

Universidad Nacional de La Matanza

Licenciatura en matemática aplicada

Taller de Tesis 2007

**UNA AXIOMATIZACIÓN DE LA TEORIA
DE LA MEDIDA DE LEBESGUE
PARTIENDO DE SEMIANILLOS SIN
UNIDAD**

Profesor, Lic. Miguel Calzón
Fernando José García

**Una axiomatización de la teoría de la
medida de Lebesgue partiendo de
semianillos sin unidad.**

Fernando José García

Arribo, ahora, al inefable centro de mi relato; empieza aquí mi desesperación como escritor. Todo lenguaje es un alfabeto de símbolos cuyo ejercicio presupone un pasado que los interlocutores comparten; ¿Cómo transmitir a los otros el infinito Aleph, que mi temerosa memoria apenas abarca? [...] Por lo demás, el problema central es irresoluble: la enumeración, siquiera parcial, de un conjunto infinito. [...] Lo que vieron mis ojos fue simultáneo; lo que transcribiré, sucesivo, porque el lenguaje lo es.

J.L.Borges

In the end we shall make thoughtcrime literally impossible, because there will be no words in which to express it. Every concept that can ever be needed will be expressed by exactly one word with its meaning rigidly defined and all its subsidiary meanings rubbed out and forgotten.

George Orwell

A mi madre y a aquellos que estuvieron y están presentes

Sub specie aeternitatis

CONTENIDO

0: Nuestra Tesis.	Pág. 2
1: Conceptos Previos	Pág. 4
1:1 Los intervalos de $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades	Pág. 4
1:2 La recta real extendida	Pág. 11
2: El Modelo de Partida	Pág. 12
2:1 Medida de intervalos, conjuntos elementales y σ -elementales	Pág. 12
2:2 Medida Exterior de Lebesgue	Pág. 26
2:3 Conjuntos medibles	Pág. 30
2:4 Estructura topológica de los conjuntos medibles	Pág. 43
2:5 Imposibilidad de extender la medida a todo conjunto de $\mathbb{R}^n$	Pág. 49
3: Nuestra Axiomatización de la Teoría de la Medida de Lebesgue	Pág. 56
3:1 Preliminares	Pág. 56
3:2 Las estructuras algebraicas de las familias de conjuntos	Pág. 57
3:3 Medida sobre semianillos, anillos y σ -anillos de conjuntos	Pág. 74
3:4 Medida exterior sobre un espacio de medida para conjuntos σ -elementales	Pág. 89
3:5 Medida de Lebesgue sobre un espacio de medida para conjuntos σ -elementales	Pág. 95
3:6 Un gran paréntesis en la exposición	Pág. 105
4: Los semianillos con unidad y la medida interior	
4:1 Semianillos con unidad	Pág. 110
4:2 Medida Interior y definiciones equivalentes de medibilidad derivadas de ella	Pág. 112
5: Nuestra Conclusión	Pág. 118
6: Bibliografía de Referencia	Pág. 120

Fernando José García

0: Nuestra Tesis¹.

En el trabajo subsiguiente nos proponemos demostrar, entre otras cosas, que es posible una construcción de la teoría de la medida de Lebesgue en la cual no se introduzcan los conceptos de medida interior, invariancia bajo la translación ni el axioma de elección, la cual es suficiente para definir la integral de Lebesgue y probar sus propiedades.

Esto es importante, ya que en la aplicación de la teoría de la medida de Lebesgue al análisis real nos demandan una axiomatización de la medida para conjuntos de $\mathbb{R}^n$, muchos de los cuales son no acotados pero necesitan de una medida. Además, en general, los conjuntos en análisis real son partes de un conjunto no acotado $\mathbb{R}^n$, a diferencia de los conjuntos de un espacio de probabilidades, donde también se aplica la teoría. Si la teoría de la medida usada parte de una definición de la medida de Lebesgue a partir de la medida interior y exterior, la extensión de la medida a conjuntos no acotados es menos natural y no representa de forma consecuente los conceptos del análisis real. En efecto, en las aplicaciones a la teoría de la medida, el conjunto de posibles medidas de conjuntos está acotado (tenemos una medida que es cota superior, de hecho máximo) por la medida 1 del evento cierto. Cosa que no pasa en análisis real, el conjunto de todas las medidas finitas no es un conjunto acotado.

De ningún modo afirmamos que una teoría matemática tenga que representar el proceso intuitivo que le dio origen, pero es innegable que adoptar una axiomatización que sí lo haga, por sobre una que no, no es matemáticamente incorrecto. Además la elección representa la idiosincrasia de los autores referente a la matemática como ciencia susceptible de transmisión más que como un corpus hermético de conocimientos reservados a ciertos técnicos especializados de elites matemáticas. Enfatizo, que ésta exposición de las ideas de los autores es parte de la fundamentación de la tesis (creemos que es la más importante) que de otro modo podría pasar como vacía de significado.

