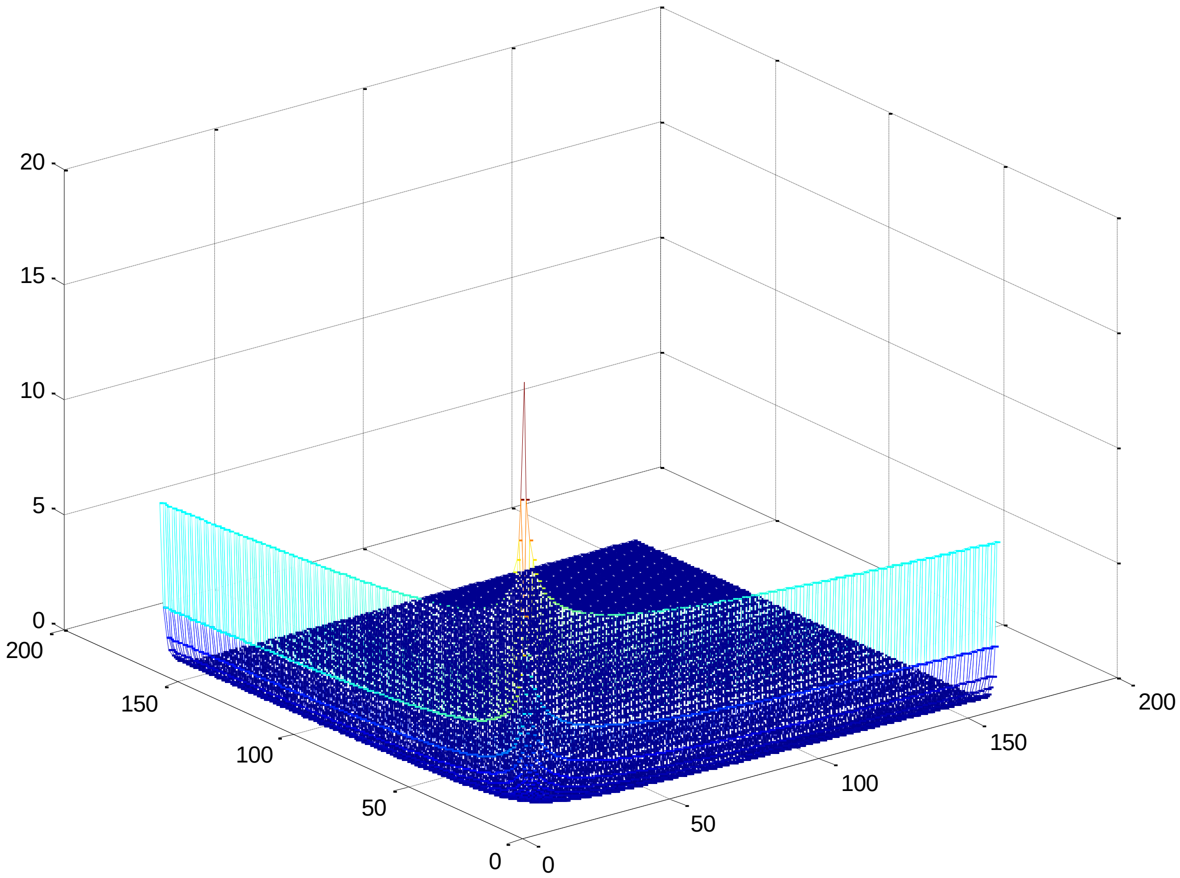
$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-y)^{y-1}dt=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}}\frac{1}{(1+u)^{y-1}}\frac{1}{(1+u)^2}du=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1+y-1+2}}du$$

Luego

$$\beta(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$$

Que representa la función Beta con límite infinito

<u>Gráfico de la función Beta</u>



SECCIÓN IV

Aplicación de las ecuaciones Eulerianas

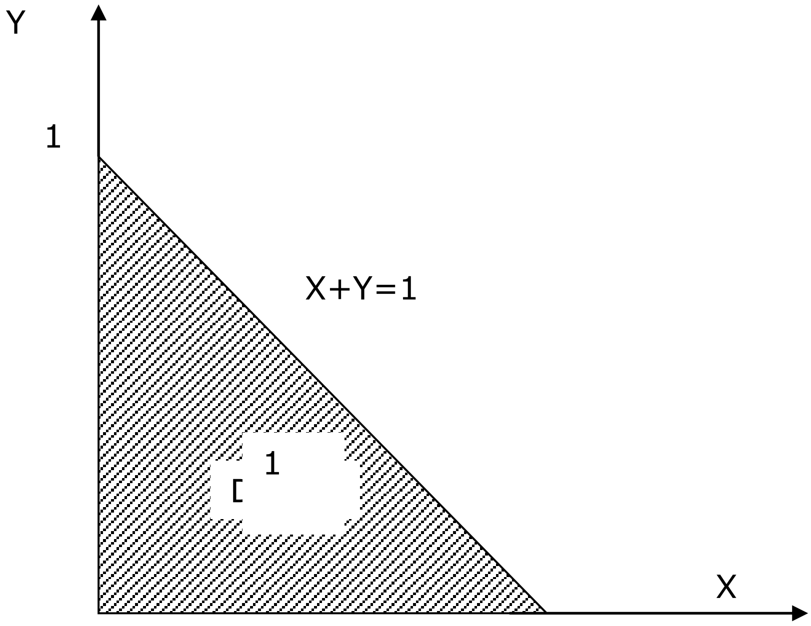
Momento de una superficie respecto de los ejes de coordenadas:

Consideremos el dominio, D, definido por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$x + y \leq 1$$

que está representado por el triángulo rayado en la figura siguiente:



Se trata de calcular el momento de un cierto orden (En este caso, P y Q) de la superficie de un dominio D, respecto de los ejes x e y. Dicho momento está definido por la ecuación

$$M = \iint_D X^P . Y^Q dx.dy = \int_0^1 X^P.dx \int_0^{y=1-x} Y^Q.dy$$

Resolviendo la segunda de estas integrales, encontramos

$$M = \iint_D X^P . Y^Q dx.dy = \int_0^1 X^P.dx \left(\frac{Y^{Q+1}}{Q+1} \right)_0^{y=1-x}$$

$$M = \frac{1}{Q+1} \int_0^1 X^P (1-X)^{Q+1}.dx \qquad (1)$$

Si recordamos la función Beta, o Euleriana de primera especie

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta+1}.dx$$

al aplicarla en este caso podemos hacer:

$$\alpha - 1 = P \Rightarrow \alpha = P + 1$$
$$\beta - 1 = Q + 1 \Rightarrow \beta = Q + 2$$

Obtendremos:

$$M = \frac{1}{Q+1} B(P+1, Q+2)$$

Y de acuerdo a la relación entre B y Γ entre si :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

podemos expresar M como:

$$M = \frac{1}{Q+1} B(P+1, Q+2) = \frac{1}{Q+1} \frac{\Gamma(P+1).\Gamma(Q+2)}{\Gamma(P+Q+3)}$$

Recordando la relación que existe entre dos funciones Γ cuyos argumentos son correlativos:

$$\Gamma\ (Q+2) = (Q+1).\ \Gamma\ (Q+1\ )$$

si reemplazamos y simplificamos Q+1 en numerador y denominador, encontramos finalmente que el momento de la superficie rayada respecto de los ejes se puede expresar mediante la fórmula siguiente:

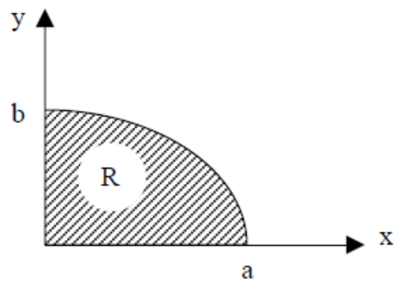
$$M = \frac{\Gamma(P+1).\Gamma(Q+1)}{\Gamma(P+Q+3)} \qquad (2)$$

SECCIÓN I *W*

Integral o Ecuación de Dirichlet:

En este apartado vamos a referirnos a una ecuación estrechamente relacionada con la anterior, y que se conoce como Integral de Dirichlet.