Retomando la fundamentación técnica, la tesis tiene como objetivo, también, demostrar que no se pierde en generalidad ni abarcamiento si en la teoría de la medida se prescinde del concepto de medida interior. Es más aún, el presente trabajo pone de manifiesto la naturaleza complementaria de la medida interior en la teoría de la medida de Lebesgue

¹ Aclaro que he decidido redactar la presente tesis utilizando el plural mayestático por razones de uso y costumbre y no con intensiones de imponer sobre mi autoridad o dignidad alguna.

ya que se demostrará que de ser necesario, es posible introducirla en nuestra axiomatización de la misma.

En lo que respecta a la exposición, se hará de la siguiente forma, primero daremos una teoría parcial de la medida aplicada a conjuntos de $\mathbb{R}^n$ dotados de la topología y métrica usuales dentro de los marcos de la teoría de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (desde ahora, teoría de conjuntos ZF-C) y luego, basándonos en ésta, daremos nuestra teoría axiomática general aplicable a todo conjunto dentro de los márgenes de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (teoría de conjuntos ZF de ahora en adelante) eventualmente expandible a ZF-C ya que en nuestra axiomática no entra en juego el axioma de elección. De esta forma cumplimos con la exigencia de toda exposición axiomática de demostrar su desarrollo y verificar que ésta no es trivial exponiendo, cuanto más no sea, un modelo de ella.

Entonces nuestra tesis consta de dos partes fundamentales, una semántica, la exposición del modelo y la otra sintáctica, el desarrollo de la teoría. Estas dos, consumarán nuestro objetivo y nos permitirán, por añadidura, extraer una serie de consecuencias complementarias a la tesis que serán expuestas en la conclusión.

Sin más, pasamos al cuerpo del trabajo.

1: Conceptos Previos

1:1 Los intervalos de $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades

Definición 1:1.1 Intervalos de $\mathbb{R}^n$. Un intervalo en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma $I = I_1 \times \dots \times I_n$ en donde, para cada $1 \leq i \leq n$, I_i es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, es decir no consideramos intervalos a los conjuntos de la forma $(-\infty, a), (a, +\infty), (-\infty, a], [a, +\infty)$. Si todos los intervalos de $\mathbb{R}$ son cerrados, entonces I es un intervalo cerrado, si en cambio son todos abiertos, el intervalo es abierto. Si alguno de los I_i es vacío, entonces el intervalo de $\mathbb{R}^n$ es vacío, es decir el conjunto vacío es un intervalo de $\mathbb{R}^n$. El conjunto $[a, a] = \{a\}$ también es un intervalo.

Teorema 1:1.1 La intersección de dos intervalos de $\mathbb{R}^n$ es un intervalo de $\mathbb{R}^n$.

Demo: En efecto, sean $I = I_1 \times \dots \times I_n$ y $J = J_1 \times \dots \times J_n$ intervalos de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$I \cap J = I_1 \times \dots \times I_n \cap J_1 \times \dots \times J_n = (I_1 \cap J_1) \times \dots \times (I_n \cap J_n)$$

lo que prueba la tesis ya que la intersección de dos intervalos de $\mathbb{R}$ es un intervalo. En efecto, si tenemos: $I_1 = (a_1, b_1)$ e $I_2 = (a_2, b_2)$, entonces $I_1 \cap I_2 = (\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\})$. Ya que si $x \in I_1 \cap I_2$ debe cumplirse que $x > a_1 \wedge x > a_2$ y esto implica que $x > \max\{a_1, a_2\}$. También, $x < b_1 \wedge x < b_2$ es decir $x < \min\{b_1, b_2\}$. Esto da una inclusión. La otra, $x > \max\{a_1, a_2\}$ y $x < \min\{b_1, b_2\}$ implica que $a_1 < x < b_1$ y $a_2 < x < b_2$ que nos da la otra inclusión $\square$

Definición 1:1.2 Conjuntos elementales. Un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto elemental si es la unión de un número finito de intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, todos los

intervalos son conjuntos elementales. Se sigue inmediatamente que la unión de dos conjuntos elementales disjuntos es un conjunto elemental. En efecto, sean:

$$A = \bigcup_{i=1}^n I_i \quad \wedge \quad B = \bigcup_{j=1}^m J_j,$$

conjuntos elementales, entonces:

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^n I_i \cap \bigcup_{j=1}^m J_j = \bigcup_{i=1}^n \left(I_i \cap \bigcup_{j=1}^m J_j \right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (I_i \cap J_j)$$

luego la intersección de dos conjuntos elementales es un conjunto elemental, es fácil ver que los intervalos $I_i \cap J_j$ son disjuntos dos a dos. Por inducción se llega a que toda intersección finita de conjuntos elementales es un conjunto elemental.

Es fácil ver que la unión de dos intervalos no es un intervalo y que la diferencia de intervalos tampoco es un intervalo.

Por ejemplo sean $(1,2)$ y $(3,4]$ su unión no es un intervalo. De la misma forma si tomamos como ejemplo $(1,8) \times (2,9]$ y le restamos $(2,3] \times [5,6]$ obtenemos un conjunto que no es un intervalo.

Pero, sin embargo, sí se cumple que la unión y la diferencia de intervalos es un conjunto elemental. Más adelante vamos a demostrar esto, que no es un resultado obvio aunque lo parezca.

Teorema 1:1.2 Si A y B son conjuntos elementales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, entonces, su producto es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Demo: Sean $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$ y $B = \bigcup_{j=1}^m J_j$, donde las familia² $\{I_i\}$ es disjunta dos a dos y $\{J_j\}$ es también disjunta dos a dos³, entonces:

$$A \times B = \bigcup_{i=1}^n I_i \times \bigcup_{j=1}^m J_j = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (I_i \times J_j)$$

En donde, $I_i \times J_j$ es un intervalo de $\mathbb{R}^{n+m}$. Ahora bien, si $I_i \times J_j \neq I_{i'} \times J_{j'}$, debe ser $I_i \neq I_{i'}$ o $J_j \neq J_{j'}$. Luego, o bien, $I_i \cap I_{i'} = \emptyset$ o $J_j \cap J_{j'} = \emptyset$. Entonces:

$$(I_i \times J_j) \cap (I_{i'} \times J_{j'}) = (I_i \cap I_{i'}) \times (J_j \cap J_{j'}) = \emptyset$$

lo que prueba que $A \times B$ es la unión de un número finito de intervalos disjuntos, o sea, un conjunto elemental $\square$

Teorema 1:1.3

- 1: Si I, J son intervalos de $\mathbb{R}^n$, $I - J$ es un conjunto elemental.
- 2: Si A y B son conjuntos elementales, $A - B$ lo es también.
- 3: Si A y B son conjuntos elementales, $A \cup B$ lo es también

Nótese que en el último punto no se exige que los conjuntos sean disjuntos.

Demo: 1: Si $n=1$, ya se sabe de análisis, que $I - J$ es a lo sumo la unión de dos intervalos disjuntos. Supongamos que el teorema vale para $n=h$ y veamos que es cierto para $n=h+1$, Sean $I = I' \times I''$ y $J = J' \times J''$ intervalos de $\mathbb{R}^{n+1}$, con $I', J' \in \mathbb{R}$ y $I'', J'' \in \mathbb{R}^n$ intervalos, como:

² Uso las letras mayúsculas y minúsculas como si fueran distintos símbolos del lenguaje. O sea que I no representa lo mismo que i .

³ Si para todo $I_j \in \{I_j\}_{j \in J}$ tenemos que $I_j \cap I_i = \emptyset \Leftrightarrow j \neq i$, decimos que la familia es disjunta dos a dos o que sus conjuntos son disjuntos dos a dos o a pares. A veces tan sólo diremos que la familia es disjunta.

$$\begin{aligned}
 I - J &= (I' \times I'') - (J' \times J'') \\
 &= (I' \times I'') \cap (J' \times J'')^c \\
 &= (I' \times I'') \cap [(J'^c \times J'') \cup (J' \times J''^c) \cup (J'^c \times J''^c)] \\
 &= [(I' \times I'') \cap (J'^c \times J'')] \cup [(I' \times I'') \cap (J' \times J''^c)] \cup [(I' \times I'') \cap (J'^c \times J''^c)] \\
 &= [(I' \cap J'^c) \times (I'' \cap J'')] \cup [(I' \cap J') \times (I'' \cap J''^c)] \cup [(I' \cap J'^c) \times (I'' \cap J''^c)] \\
 &= [(I' - J') \times (I'' \cap J'')] \cup [(I' - J') \times (I'' \cap J''^c)] \cup [(I' \cap J') \times (I'' \cap J''^c)] \\
 &= \{(I' - J') \times [(I'' \cap J'') \cup (I'' \cap J''^c)]\} \cup [(I' \cap J') \times (I'' - J'')] \\
 &= [(I' - J') \times I''] \cup [(I' \cap J') \times (I'' - J'')]
 \end{aligned}$$

Aplicando lo visto en el teorema anterior y teniendo en cuenta que $I' - J' \subseteq \mathbb{R}$ es a lo sumo la unión de dos intervalos disjuntos, $(I' - J') \times I'' = (A \cup B) \times I'' = (A \times I'') \cup (B \times I'')$ o sea es la unión de dos intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ o sea es elemental. El conjunto $(I' \cap J') \times (I'' - J'')$ es un conjunto elemental por teorema 1:1.2 ya que $(I' \cap J')$ es un intervalo de $\mathbb{R}$, o sea un conjunto elemental. Y $(I'' - J'')$ es un conjunto elemental por hipótesis inductiva.

2: Como A y B son Conjuntos elementales, son de la forma:

$$A = \bigcup_{i=1}^n I_i \quad \wedge \quad B = \bigcup_{j=1}^m J_j$$

en donde los intervalos son disjuntos dos a dos en cada caso. Luego

$$A - B = \bigcup_{i=1}^n I_i - \bigcup_{j=1}^m J_j = \bigcup_{i=1}^n \left(I_i - \bigcup_{j=1}^m J_j \right) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m (I_i - J_j) \right)$$

como cada $V_i = \bigcap_{j=1}^m (I_i - J_j)$ es un conjunto elemental ($I_i - J_j$ es elemental por 1 y la intersección de elementales es elemental; Definición 1:1.2) y $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$ porque $I_i \cap I_j = \emptyset$, obtenemos la tesis.