Consideremos un recinto R definido por las ecuaciones: $\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{A} + \left(\frac{y}{b}\right)^{B} \leq 1 \end{array} \right\}$



Esta ecuación tiene como representación en el plano un sector ubicado en el primer cuadrante, como se ve en la figura adjunta.
En función de los valores de a, A, b y B, dicho sector puede ser un cuarto de elipse ,cuyo caso, A = B = 2. , un cuarto de círculo, etc. e incluso puede, eventualmente, englobar al triángulo del caso anterior.
En todos los casos se verifica que si

$$x = 0 \text{ , entonces } 0 \leq y \leq b$$
$$y \text{ si } y = 0 \text{ , entonces } 0 \leq x \leq a$$

Por su parte, la ecuación de la curva límite superior del recinto es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^A + \left(\frac{y}{b}\right)^B = 1$$

Calcularemos, como en el caso anterior, el momento de la superficie R respecto de los ejes x e y:

$$M = \iint_R x^P . y^Q \, dx . dy$$

En primer término expresaremos la variable "y" en función de "x". Para ello, despejamos "y"

$$\frac{y}{b} = \left\{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^A\right\}^{1/B}$$

$$y = b\left\{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^A\right\}^{1/B}$$

La integral de superficie que aparece en la ecuación puede expresarse ahora como una integral doble, cuyos límites son:
Para la primera integral, a lo largo del eje x (Véase la figura del recinto), "0" y "a". Y para la segunda, "0" y la curva límite, cuya ecuación está dada por la anterior, es decir:

$$M = \iint_R x^P . y^Q \, dx . dy = \int_0^a x^P dx \int_0^{b\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^A\right\}^{1/B}} y^Q \, dy$$

Para simplificar, vamos a llamar "v" al término encerrado entre llaves

$$v = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^A$$

$$y = b . v^{1/B}$$

$$v = \left(\frac{y}{b}\right)^B$$

Haremos, también:

$$u = \left(\frac{x}{a}\right)^A \qquad \therefore \qquad v = 1 - u, \qquad y \qquad u + v = 1$$

De aquí:

$$x = a . u^{1/A} \qquad \therefore \qquad dx = \frac{a}{A} u^{(1/A)-1} du = a . A^{-1} . u^{(1-A)/A} du$$

$$y = b . v^{1/B} \qquad \therefore \qquad dy = \frac{b}{B} v^{(1/B)-1} dv = b . B^{-1} . v^{(1-B)/B} dv$$

Ya vimos que si y = 0, entonces x = a. Además, a partir de las ecuaciones anteriores se verifica que si

$$x = a, \qquad \therefore \qquad u = 1.$$

En estas condiciones, la integral doble puede expresarse así:

$$M = \iint_R = \int_0^1 a^P u^{P/A} a . A^{-1} . u^{(1-A)/A} du . \int_0^{1-u} b^Q v^{Q/B} b . B^{-1} . v^{(1-B)/B} dv$$

Operando en estas integrales, se pueden simplificar como sigue:

$$M = \iint_R = a^{P+1} . b^{Q+1} A^{-1} . B^{-1} \int_0^1 u^{[(P+1)/A]-1} \, du \, . \int_0^{1-u} v^{[(Q+1)/B]-1} \, dv$$

Obsérvese la semejanza de esta ecuación con la (1) con la salvedad que, en este caso, los exponentes en los integrandos, en lugar de P y Q son, respectivamente:

$$\frac{P+1}{A} - 1 \qquad y \qquad \frac{Q+1}{B} - 1$$

Esto nos autoriza a aplicar el mismo resultado (2) que obtuvimos en la sección anterior. Que, con la modificación indicada aquí arriba resulta:

$$M = \iint_R = \frac{a^{P+1} . b^{Q+1}}{A\ B} \; \frac{\Gamma\left(\frac{P+1}{A}\right) \Gamma\left(\frac{Q+1}{B}\right)}{\Gamma\left(\frac{P+1}{A} + \frac{Q+1}{B} + 1\right)}$$

La ecuación de Dirichlet puede generalizarse para el caso de tres variables, en cuyo caso, para el dominio elíptico en el espacio de tres dimensiones es

$$\left(\frac{x}{a}\right)^A + \left(\frac{y}{b}\right)^B + \left(\frac{z}{c}\right)^C = 1$$

y cuyo momento respecto de los ejes viene expresado por la ecuación:

$$M = \iiint_V x^P . y^Q . z^R . dx . dy . dz$$

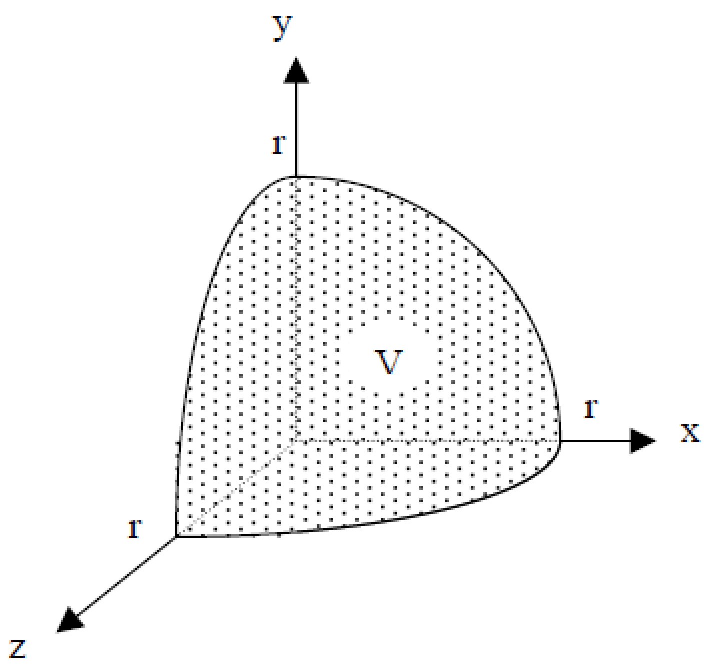
se obtiene

$$M = \iiint_V = \frac{a^{P+1} . b^{Q+1} \; c^{R+1}}{A \; B \; C} \; \frac{\Gamma\left(\frac{P+1}{A}\right) \Gamma\left(\frac{Q+1}{B}\right) \Gamma\left(\frac{R+1}{C}\right)}{\Gamma\left(\frac{P+1}{A} + \frac{Q+1}{B} + \frac{R+1}{C} + 1\right)}$$

SECCIÓN I *X*

Volumen de una esfera:

Como aplicación, la ecuación de Dirichlet puede emplearse para calcular el área o el volumen de ciertas figuras o cuerpos geométricos.
Sea que, por ejemplo, queremos calcular el volumen de una esfera. Para esto, partimos del volumen correspondiente a un octante, y luego lo multiplicamos por 8:



Para calcular el volumen, debemos hacer P = Q = R = 0
La ecuación del octante de esferoide responde a la ecuación:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{A} + \left(\frac{y}{b}\right)^{B} + \left(\frac{z}{c}\right)^{C} = 1$$

El volumen del octante de esferoide está dado por la ecuación de volumen (integral triple) siguiente:

$$V = \iiint_V x\ y\ z\ \ dx\ dy\ dz = \frac{a\ b\ c}{A\ B\ C}\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{A}\right)\Gamma\left(\frac{1}{B}\right)\Gamma\left(\frac{1}{C}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+1\right)}$$

Si queremos calcular el volumen de la esfera, puesto que la ecuación de ésta es:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = 1$$

se han de cumplir además las relaciones siguientes:
a = b = c = r
y A = B = C = 2
Finalmente, el volumen Ve de la esfera será:
Ve = 8 V
Reemplazando valores, obtenemos:

$$V_e = 8\ \frac{r^3}{2^3}\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{r^3\ 2\ \sqrt{\pi}^{\,3}}{\frac{3}{2}\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$V_e = \frac{2\,r^3\sqrt{\pi^3}}{\frac{3\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{4}{3}\ \pi\ r^3$$

SECCIÓN II *A*

<u>Origen de la Función z de Riemann</u>

La historia de ésta función comenzó, probablemente, con Nicole Oresme (1323-1382), quien demostró por vez primera que la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$$

Es divergente. Es decir la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Diverge.