3: Solo basta hacer, $A = A \cup (B - A)$, por 2 de este teorema y definición 1:1.2 $\square$

Cada conjunto elemental es la unión de finitos conjuntos acotados, los intervalos. Por lo tanto todo conjunto elemental es acotado. Como el complemento de un conjunto acotado no es acotado, ningún complemento de un conjunto elemental es un conjunto elemental.

Demostremos el siguiente teorema, que aunque parece obvio tiene una demostración digna de cuidado.

Teorema 1:1.4 Si el producto $A \times B$ es la unión de dos productos no vacíos y disjuntos $A_1 \times B_1$ y $A_2 \times B_2$, no vacíos, entonces se cumple que $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y $B = B_1 = B_2$ o, si no, $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ y $A = A_1 = A_2$.

Demo: Sabemos que

$$A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \quad (1)$$

y supongamos que

$$A_1 \neq A_2 \wedge B_1 \neq B_2 \quad (2)$$

Podemos afirmar que $A_1, A_2 \subseteq A$ y $B_1, B_2 \subseteq B$. En efecto, si $x \in A_1$, como $B_1 \neq \emptyset$, existe $y \in B_1$ tal que $(x, y) \in A_1 \times B_1$. Por (1), $(x, y) \in A \times B$, lo que implica que $x \in A$. De igual forma se demuestran las otras inclusiones.

Si $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ y $B_2 \subseteq B_1 \subseteq B$, $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \neq \emptyset$ contra la hipótesis. Lo mismo si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$. Por esto, podemos elegir $x \in A_1 \wedge x \notin A_2$ e $y \notin B_1 \wedge y \in B_2$ (o $x \notin A_1 \wedge x \in A_2$ e $y \in B_1 \wedge y \notin B_2$). Entonces, $(x, y) \notin A_1 \times B_1$ y $(x, y) \notin A_2 \times B_2$ por lo que $(x, y) \notin A \times B$ (por (1)), absurdo. Luego $A_1 = A_2 \vee B_1 = B_2$. Supongamos la primera, entonces (1) queda,

$$A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) = A_1 \times (B_1 \cup B_2) \quad (3)$$

Y listo, esto dice que, $A = A_1 = A_2$ y $B = B_1 \cup B_2$ y que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ porque si no lo fuera tomando $y \in B_1 \cap B_2$ y $x \in A$ obtendríamos la contradicción de que

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \neq \emptyset$$

Lo mismo si $B_1 = B_2$ $\square$

Teorema 1:1.5 Cualquier descomposición de un intervalo I de $\mathbb{R}^n$ en dos intervalos se obtiene descomponiendo un lado de este en dos intervalos. O sea sí $I = I_1 \times \dots \times I_n$ y $I = L \cup H$ con $L \cap H = \emptyset$ y ambos intervalos, entonces para $1 \leq k \leq n$ se tiene que $L = I_1 \times \dots \times I'_k \times \dots \times I_n$ y $H = I_1 \times \dots \times I''_k \times \dots \times I_n$ con $I_k = I'_k \cup I''_k$ y $I'_k \cap I''_k = \emptyset$.

Demo: Si $n=1$ no hay nada que demostrar. Supongamos demostrado el teorema para $n=h$ y probemos que esto implica que vale para $n=h+1$ y la tesis se seguirá por inducción. Sea $I = L \cup H \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y $L \cap H = \emptyset$. Sea $I = I_1 \times I'$, $L = L_1 \times L'$ y $H = H_1 \times H'$ con $I_1, L_1, H_1 \subseteq \mathbb{R}$ y $I', L', H' \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$I = I_1 \times I' = (L_1 \times L') \cup (H_1 \times H')$$

Por el teorema 1:1.4, tenemos que $I_1 = L_1 \cup H_1$, $L_1 \cap H_1 = \emptyset$ e $I' = L' = H'$ o $I' = L' \cup H'$, $L' \cap H' = \emptyset$ e $I_1 = L_1 = H_1$.

Si se da la primera, entonces el lado dividido es el primero. Si se verifica la segunda, por hipótesis inductiva, la descomposición se lleva a cabo dividiendo un lado de I' $\square$

Definición 1:1.3 Hiperplano. Es el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^n$ que cumplen la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = c$$

En donde no todos los a_i son cero. A los conjuntos $\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq c$, $\sum_{i=1}^n a_i x_i > c$, $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq c$ y $\sum_{i=1}^n a_i x_i < c$ se los denomina semiespacios determinado por el hiperplano. En particular tenemos al hiperplano de la forma $x_k = c$ que es el hiperplano normal al vector e_k de la base canónica y pasa por ce_k .