La demostración que realizó Oresme es sencilla:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\ldots>1+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\ldots=$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ldots$$

Esta serie diverge porque no existe una cota superior para las sumas parciales.

La suma de los dos primeros términos es 1,5. La suma de los dos términos siguientes es 1/3+1/4, la cual es mayor que 1/4+1/4=1/2. La suma de los cuatro términos siguientes, 1/5+1/6+1/7+1/8, es mayor que 1/8+1/8+1/8+1/8=1/2; y así sucesivamente. En general la suma de 2^n términos que terminan con $1/(2)^{n+1}$ es mayor que $2^n/2^{n+1}=1/2$. La sucesión de sumas parciales no esta acotada superiormente. Si n=2k, la suma parcial S_n es mayor que k/2. La serie armónica diverge.

En 1650, Pietro Mengoli planteó el problema de evaluar la serie:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\ldots\ldots..$$

El carácter de esta serie se evalúa aplicando el criterio de Rabee:

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si existe $l=\text{lím}\left[n\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\right]$ y $l > 1$, entonces $\sum a_n$ converge, si $l >1$, entonces $\sum a_n$ diverge. (si l =1 nada puede asegurarse)

Luego, aplicando el criterio de Raabe a la serie $\sum\frac{1}{n^2}$, se tiene:

$$l=\text{lím}\left[n\left(1-\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n-1)^2}}\right)\right]=\text{lím}\left[n\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right]=\text{lím}\left[n\left(1-\frac{(2n-1)}{n^2}\right)\right]=\text{lím}\frac{2n-1}{n}=2>1\Rightarrow$$

$$\sum\frac{1}{n^2}\quad\text{converge.}$$

SECCIÓN II B

Euler y la Función Z de Riemann

El problema de Basilea

El problema era, entonces, hallar el valor al cual la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Esta cuestión fue atacada Sin éxito por John Wallis, Gottfried Von Leibnitz, y Jacob Bernoulli. En su "Tractatus de seriebus infinitis", publicado en1689 en Basilea, Jacob escribió:" si alguien encuentra y nos comunica eso que hasta ahora eludió nuestros esfuerzos, grande será nuestra gratitud". A partir de entonces se conoció como "*el problema de Basilea*" y fue Johan Bernoulli, hermano menor de Jacob y en ese entonces mentor de Euler, quien seguramente le sugirió investigar la evaluación de la suma. Después de calcular el valor de la suma con veinte decimales correctos:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\ldots\ldots = 1{,}6449340668\ 22643647$$

Euler reportó en 1735 que había encontrado la elegante e inesperada fórmula:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\ldots\ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Para Euler era bien conocida la expansión en serie de Taylor de la función seno:

$$\operatorname{sen}x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots$$

Dividiendo por x se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\ldots$$

Euler sabía que si $p_{(x)}$= es un polinomio de grado n con raíces distintas de cero α_1, $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ y tal que $p_{(0)}=1$, entonces se puede escribir:

$$p(x)=\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_3}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)$$

Ahora bien, las raíces (ceros) de senx/x se encuentran precisamente en $x=n.\pi$, donde $n=\pm1\pm2\pm3\ldots$..

La genial idea de Euler fue pensar que lo que era válido par un polinomio ordinario permanecería válido para un "polinomio infinito" . Entonces se puede expresar esta serie infinita como productos de factores lineales dadas las raíces, de la misma forma que hacemos con los polinomios finitos:

$$\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\ldots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$

Si se efectúa ese producto y se agrupan todos los términos en x^2 se tiene.

$$\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}\ldots\right)x^2+\ldots\ldots$$

Igualando:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+....=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}...\right)x^2+....$$

Ahora solamente se tiene que igualar los coeficientes de x^2 para tener la igualdad:

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}...\right)$$

Y elegantemente concluir que:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}...=\frac{\pi^2}{6}$$

El problema de Basilea se había resuelto.

SECCIÓN II C

Suma de los inversos de los números primos

El espectacular triunfo en la solución del problema de Basilea motivó, seguramente a Euler a considerar las series convergentes de la familia de finidas:

$\sum\frac{1}{n^k}=1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}...$, para $k\in$ (N-1),. de la cual el problema de Basilea es sólo un caso especial. En 1748 Euler ya conocía los valores para K= 2,4…..26, por ejemplo, había encontrado:

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}\ldots=\frac{\pi^4}{90} \quad \text{y} \quad 1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}\ldots=\frac{\pi^6}{245}$$

En 1737 Euler descubrió una demostración alternativa de la infinitud de los números primos, introduciendo una innovadora idea que además de permitirle establecer la divergencia de la serie:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\ldots$ de lo recíprocos de lo números primos, sentó las bases que constituyeron el punto de partida de desarrollos que condujeron a la demostración de el "*Teorema de los números primos*".

El razonamiento es el siguiente: Supongamos que la lista de los números primos es $p_1, p_2 \ldots . p_n$. Ya que todo entero positivo n se puede escribir de manera única como producto de números primos, digamos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots . p_n^{\alpha_n}$ entonces

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\frac{1}{p_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{1}{p_n^{\alpha_n}}$$

Recordando:

Si $|z|\langle 1$ entonces $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^k+\ldots$

Haciendo $z=p_i^{-\alpha_i}$, en vista que $1/p_i<1$, para todo $n\in\mathbb{N}$ se tendrá:

Aclaración: Aquí el producto es sobre todos los números primos. De ahora en adelante, sin que se diga lo contrario, la suma o producto sobre el conjunto de todos los números primos se representa con una *p* bajo la sumatoria o el productoria.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\ldots\right)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-1}}$$

Euler razonó de la siguiente manera. Tomó logaritmos en ambos miembros de la igualdad, y utilizando las propiedades de la series geométricas y sabiendo que el desarrollo en serie de Taylor de log(1-x) es:

$$\log(1-x)=-\sum\frac{x^n}{n} \quad \text{si } |x|<1, x\in\Re$$

Continuó:

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)=\log\left(\prod_p\frac{1}{1-p^{-1}}\right)=\sum_p\log\left(\frac{1}{1-p^{-1}}\right)=\sum_p-\log\left(1-p^{-1}\right)$$

$$= \sum_p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} + ... \right) = \left(\sum_p \frac{1}{p} \right) + \sum_p \frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{4p^2} + ... \right)$$

$$< \left(\sum_p \frac{1}{p} \right) + \sum_p \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + ... \right) = \left(\sum_p \frac{1}{p} \right) + \left(\sum_p \frac{1}{p(p-1)} \right)$$

$$= \left(\sum_p \frac{1}{p} \right) + C$$

Para una constante C<1. Puesto que la suma de los recíprocos de los primeros n números enteros positivos es asintótica a log(n), se tiene :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx \log(n) \text{ si } n \to \infty$$

Que sustituyendo en la última igualdad y despreciando el valor de C cuando n se acerca a infinito, Euler llegó a la conclusión de que:

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \approx \log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right) \text{ si } n \to \infty$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} ... \approx \log\log(\infty) \to \infty$$

De esta manera Euler concluyó que la suma de los inversos de los números primos es infinita.