Teorema 1:1.6 La intersección de un intervalo de $\mathbb{R}^n$ con uno de los semiespacios $x_k \geq c$, $x_k > c$, $x_k \leq c$ o $x_k < c$ es un intervalo.

Demo: En efecto, hagamos la demostración para $x_k \geq c$. Si $I = I_1 \times \dots \times I_n$, la intersección de éste con el semiespacio es:

$$I = I_1 \times \dots \times \left\{ (+\infty; c] \cap I_k \right\} \times \dots \times I_n$$

lo que prueba la afirmación ya que la intersección que figura en el producto es un intervalo $\square$

Teorema 1:1.7 Si I y J son intervalos disjuntos, entonces existe un hiperplano de la forma $x_k = c$ tal que I está incluido en un semiespacio determinado por el hiperplano y J está incluido en el opuesto.

Demo: Si los intervalos son disjuntos, entonces, para algún $1 \leq k \leq n$, se cumple que $I_k \subseteq \mathbb{R}$ y $J_k \subseteq \mathbb{R}$ son disjuntos. Luego si $I_k = (a, b)$ y $J_k = (c, d)$ (uso intervalos abiertos para fijar ideas, pero la demo es completamente valida independientemente de esto), se cumple que $a < b \leq c < d$ (o $c < d \leq a < b$). Si tomamos el hiperplano $x_k = e$ con $b \leq e \leq c$ (o $d \leq e \leq a$) obtenemos que I está incluido en un semiespacio y J en su complemento $\square$

1:2 La recta real extendida

Definición 1:2.1 Recta real extendida. Definimos al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ llamado recta real extendida al conjunto:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{p, q\}$$

En donde $p \notin \mathbb{R} \wedge q \notin \mathbb{R}$ y en donde estos elementos cumplen las siguientes condiciones:

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{R}: p < x < q$$

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R}: p + x = x + p = p + p = p \wedge q + x = x + q = q + q = q$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: p \cdot p = q \cdot q = p \wedge p \cdot q = q \cdot p = q$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}: p \cdot x = x \cdot p = p \wedge q \cdot x = x \cdot q = q$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_{<0}: p \cdot x = x \cdot p = q \wedge q \cdot x = x \cdot q = p$$

Estos nuevos elementos se los designara como $+\infty$ y $-\infty$. Es decir, hablando sin rigurosidad, hemos agregado dos elementos que cumplen el papel de un número infinitamente positivo y otro infinitamente negativo. Esto se verá justificado con propiedad en las demostraciones pertinentes que sucedan en el escrito. Por (i), en $\overline{\mathbb{R}}$ todo conjunto tiene ínfimo y supremo. En efecto si U no está acotado inferiormente en $\mathbb{R}$, tenemos que $\forall x \in \mathbb{R} \exists x' \in U / x' < x$. Luego el conjunto de cotas inferiores es $\{-\infty\}$ y la mayor cota inferior (ínfimo) es entonces $-\infty$. Lo mismo con el supremo. También tenemos que $\inf\{+\infty\} = \sup\{+\infty\} = +\infty$ y $\inf\{-\infty\} = \sup\{-\infty\} = -\infty$.

2: El Modelo de Partida

2:1 Medida de intervalos, conjuntos elementales y σ -elementales

Para generalizar el concepto de medida a la mayor cantidad de conjuntos posibles empezaremos por definir las medidas de los conjuntos más básicos y las iremos generalizando a los conjuntos de familias más amplias. Empezaremos definiendo la medida de intervalos, luego a partir de esta la de conjuntos elementales, la de conjuntos σ -elementales (ya veremos que son), y así definiendo medidas para conjuntos más generales.

Definición 2:1.1 Medida de intervalos Sea un intervalo I de cualquiera de las siguientes formas, (a,b) , $(a,b]$, $[a,b)$ o $[a,b]$. Entonces su medida se define como sigue:

$$m(I) = b - a$$

Si $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo unión de dos intervalos disjuntos $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$, es fácil ver que $m(J) = m(I_1) + m(I_2)$. En efecto, si $J = (a,b)$ es la unión de dos intervalos disjuntos, debe ser $I_1 = (a,c) \wedge I_2 = [c,b)$ (o $I_1 = (a,c] \wedge I_2 = (c,b)$) y entonces $m(J) = b - a = (b - c) + (c - a) = m(I_1) + m(I_2)$. Los otros casos son iguales.

Si el intervalo $I = I_1 \times \dots \times I_n$ pertenece a $\mathbb{R}^n$, definimos su medida (o volumen) como sigue:

$$m(I) = \prod_{j=1}^n m(I_j)$$

Podríamos decir que la medida de un intervalo de $\mathbb{R}^n$ es el producto de las medidas de sus lados. Veamos una propiedad que es importante que tenga una medida que se precie de tal.