Otra idea para establecer la divergencia de la serie de los recíprocos de los números primos consistió en considerar la serie:

$\sum \frac{1}{n^s}$; reemplazando la variable entera k por la variable s perteneciente R>1 y en descubrir la identidad fundamental:

$$\sum \frac{1}{n^s} = \prod_{p_{primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Para comprender esta igualdad comenzamos, como en el caso anterior, considerando la siguiente serie geométrica:

$$S = \frac{1}{1-z}, \text{ de razón z y a=1}$$

$$\text{Si } |z| \langle 1 \text{ entonces } \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ... + z^k + ...$$

Haciendo $z = p^{-s}$, como $p^{-s} < 1$, se tendrá

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + ... + p^{-ks} + ...$$

Si multiplicamos esta expresión sobre todos los primos y aplicamos formalmente la propiedad distributiva tenderemos:

$$\prod_{p_{primo}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p_{primo}} \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + ... + p^{-ks} + ...\right)$$

Y por el teorema fundamental de la aritmética, cada entero $n \geq 1$ se escribe de manera única como producto de potencias de primos distintos:

$$\prod_{p_{primo}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p_{primo}} \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + ... + p^{-ks} + ...\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Es decir para $s \in \Re / s > 1$: $\sum n^{-s}$ admite la siguiente representación en productos infimitos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p_{primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Para efectuar la prueba de la proposición anterior de forma rigurosa, procedemos del siguiente modo:

Para cualquier N finito,

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p \leq N} \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + ... + p^{-ks} + ...\right) = \sum_{n \in A_N}^{\infty} n^{-s}$$

Por tratarse del producto de infinitas series absolutamente convergentes, donde la última suma se extiende sobre aquellos enteros cuyos factores son todos menores o iguales que N:

$$A_N = \left\{ n = \prod_{p \leq N} p^{e_p (con: e_p \geq 0)} \right\}$$

Entonces

$$\left| \sum_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right| \leq \sum_{n \rangle N} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

Con $\sigma = \mathrm{Re}(s)$.

Pero como la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

converge, podemos hacer que

$$\left|\sum_{p\leq N}\frac{1}{1-p^{-s}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right|\langle\varepsilon$$

Con tal de elegir $N\geq N_0(\varepsilon)$. (aclaremos que un producto infinito se interpreta como el límite de los productos parciales, del mismo modo que una serie es el límite de sumas parciales.)

Euler utilizó esta fórmula para dar una demostración analítica de la existencia de infinitos primos. Para eso observó que:

$$\lim_{s\to 1+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=+\infty \quad (s\in\Re)$$

En efecto para cada N,

$$\lim_{s\to 1+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\geq\lim_{s\to 1+}\sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s}=\sum_{n\leq N}\frac{1}{n}$$

Como la serie armónica diverge, haciendo $N\to\infty$, se confirma la anteúltima igualdad. Euler observó entonces que la igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\prod_{p_{primo}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

implica que existen infinitos primos, puesto que si sólo existieran finitos primos el $\lim_{s\to 1+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ debería ser finito.

SECCIÓN II D

Función z de Riemann

El siguiente avance importante lo realizó Bernhard Riemann (1826-1866) en 1859.En su famosa memoria de ocho páginas tituladas *Uber die anzahal der primzahlen unter einer gegeben Grösse,* Riemann introdujo la idea de reemplazar en $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ la variable real *s* por la variable compleja *s*=σ +*i*t>1, e investigar la función resultante, así como también la fórmula correspondiente a la identidad fundamental , $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p_{primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}$, de Euler, con los métodos de la teoría de funciones analíticas.

No obstante que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ es convergente si s>1/s∈ℜ, Riemann ideó una forma de extender esta función a todo el plano complejo, obteniendo una función analítica a todo punto excepto en *s*=1, en donde tiene un polo. A esta función se la conoce actualmente por el nombre, dado por Gauss, función zeta de Riemann y se denota ζ(*s*), notación introducida por su autor.

SECCIÓN II E

Estudio de la función z de Riemann

A) *La función* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ *converge absolutamente si a>1, siendo a la parte real de número complejo s, de modo que se observa que* $\varsigma(s)$ *es analítica en la región*

$$A = \{s : \mathrm{Re}(s) > 1\}$$

Sea *f*(x) definida para x>0 una función nunca creciente, entonces se tiene que:

$$\int_{n-1}^{n} f(x)dx \geq f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(x)dx \text{ ,}$$

y sumando se tiene

$$\int_{1}^{N} f(x)dx \geq \sum_{n=2}^{N} f(n) \geq \int_{2}^{N+1} f(x)dx$$

poniendo $f(x) = x^{-a}$,donde a es un entero mayor que 1, y resolviendo las integrales se tiene:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a.N^{a+1}} \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{a.2^{a+1}} - \frac{1}{a.(N+1)^{a+1}}$$

Y tomando límites y sumando 1 a cada miembro se llega a

$$1 + \frac{1}{a} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \geq 1 + \frac{1}{a.2^{a+1}}$$

Un razonamiento similar, para $f(x) = x^{-1}$ demuestra que:

$$1 + \ln(N) - \ln(1) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq 1 + \ln(N+1) - \ln(2)$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Sea R(s)<-a<-1, entonces $\left|n^{-s}\right| = n^{-a} < n^{-r}$ de modo que por la prueba de Weierstrass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente.

B) *Como ya vimos* $\zeta(s)$ *se puede expresar como.*

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Como $1 \neq \left|\frac{1}{p^{\mathrm{Re}(s)}}\right|$ *cuando R(s)≠0, ningún factor de la expresión anterior se anula si R(s)>1 y entonces* $\varsigma(s)$ *≠0 en esa región.*

Si f es una función multiplicativa y $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} h(p)$ donde $h(p) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f(p^{\alpha})$. Aplicando este resultado a $f(n) = \frac{1}{n^s}$ y observando que en este caso $h(p) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p^{s\alpha}} = \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$, reemplazando se obtiene

$$\zeta(s) = \sum_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

C*) Existe una importante relación entre la función* $\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$ *y la función gama:*

$$\varsigma(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

Recordemos que la función gamma esta dada por la siguiente expresión:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

Haciendo un cambio de variable x por $n.x$ y dividiendo ambos miembros por n^s se obtiene:

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^{\infty} e^{-x.n} x^{s-1} dx$$

Sumando respecto a n se llega a:

$$\Gamma(s).\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x.n} x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x.n} x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \text{, entonces}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

Donde el paso de la suma dentro de la integral es posible por el hecho de que $\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$ converge absolutamente como suma en n y también como integral en x.

La integral converge cuando $R(s) > 1$ ya que $\left|\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\right|$ está acotada por $\left|x^{R(s)-2}\right|$ cuando x está próxima a 0, y por $\left|x^{R(s)-1}\right| e^{-x}$ cuando x tiende a ∞.

D) *La función* $\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\int_{n}^{\infty}\dfrac{s}{t^{s+1}}dtdx$ *se extiende analíticamente en todo el plano abierto* $R(s)>0$*, de modo que en dicho semiplano la única singularidad de* $\zeta(s)$ *es un polo simple en s=1*

Supongamos que $R(s)>1$, entonces

$$\int_{1}^{\infty}x^{-s}dx=\frac{1}{1-s}x^{1-s}\Big]_{1}^{\infty}=\frac{1}{s-1}$$

$$\int_{n}^{x}\frac{s}{t^{s-1}}dx=-t^{-s}\Big]_{n}^{x}=\frac{1}{n^{s}}-\frac{1}{x^{s}}$$

luego

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x^{s}}dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{n^{s}}-\frac{1}{x^{s}}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\int_{n}^{\infty}\frac{s}{t^{s+1}}dtdx$$

Pero como

$$\left|\int_{n}^{n+1}\int_{n}^{\infty}\frac{s}{t^{s+1}}dtdx\right|\leq\left|\int_{n}^{\infty}\frac{s}{t^{s+1}}dt\right|\leq\max_{n\leq t\leq n+1}\left(\left|\frac{s}{t^{s+1}}\right|\right)=\frac{|s|}{n^{R(s)+1}}$$

Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\int_{n}^{\infty}\frac{s}{t^{s+1}}dtdx$$

Converge absolutamente cuando $R(s)>0$ y proporciona la extensión que se buscaba

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\int_{n}^{\infty}\frac{s}{t^{s+1}}dtdx$$

E) *La relación con la función gamma entonces se puede expresar como:*

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$$

Donde C es una circunferencia de radio menor que π *con centro* $x=0$ *que se recorre en el sentido de giro positivo. A partir de esta expresión se concluye que la función* $\zeta(s)$ *es analítica en todo el plano complejo a excepción del polo en* $s=1$*, es decir es una función meromorfa*.