Teorema 2:1.1 Si $I \in \mathbb{R}^n$ es un intervalo unión de p intervalos disjuntos, $J_1, \dots, J_p \in \mathbb{R}^n$, entonces,

$$m(I) = m(J_1) + \dots + m(J_p)$$

Demo⁴: Si $p=2$, tenemos, por el teorema 1:1.5 que I es igual a la unión de $H = I_1 \times \dots \times I'_k \times \dots \times I_n$ y de $L = I_1 \times \dots \times I''_k \times \dots \times I_n$ con $I_k = I'_k \cup I''_k$ y $I'_k \cap I''_k = \emptyset$. Por lo visto arriba para $\mathbb{R}$, $m(I_k) = m(I'_k) + m(I''_k)$. Entonces

$$\begin{aligned} m(I) &= m(I_1) \dots m(I'_k \cup I''_k) \dots m(I_n) = m(I_1) \dots [m(I'_k) + m(I''_k)] \dots m(I_n) \\ &= m(I_1) \dots m(I'_k) \dots m(I_n) + m(I_1) \dots m(I''_k) \dots m(I_n) = m(H) + m(L) \end{aligned}$$

Supongamos que la propiedad se cumple para $p=h$ y veamos que esto implica que vale para $p=h+1$ de donde sigue la tesis por inducción. Sea $I = J_1 \cup \dots \cup J_{p+1}$. Como $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, por el teorema 1:1.7, tenemos que existe un semiplano tal que $J_1 \subset S$ y $J_2 \subset \mathbb{R}^n - S$, siendo S y $\mathbb{R}^n - S$ los semiespacios determinados. Por 1:1.6, tenemos que $I \cap S$ y $I \cap (\mathbb{R}^n - S)$ son intervalos disjuntos e $I = [I \cap S] \cup [I \cap (\mathbb{R}^n - S)]$. Se tiene:

$$m(I) = m(I \cap S) + m[I \cap (\mathbb{R}^n - S)] \quad (1)$$

Además,

⁴ A lo largo del trabajo dejamos al cuidado del lector las demos por inducción en las que no intervienen los conceptos desarrollados. Sin embargo, no dejamos sin demostrar ninguna que involucre conceptos propios de la teoría discutida.

$$I \cap S = \underbrace{(J_1 \cap S)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(J_2 \cap S)}_{\emptyset} \cup \dots \cup (J_{p+1} \cap S) = J_1 \cup \dots \cup (J_{p+1} \cap S)$$

O sea que es la unión de p intervalos disjuntos, y por hipótesis inductiva:

$$m(I \cap S) = m(J_1) + \dots + m(J_{p+1} \cap S) \quad (2).$$

Por lo mismo

$$\begin{aligned} I \cap (\mathbb{R}^n - S) &= \underbrace{(J_1 \cap (\mathbb{R}^n - S))}_{\emptyset} \cup \underbrace{(J_2 \cap (\mathbb{R}^n - S))}_{J_2} \cup \dots \cup (J_{p+1} \cap (\mathbb{R}^n - S)) = \\ &= J_2 \cup \dots \cup (J_{p+1} \cap (\mathbb{R}^n - S)) \end{aligned}$$

y

$$m[I \cap (\mathbb{R}^n - S)] = m(J_2) + \dots + m(J_{p+1} \cap (\mathbb{R}^n - S)) \quad (3)$$

Luego reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\begin{aligned} m(I) &= m(J_1) + \dots + m(J_{p+1} \cap S) + m(J_2) + \dots + m(J_{p+1} \cap (\mathbb{R}^n - S)) \\ &= m(J_1) + m(J_2) + \{m(J_3 \cap S) + m(J_3 \cap (\mathbb{R}^n - S))\} + \dots + \{m(J_{p+1} \cap S) + m(J_{p+1} \cap (\mathbb{R}^n - S))\} \\ &= m(J_1) + m(J_2) + m(J_3) + \dots + m(J_{p+1}) \end{aligned}$$

Ya que para $3 \leq i \leq p+1$, $(J_i \cap S) \cap (J_i \cap (\mathbb{R}^n - S)) = \emptyset$, son intervalos y

$$(J_i \cap S) \cup (J_i \cap (\mathbb{R}^n - S)) = J_i \quad \square$$

Definición 2:1.1 Medidas de conjuntos elementales. Si $A \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto elemental, es la unión de un numero finito de intervalos disjuntos dos a dos $I_1, \dots, I_n$. Definimos la medida de A como la suma de las medidas de los intervalos en que se descompone. O sea:

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(I_i).$$

Esta definición es correcta⁵, en efecto, si $J_1, \dots, J_m$ es otra forma de descomponer al conjunto A en intervalos disjuntos dos a dos tenemos que, dado $1 \leq i \leq n$, para cada $1 \leq k \leq m$, $I_i \cap J_k$ es un intervalo.