Consideremos la integral: $\int_C \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$ tomada por el entorno *C*, donde *C* es una curva en el plano complejo que viene de +∞ cerca de eje x, acercándose al origen de coordenadas, lo rodea en su proximidad en el sentido positivo (contrario de las agujas del reloj) y retorna a +∞ manteniéndose cerca de x.

Se tiene:

$$\int_C \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}=\int_{+\infty}^{\delta}\frac{(e^{-i\pi}x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}+\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{(-\delta e^{i\theta})^s}{e^{\delta.e^{i.\theta}}-1}\frac{d(\delta e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}}+\int_{\delta}^{+\infty}\frac{(e^{-i\pi}xe^{2\pi.i})^s}{e^{xe^{2\pi.i}}-1}\frac{d(xe^{2\pi.i})}{xe^{2\pi.i}}$$

$$=-e^{-i\pi.s}\int_{+\infty}^{\delta}\frac{x^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}+i\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{(-\delta e^{i\theta})^s}{e^{\delta.e^{i.\theta}}-1}d\theta+e^{i\pi.s}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{x^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$$

$$=2i.sen(\pi s)\int_{\delta}^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx+i\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{(-\delta e^{i\theta})^s}{e^{\delta.e^{i.\theta}}-1}d\theta$$

La relación anterior es independiente del valor de δ que tomemos, siempre que sea próximo a 0, de modo que podemos tomar limites cuando δ→∞.

Si nos limitamos cuando $R(s)>1$ observamos que:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{(-\delta e^{i\theta})^s}{e^{\delta.e^{i.\pi}}-1}d\theta=\lim_{\delta\to 0}(-1)^s\delta^{s-1}.\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta e^{i\theta}}{e^{\delta.e^{i.\theta}}-1}\right)e^{i(s-1)\theta}d\theta=0.\int_{\theta=0}^{2\pi}1.e^{i(s-1)\theta}d\theta$$

Y se encuentra que:

$$\int_C \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}=2i.sen(\pi s)\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=2i.sen(\pi s).\Gamma(s)\zeta(s)$$

y ahora, aplicando la relación:

$$\Gamma(s).\Gamma(s-1)=\frac{\pi}{sen(\pi.s)}$$

se llega a:

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C\frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$$

La función $\int_C\frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$ es una función entera sin singularidades:

Partimos de la relación obtenida anteriormente:

$$\int_C\frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}=2i.sen(\pi s)\int_\delta^\infty\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx+i\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{\left(-\delta e^{i\theta}\right)^s}{e^{\delta.e^{i.\theta}}-1}d\theta$$

Y como $sen(\pi s)$ es una función entera, solo tenemos que demostrar que las integrales del segundo miembro se pueden acotar para cada valor posible de *s*. Pongamos $R(s)=a$ y fijemos un $t>\delta$ tal que $e^x>1+x^{a+1}$ cuando $x\geq t$, entonces:

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx\right|\leq\int_\delta^{+\infty}\left|\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\right|dx=\int_\delta^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{e^x-1}dx=\int_\delta^{t}\frac{x^{a-1}}{e^x-1}dx+\int_t^{\infty}\frac{x^{a-1}}{e^x-1}dx$$

$$\leq\int_\delta^{t}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx+\int_t^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=\int_\delta^{t}\frac{x^{a-1}}{e^x-1}dx+\int_t^{\infty}x^{-2}dx=\int_\delta^{t}\frac{x^{a-1}}{e^x-1}dx+\frac{1}{t}$$

Por otra parte

$$\left|\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{\left(-\delta e^{i\theta}\right)^s}{e^{\delta.e^{i.\theta}}-1}d\theta\right|\leq\int_{\theta=0}^{2\pi}\left|\frac{\left(-\delta e^{i\theta}\right)^s}{e^{\delta.e^{i.\theta}}-1}\right|d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{\delta^a}{\left|e^{\frac{1}{2}.e^{i.\theta}}\right|}d\theta$$

y como

$$\exp\left(\delta.e^{i\theta}\right)=\exp\left(\delta.\cos\theta+\delta.isen\,\theta\right)=\exp\left(\delta.\cos\theta\right).\left(\cos(\delta.sen\,\theta)\right)+isen(\delta.sen\,\theta)$$

se tiene

$$\left|\exp\left(\delta.e^{i\theta}\right)-1\right|^2=1+\exp(2\delta.\cos\theta)-2.\exp(\delta.\cos\theta).\cos(\delta.sen\,\theta)=$$
$$(1-\exp(\delta.\cos\theta))^2+2.\exp(\delta.\cos\theta).(1-\cos(\delta.sen\,\theta))$$

Y en esta expresión los términos $(1-\exp(\delta.\cos\theta))^2$ y $2.\exp(\delta.\cos\theta).(1-\cos(\delta.sen\theta))$ son ambos positivos y si δ<π no se anulan simultáneamente, de modo que existe un valor mínimo: $\min\left|\exp\left(\delta.e^{i\theta}\right)-1\right| = m(\delta)>0$, quedando:

$$\left|\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\left(-\delta.e^{i\theta}\right)^s}{e^{\delta.ei\theta}-1}d\theta\right| \leq \frac{\delta^a 2\pi}{m(\delta)}$$

De esta manera $\int_C \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$ converge para todos los valores de *s* donde la curva *C* rodea una vez el origen de coordenadas en su proximidad con sentido positivo de giro.

Por lo tanto $\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$,que hemos deducido para $R(s)>1$,se puede extender analíticamente para todos los valores de s. Las únicas singularidades que podría presentar $\zeta(s)$ podrían ser debidas al factor $\Gamma(1-s)$. Estas singularidades serian entonces los polos que presenta la función gamma en los puntos $s=1,2,....,$pero veremos que esos puntos se cancelan con ceros de la integral $\int_C \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$, a excepción de cuando $s=1$, donde existe un polo.

Veamos entonces que pasa cuando s=k es un entero:

Se tiene

$$\int_C \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = 2i.sen(\pi s)\int_\delta^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx + i\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{\left(-\delta e^{i\theta}\right)^s}{e^{\delta.e^{i.\theta}}-1}d\theta = (-1)^s\int_C \frac{z^k}{e^z-1}\frac{dz}{z}$$

Donde vemos que se han cancelado los caminos de ida y vuelta por el eje x y solo queda la aportación de la integral por el círculo *C* de radio δ alrededor del origen, en sentido positivo. Los valores de esa integral se corresponden con los coeficientes del desarrollo de la siguiente función, donde B_n son los números de Bernouilli:

$$\frac{z}{e^z-1} = 1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}B_n z^{2n}}{(2n)!}$$

Concretamente

$$\frac{(-1)^k}{2\pi}\int_C \frac{(-x)^k}{e^x-1}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z}{e^z-1}\frac{dz}{z^{2-k}}=\begin{cases}0 & 1-k<0\\ 1 & 1-k=0\\ -1/2 & 1-k=1\\ \dfrac{(-1)^{n+1}B_n}{(2n)!} & 1-k=2n\\ 0 & 1-k=2n+1\end{cases}$$

De modo que queda

$$\int_C \frac{(-x)^k}{e^x-1}\frac{dx}{x}=\begin{cases}0 & k<0\\ -2i & k=1\\ -\pi i & k=0\\ \dfrac{(-1)^n 2\pi B_n}{(2n)!} & k=1-2n\\ 0 & k=-2n+1\end{cases}$$

De esta se puede encontrar los valores para enteros negativos de $\zeta(s)$,siendo n un entero positivo.

$$\zeta(-2n)=\frac{\Gamma(2n+1)}{2\pi i}\int_C \frac{(-x)^{-2n}}{e^x-1}\frac{dx}{x}=\frac{(2n)!}{2\pi i}.0=0$$

$$\zeta(1-2n)=\frac{\Gamma(2n)!}{2\pi i}\int_C \frac{(-x)^{1-2n}}{e^x-1}\frac{dx}{x}=\frac{(2n-1)!}{2\pi i}.\frac{(-1)^n 2\pi i B_n}{(2n)!}=\frac{(-1)^n B_n}{2n}$$

$$\zeta(0)=\frac{\Gamma(1)}{2\pi i}\int_C \frac{1}{e^x-1}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2\pi i}.(-\pi i)=-\frac{1}{2}$$

Queda demostrado que la función $\zeta(\text{s})=0$ cuando $s=-2,-4,-6,\ldots$ Estos ceros que corresponden a enteros negativos se denominan ***ceros triviales***.