Además como $A = \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{k=1}^m J_k$, tenemos que $I_i \subseteq \bigcup_{k=1}^m J_k$ para cada $1 \leq i \leq n$ y por lo

tanto: $\bigcup_{k=1}^m (I_i \cap J_k) = I_i$ y además $\{(I_i \cap J_k)\}_{k \in \{1, \dots, m\}}$ y $\{(I_i \cap J_k)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ son familias

disjuntas a pares. De la misma forma, $J_k \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$ para $1 \leq k \leq m$ y por lo tanto,

$\bigcup_{i=1}^n (I_i \cap J_k) = J_k$. Luego:

$$\sum_{i=1}^n m(I_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m m(I_i \cap J_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n m(I_i \cap J_k) = \sum_{k=1}^m m(J_k)$$

Por 2:1.1 y luego la medida de A es independiente de la descomposición $\square$

De esto se desprende que $m(\emptyset) = 0$, en efecto, $m(\emptyset) = m(\emptyset \cup \emptyset) = m(\emptyset) + m(\emptyset)$.

Teorema 2:1.2 Si el conjunto A es unión de los conjuntos elementales y disjuntos dos a dos $A_1, \dots, A_n$, entonces:

$$m(A) = m(A_1) + \dots + m(A_n)$$

Demo: Se deduce directamente de la definición aplicando inducción completa $\square$

⁵ Uso el término de “correcta” para las definiciones que son consistentes. Es decir para las que existe un único definiendum y sólo uno.

Teorema 2:1.3 Si el conjunto A es un conjunto elemental incluido en el conjunto elemental B , se tiene que

$$m(B - A) = m(B) - m(A)$$

en particular, $m(A) \leq m(B)$.

Demo: Como $A = A \cup (B - A)$ entonces:

$$m(B) = m(A) + m(B - A)$$

Porque A y $B - A$ son conjuntos elementales disjuntos. Y como $m(B - A) \geq 0$,

$$m(A) \leq m(B) \quad \square$$

Teorema 2:1.4 Si A y B son dos conjuntos elementales, entonces:

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

Y por lo tanto:

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B).$$

Demo: Como $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ y $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ se tiene:
 $m(A) = m(A - B) + m(A \cap B)$ y $m(B) = m(B - A) + m(A \cap B)$. Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$m(A) + m(B) = m(A \cap B) + \{m(A - B) + m(B - A) + m(A \cap B)\}$$

que da la hipótesis ya que $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$ y la expresión entre llaves es: $m(A \cup B)$ porque los tres conjuntos son disjuntos dos a dos. La desigualdad se deduce obviamente $\square$

Por inducción podemos probar que si $A_1, \dots, A_n$ es una colección de conjuntos elementales, se cumple:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i)$$

Esta desigualdad se conoce como subaditividad de la medida de conjuntos elementales.

Teorema 2:1.5 Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, para cada $\varepsilon > 0$ existen un intervalo abierto $I \subseteq U$ y uno cerrado $E \subseteq I$ tales que:

$$m(I) + \varepsilon > m(U) \text{ y } m(I) - \varepsilon < m(E)$$

Demo: Si $n = 1$ e $I = [a, b)$ o cualquier otro intervalo de extremos a y b , entonces se tiene: $E = [a + \delta, b - \delta] \subseteq I \subseteq (a - \delta; b + \delta) = U$ para cada $\delta > 0$.

Luego $m(U) = (b - a) + 2\delta = m(I) + 2\delta$ y $m(E) = (b - a) - 2\delta = m(I) - 2\delta$. Si, dado un $\varepsilon > 0$, tomamos $2\delta < \varepsilon$ Tenemos: $m(U) = m(I) + 2\delta < m(I) + \varepsilon$ y $m(E) = m(I) - 2\delta > m(I) - \varepsilon$.

Supongamos probada la proposición para $n = h$, veamos que esto implica que vale para $n = h + 1$. Sea $I = I_1 \times I' \subseteq \mathbb{R}^{h+1}$ con $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ y $I' \subseteq \mathbb{R}^h$. Como vale para $n = 1$ y para $n = h$ se cumple que existen intervalos abiertos $U' \subseteq \mathbb{R}$ y $U'' \subseteq \mathbb{R}^h$ tales que $I_1 \subseteq U'$ e $I' \subseteq U''$ y:

$$m(I_1) + \varepsilon' > m(U') \text{ y } m(I') + \varepsilon'' > m(U'')$$

cualquiera sean $0 < \varepsilon'$ y $0 < \varepsilon''$. Luego, si $U = U' \times U''$:

$$m(U) = m(U')m(U'') < (m(I_1) + \varepsilon')(m(I') + \varepsilon'') = m(I) + \{m(I_1)\varepsilon'' + \varepsilon'm(I') + \varepsilon'\varepsilon''\}$$

Y dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $0 < \mu < \min\{1, \varepsilon\}$, tomamos $\varepsilon'' = \min\left\{\frac{\mu}{3}, \frac{\mu}{m(I_1)}\right\}$,

$$\varepsilon' = \min\left\{\frac{\mu}{3}, \frac{\mu}{m(I')}\right\} \text{ y entonces: } \varepsilon', \varepsilon'' < \frac{\mu}{3} < \frac{1}{3} < 1 \text{ y}$$

$$m(I_1)\varepsilon'' + \varepsilon'm(I') + \varepsilon'\varepsilon'' < \frac{\mu}{3} + \frac{\mu}{3} + \frac{\mu^2}{9} < \frac{2\mu}{3} + \frac{\mu}{3} = \mu < \varepsilon$$