F) Si $R(s)\geq 1$ *entonces* $\zeta(s)\neq 0$

De la expresión $\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ se deduce que $\zeta(s)\neq 0$ si $R(s)>1$ por lo tanto queda solo queda demostrar este resultado cuando $R(s)=1$.

Supongamos que $s=a+it$ donde a y t son números reales y $a>1$.

Primero vamos a demostrar que $\left|\left(\zeta^3(a).\zeta^4(a+it)\right).\zeta^2(a+i2t)\right|\geq 1$.

Dado que la serie $\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ converge absolutamente cuando $R(s)=a$, el resultado anterior se deduce si lo demostramos para los factores correspondientes a cada número primo independientemente , esto es, si demostramos que para cada número primo p se tiene

$$\left|\left(1-\frac{1}{p^{a}}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{p^{a+it}}\right)^{4}\left(1-\frac{1}{p^{a+2it}}\right)^{2}\right|\leq 1$$

Para simplificar, pondremos $r=\frac{1}{p^{a}}$ y $e^{i\sigma}=\frac{1}{p^{a+2it}}$, de modo que tendremos $0<r<1$ y la expresión anterior quedará como

$$\left|(1-r)^{3}\left(1-re^{i\sigma}\right)^{4}\left(1-re^{i2\sigma}\right)^{2}\right|\leq 1$$

Entonces se debe demostrar que

$$\left|\left(1-re^{i\sigma}\right)^{4}\left(1-re^{i2\sigma}\right)^{2}\right|\leq \frac{1}{(1-r)^{3}}$$

se trata de un cálculo

$$\left|\left(1-re^{i\sigma}\right)^{4}\left(1-re^{i2\sigma}\right)^{2}\right|=$$

$$\left(1-r\cos(\sigma)+r^{2}sen^{2}(\sigma)\right)^{2}\left((1-r\cos(2\sigma)^{2}+r^{2}sen^{2}(2\sigma)\right)=$$

$$\left(1+r^{2}\cos^{2}(\sigma)-2r\cos(\sigma)+r^{2}sen^{2}(\sigma)\right)^{2}\left((1+r^{2}\cos^{2}(2\sigma)-2r\cos(2\sigma)+r^{2}sen^{2}(2\sigma)\right)=$$

$$\left(1+r^{2}-2r\cos(\sigma)\right)^{2}\left((1+r^{2}-2r\cos(2\sigma)\right)=$$

y poniendo $x=\cos(\sigma)$ se tiene $\cos(2\sigma)=\cos^{2}(\sigma)-sen^{2}(\sigma)=2\cos^{2}(\sigma)-1=2x^{2}-1$ y entonces

$$\left|\left(1-re^{i\sigma}\right)^{4}\left(1-re^{i2\sigma}\right)^{2}\right|=\left(1+r^{2}-2rx\right)^{2}\left(1+r^{2}+2r-4rx^{2}\right)$$

Suponemos fijo r y procedemos a hallar el máximo de ese polinomio en x. Derivando la expresión anterior se obtiene:

$$-4r\left(1+r^{2}-2rx\right)\left(1+r^{2}+2r-4rx^{2}\right)+\left(1+r^{2}-2rx\right)^{2}(-8rx)=$$

$$=-4r\left(1+r^{2}-2rx\right)\left(1+r^{2}+2r-4rx^{2}+2x\left(1+r^{2}-2rx\right)\right)=$$

$$=-4r\left(1+r^{2}-2rx\right)\left(1+r^{2}+2r-8rx^{2}+2x+2xr^{2}\right)$$

$$=-4r\left(1+r^{2}-2rx\right)\left(1+r^{2}(1+2x)\right)+2r\left(1-(2x)^{2}+2x\right)$$

$$=-4r\left(1+r^{2}-2rx\right)\left(r^{2}(1+2x)+2r(1+2x)(1-2x)+2x+1\right)$$

$$=-4r\left(1+r^{2}-2rx\right)(1+2x)\left(r^{2}+2r(1-2x)+1\right)$$

$$=-4r(1+2x)(1+2x)\left(1+r^{2}+2rx\right)\left((r+1)^{2}\right)-4rx$$

Esta derivada se anula en $x \in \left\{ \frac{-1}{2}, \frac{1+r^2}{2.r}, \frac{(1+r)^2}{4.r} \right\}$, pero como para $0<r<1$ la función $r+\frac{1}{r}$ es decreciente, siempre será mayor que $\left. r+\frac{1}{r} \right]_{r=1} = 2$ y se cumple:

$$\frac{1+r^2}{2.r} = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right) > 1 \text{ y } \frac{(1+r)^2}{4r} = \frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2} > 1 \text{, de modo que}$$

estas soluciones no corresponden a cosenos válidos. También se observa que $-\frac{1}{2}$ es el primer extremo relativo de los tres, y como estamos tratando con un polinomio de cuarto grado con el coeficiente de orden mayor negativo, en este punto debe ocurrir un máximo, que también será el máximo absoluto de nuestro intervalo, y no es necesario tener en cuenta los valores extremos ± 1 del intervalo de variación de x. El máximo está entonces con $x=-\frac{1}{2}$ y vale:

$$\begin{aligned} \left|(1-re^{i\sigma})^4(1-re^{i2\sigma})^2\right| &= (1+r^2-2rx)^2(1+r^2+2r-4rx^2) \\ &= (1+r^2+r)^2(1+r^2+2r-r) \\ &= (1+r+r^2)^3 < (1+r+r^2+r^3 \ldots)^3 = (1-r)^3 \end{aligned}$$

Con esto se termina la prueba de que

$$\left|(\zeta^3(a).\zeta^4(a+it)).\zeta^2(a+i2t)\right| \geq 1 \text{ si } a>1$$

Supongamos ahora que existiera $\zeta(1-it)=0$ con $t \neq 0$, entonces , dado que ζ es analítica en la región $a>0$ y solo tiene un polo simple en $s=1$, debería ser

$$\lim_{a\to 1} \zeta^3(a).\zeta^4(a+it) = 0$$

y como también $\lim_{a\to 1} \zeta(a+i2t) = .\zeta(1+i2t)$ está determinado, se concluiría que

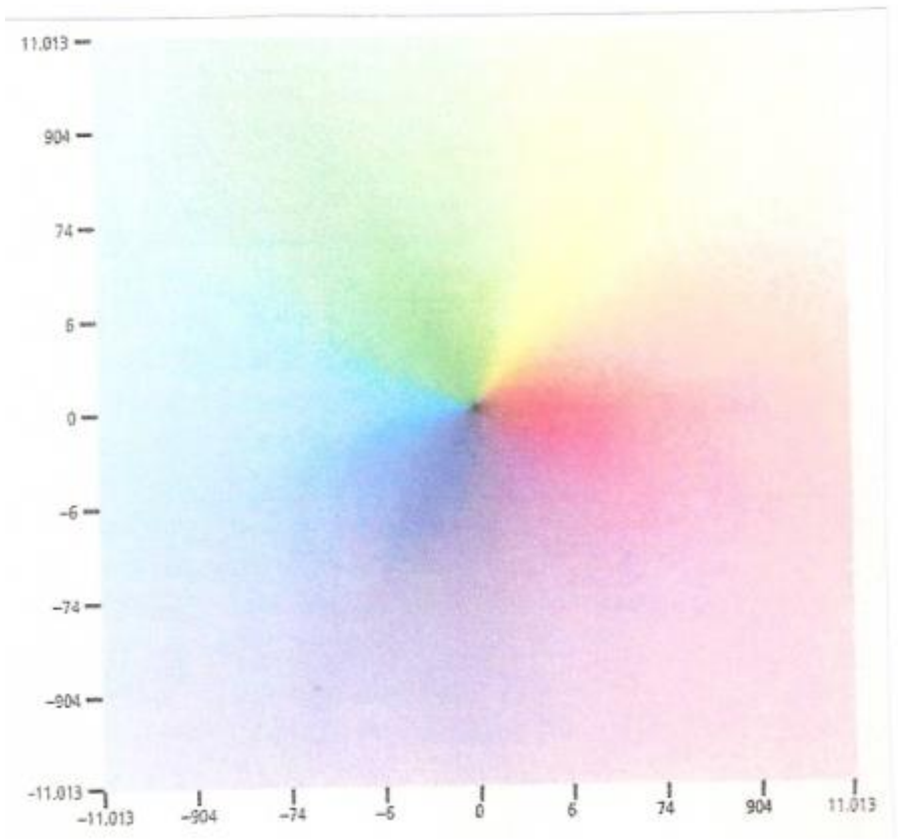
$$\lim_{a\to 1} \zeta^3(a).\zeta^4(a+it).\zeta^2(a+i2t) = 0$$

En contradicción con la desigualdad obtenida anteriormente.

Se concluye entonces que

$$\zeta(1-it) \neq 0$$

G) Representación de la función z de Riemann



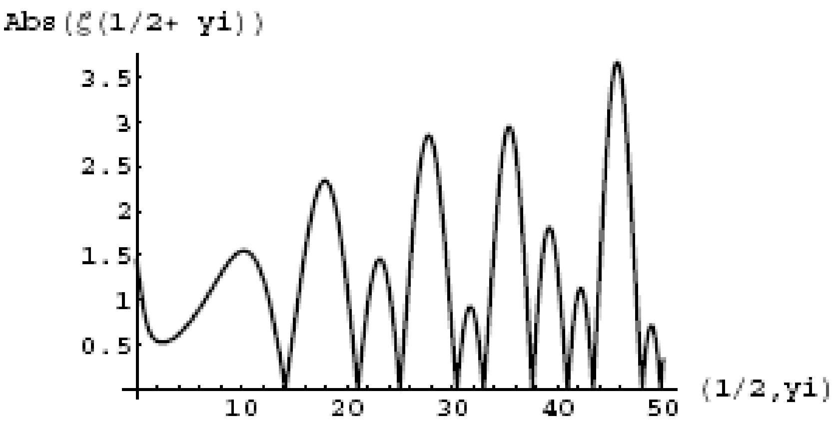
En toda la región del plano complejo s que esta a la derecha de la línea vertical de abscisa 1 la serie es *convergente* y admite, como vimos, una prolongación analítica única a todo el plano complejo: una función matemática con valores finitos. Los resultados no se pueden representar en coordenadas cartesianas de manera directa, pero si en colores. En el eje horizontal se representa la componente real de (s) y la intensidad de color, el modulo, entonces cuanto más intenso sea, menor será el modulo.

H) Ceros no triviales de la función z de Riemann

Los ceros que han podido ser calculados están sobre la línea crítica $\Re(z)=\frac{1}{2}$ y tienen la forma $\frac{1}{2}+iy$ con $y \neq 0$.

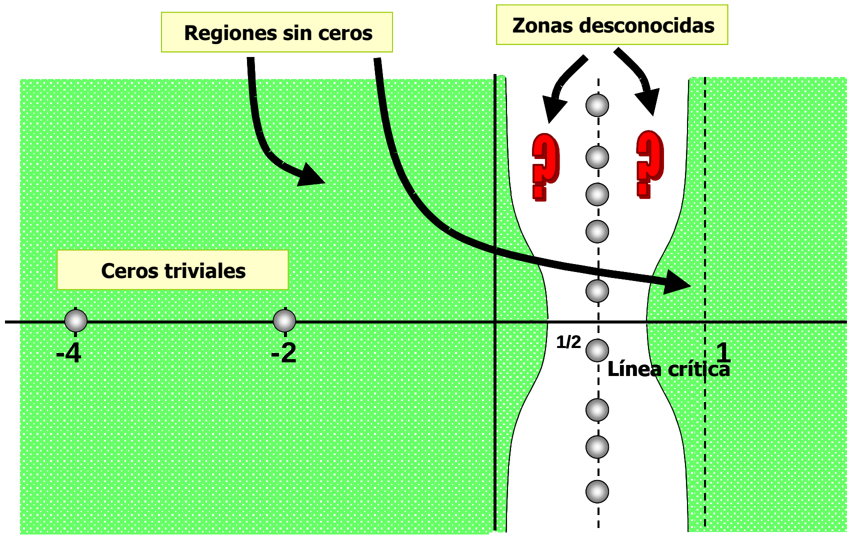
$y:\ \zeta(1/2+yi)=0$	
14.134725142	40.918719012
21.022039639	43.327073281
25.010857580	48.005150881
30.424876126	49.773832478
32.935061588	52.970321478
37.586178159	56.446247697

Ordenadas de los primeros ceros que se conocen



Riemann formula entonces su conjetura acerca de los ceros no-triviales. Es la *Hipótesis de Riemann*:

Una vez extendida adecuadamente la función $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ *al plano complejo, todos los números* $x+iy$ *con* $x>0$ *y tales que* $\zeta(x+iy)=0$, *deben cumplir* $x=1/2$.



Que los ceros de una función meromorfa se coloquen todos en fila india es algo tan singular que debería ser fácil de probar si es o no es cierto. Sin embargo no se ha logrado estrechar la banda crítica en la que se encuentran los ceros; es decir, no

se conoce ningún 0< ε <1 tal que todos los ceros no-triviales pertenezcan a una banda crítica reducida $\varepsilon < \Re$ (z)<1- ε .
Se puede demostrar que se obtiene el menor orden de error al sustituir $\pi(x)$ por su mejor aproximación (en realidad ésta es $\int_2^x dt/\log t$ en lugar de $x/\log x$) si y sólo si la Hipótesis de Riemann es cierta. En otras palabras, que la conjetura de Riemann sea verdadera es equivalente a obtener el error óptimo en el teorema de los números primos. En definitiva, contar primos con precisión demanda un resultado que involucra números complejos.
En 1900 David Hilbert (1862-1943) colocó el problema de demostrar o contradecir la Hipótesis de Riemann en la lista de los problemas más importantes con que deberían enfrentarse los matemáticos contemporáneos.

Conclusión del estudio

Para $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, función ζ de Riemann, se verifican las siguientes propiedades:

- ✓ Está definida, para valores reales mayores que 1.
- ✓ En la región $\{s\in C/\operatorname{Re}(s)>1\}$,esta serie infinita converge y define una función que es analítica en esta región.
- ✓ Puede extenderse de manera única por continuación analítica a una función meromorfa en todo el plano complejo con un único polo en $s=1$.
- ✓ Para los complejos $\operatorname{Re}(s)<1$, los valores de la función deben ser calculados mediante su ecuación funcional, obtenida a partir de la continuación analítica.
- ✓ No tiene ceros en el semiplano $\operatorname{Re}(s)>1$.
- ✓ Los ceros que están fuera de la franja $0<\operatorname{Re}(s)<1$ son enteros negativos pares ; estos son los únicos ceros fuera de la franja citada y son los llamados ceros triviales de ζ, o ceros reales, ya que ningún otro cero es real.
- ✓ Los ceros que están en la franja $0<\operatorname{Re}(s)<1$ se denominan ceros no-triviales de ζ y hay una cantidad infinita de ellos. Los ceros no-triviales no son reales, por lo que son llamados también ceros complejos.

Relación entre ζ(*s*) y π(*x*)

Recordemos que para *xε ℜ se representa* π(*x*) a la función que proporciona la cantidad de números primos menores que *x.*
Así π(*1*)=*0*, π(*2*)=*1*, π(*3*)= π(*4*)=*2*,......

La función π(*x*) se relaciona con la función Zeta de Riemann por la siguiente igualdad, válida cuando $R(s)>1$:

$$\ln\left(\zeta(s)\right)=s\int_{2}^{\infty}\frac{\pi(x).\ln(x)}{x.\left(x^{s}-1\right)}.$$

Partimos de:

$$\pi(\mathrm{n})-\pi(\mathrm{n-1})=\begin{cases}1 & \text{si es primo}\\ 0 & \text{si no es primo}\end{cases}$$

A partir de de la fórmula de la función zeta como producto se tiene:

$$\ln(\zeta(n)=-\sum_{p}\ln\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)=-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\left(\pi(n)-\pi(n-1)\right)\ln(1-\frac{1}{n^{s}})\right)$$

$$=-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\pi(n)\ln(1-\frac{1}{n^{s}})-\pi(n-1)\ln(1-\frac{1}{n^{s}})\right)$$

$$=-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=2}^{N}\pi(n)\ln(1-n^{-s})-\sum_{n=2}^{N}\pi(n-1)\ln(1-n^{-s})\right)$$

$$=-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=2}^{N}\pi(n)\ln(1-n^{-s})-\sum_{n=1}^{N-1}\pi(n)\ln(1-(n+1)^{-s})\right)$$

$$=-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=2}^{N-1}\pi(n)\ln(1-n^{-s})-\sum_{n=2}^{N-1}\pi(n)\ln(1-(n+1)^{-s})+\pi(N)\ln(1-N^{-s})-\pi(1)\ln(1-2^{-s)}\right)$$

$$=-\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\left(\ln(1-n^{-s})-\ln(1-(n+1)^{-s})\right)$$

Donde se ha utilizado el hecho de que $\pi(1)=0$ y de que

$$\lim_{N\to\infty}\left|\pi(N)\ln(1-N^{-s})\right|\leq\lim_{N\to\infty}\left|N\ln(1-N^{-s})\right|=\lim_{N\to\infty}N\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}N^{-js}\right|\leq\lim_{N\to\infty}N\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left|N^{-js}\right|\leq\lim_{N\to\infty}N\sum_{j=1}^{\infty}\left|N^{-s}\right|^{j}$$

$$=\lim_{N\to\infty}N\sum_{j=1}^{\infty}\left|N^{-s}\right|^{j}=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{1-\left|N^{-s}\right|}=\lim_{N\to\infty}\frac{\left|N^{-s+1}\right|}{\left|N^{-s}\right|-1}=\frac{0}{0-1}=0$$

cuando $R(s)>1$.

Tenemos entonces:

$$\ln(\zeta(s) = -\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{\infty 1}\pi(n)\Big(\ln(1-(n+1)^{-s} - \ln(1-n^{-s})\Big) = \sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\int_{n}^{n+1}\frac{d}{dx}\ln(1-x^{-s})dx =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\int_{n}^{n+1}\frac{s.x^{-s-1}}{1-x^{-s}}dx = \sum_{n=2}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{s.\pi(x)x^{-s-1}}{1-x^{-s}}dx = \int_{n}^{\infty}\frac{s.\pi(x)}{x.(x^{-s}-1)}dx$$

entonces:

$$\ln(\zeta(s) = \int_{n}^{\infty}\frac{s.\pi(x)}{x.(x^{-s}-1)}dx$$

Conclusión

Al concluir esta investigación, y luego de una exhaustiva revisión de una importante cantidad de material bibliográfico, he arribado al reconocimiento de la gran importancia que tienen las Funciones Eulerianas como herramienta auxiliar en la mayoría de las ramas de la ciencia: Estadística, Física Biología, Química, Sociología, etc,.

A título de ejemplo, puedo citar: La Distribución Gamma, distribución Beta, Distribución Weibull, Distribución de Maxwell-Boltzman, Cálculo de Momentos y la Mecánica de Fluidos.

También se aplica en otras funciones importantes como las Transformadas de Laplace, la Función Zeta de Riemann, la Fórmula de Stirling, entre otros.

Así mismo es importantísimo el legado dejado por Riemann. Los siete problemas del milenio han sido elegidos por una institución privada de Cambridge, Massachutset, el instituto Clay de matemáticas, para premiar con un millón de dólares a quien demuestre una de sus conjeturas .

Uno de los problemas del milenio elegido, para este trabajo es el de los ceros de la función zeta de Riemann.

La importancia de su resolución radica en gran medida en su relación con los números primos, tema fundamentalmente relacionado con la seguridad informática por ser utilizado en criptografía.

La grandeza de Riemann como matemático reside en su poderosa capacidad de generalización y en el alcance ilimitado de los métodos y nuevos puntos de vista que descubrió tanto en la matemática pura como en la matemática aplicada. Hasta en las notas complementarias y en los proyectos incompletos, muestra la novedad, y nos permite pensar que Riemann murió mucho antes de completar su obra.

Bibliografía

1) Variables complejas con aplicaciones. Willam R. Derrick. Traductor: Dr. Antonio Rosales. Grupo Editorial Iberoamericana. 1987.

2) Complex Variables end Aplications. James Ward brown, Derborn. Ruel V. Churchill. Editorial Mc graw Hill.

3) introducción a la teoria analítica de números. Tom Apostol. Editorial Reverte . 1980

4) Título de la obra original: CALCULUS, Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, With Applications to DitTerential Equations and Probability.Edición original en lengua inglesa publicada por:Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts. Copyright © by Blaisdell Publishing Company.Versión española por: Dr. D. Francisco Vélez Cantarell. Propiedad de: EDITORIAL REVERTÉ, S.A. Año 1987.

5) FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA CON APLICACIONES A LA TEORIA DE NUMEROS. Autor: Carlos Ivorra Castillo. www.taringa/post/ebooks-tutoriales

6) Ejercicios de variables complejas y geometría diferencial. Martín Rivas. Dr. En matemática. Universidad del País Vasco. Leoia, Febrero 2009.

7) Complex Variables with applications. David Wunsch. 2004. Pearson Education Inc.

8) El Legado Matemático de Leonhard Euler a Trescientos Años de su Nacimiento. UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA. Dr. José Lema Labadie. Press, S.A. 2007 .

9) Cálculo integral. José Manuel Casteleiro, Rafael Paniagua, Gómez-Alvarez. Esic. Editorial.1985

10) Curso de Análisis Matemático II . Drintsev. Traducción:V. Fernández. Editorial MIR – 1983.

11) Manual de Fórmulas Matemáticas. Murray Spiegel. MacGeaw Hill- 1995.

12) Cálculo Infinitesimal. J. Rey Pastor. Editorial Kapeluz. 1944.

13)Variables Complejas y Ecuaciones Diferenciales. R. Fuster, I Giménez. Editorial Reverté. 2006

14) Cálculo superior. Murray Spiegel. MacGraw-hill. 1996.

15) Davis, P.J. Leonhard Euler´s Integral: A Historical of the Gamma Function´Amer. Math. Monthly. 1959.

16) Transformadas de Laplace y de Fourier. Marcelo O. Sproveiro. Nueva Librería. 2005

17) Teoría de Números. Gonzáles de la hoz.

www.http://opencontent.org/openpub/.2003