Por lo tanto:

$$m(U) < m(I) + \varepsilon.$$

Por otro lado, existen intervalos cerrados $E' \in \mathbb{R}$ y $E'' \in \mathbb{R}^h$ tales que $E' \subseteq I_1$, $E'' \subseteq I'$:

$$m(I_1) < m(E') + \varepsilon' \text{ y } m(I') < m(E'') + \varepsilon''$$

entonces tenemos, con $E = E' \times E''$:

$$m(I) = m(I_1)m(I') < (m(E') + \varepsilon')(m(E'') + \varepsilon'') = m(E) + \{m(E')\varepsilon'' + \varepsilon'm(E'') + \varepsilon'\varepsilon''\}$$

Como $E' \subseteq I_1$ y $E'' \subseteq I'$ se tiene que $m(E') \leq m(I_1)$ y $m(E'') \leq m(I')$, luego:

$$m(I) < m(E) + \{m(I_1)\varepsilon'' + \varepsilon'm(I') + \varepsilon'\varepsilon''\}$$

Y se sigue como en el caso del conjunto abierto $\square$

Teorema 2:1.6 Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto elemental, entonces existen un conjunto elemental abierto U y uno cerrado E tales que $E \subseteq A \subseteq U$ y

$$m(A) + \varepsilon > m(U) \quad \text{y} \quad m(A) - \varepsilon < m(E)$$

Demo: Como A es elemental es la unión de intervalos disjuntos dos a dos, o sea, si $I_1, \dots, I_n$ son los intervalos disjuntos que lo componen,

$$A = \bigcup_{i=1}^n I_i$$

por el teorema anterior, para cada $1 \leq i \leq n$ existen E_i cerrados y U_i abiertos, tales que $E_i \subseteq I_i \subseteq U_i$ y:

$$m(I_i) > m(U_i) - \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{y} \quad m(I_i) - \frac{\varepsilon}{n} < m(E_i)$$

Luego,

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(I_i) > \sum_{i=1}^n \left[m(U_i) - \frac{\varepsilon}{n} \right] = \sum_{i=1}^n m(U_i) - \varepsilon \geq m(U) - \varepsilon$$

en donde $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ es abierto. Por otro lado, llamando $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, que es cerrado, se tiene:

$$m(A) - \varepsilon = \sum_{i=1}^n \left[m(I_i) - \frac{\varepsilon}{n} \right] < \sum_{i=1}^n m(E_i) = m(E)$$

Y llegamos a la tesis $\square$

Teorema 2:1.7⁶ Si un conjunto elemental A es la unión de una sucesión (una familia numerable) de conjuntos elementales $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, entonces:

$$m(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$$

Y si, además tenemos que $A_k \cap A_j = \emptyset$ sii $k \neq j$ se cumple:

$$m(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$$

En donde, recuérdese, $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$.

Demo: La serie no diverge ya que sino tendríamos un conjunto elemental de medida no finita y esto no es posible. Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, para cada A_k existe un conjunto abierto, U_k , tal que $A_k \subseteq U_k$ y $m(U_k) < m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Además existe un conjunto cerrado E con $E \subseteq A$ tal que $m(E) > m(A) - \varepsilon$. Se tiene, entonces:

$$E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

Como E es cerrado y acotado, o sea compacto, existe un subcubrimiento finito de $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (que es un cubrimiento abierto de E) que cubre a E . Sea $\{U_{k_1}, \dots, U_{k_n}\}$ este subcubrimiento, luego:

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{k_j}$$

y se cumple:

⁶ Esto se podría haber hecho antes, es decir demostrar que la medida de intervalos de $\mathbb{R}^n$ cumple con estas propiedades. Véase 3:6 donde se da la exposición alternativa.

$$m(A) - \varepsilon < m(E) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^n U_{k_j}\right) \leq \sum_{j=1}^n m(U_{k_j}) < \sum_{j=1}^n \left[m(A_{k_j}) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right] \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \left[m(A_{k_j}) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right] = \sum_{j \in \mathbb{N}} m(A_{k_j}) + \varepsilon$$

O sea que para todo $\varepsilon > 0$, tenemos:

$$m(A) < \sum_{j \in \mathbb{N}} m(A_{k_j}) + 2\varepsilon$$

lo que implica la primera parte de la tesis. Si además, los conjuntos son disjuntos dos a dos, se tiene, por el teorema 2:1.2 y teniendo en cuenta que $\bigcup_{k=1}^n A_k \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = m(A)$:

$$\sum_{k=1}^n m(A_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = m(A)$$

y pasando al límite para $n \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$m(A) \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$$

que es la otra parte de la tesis $\square$

La segunda parte del teorema se expresa diciendo que la medida es σ -aditiva.

Definición 2:1.7 Conjuntos σ -elementales. Se dice que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es σ -elemental si es la unión de una sucesión de conjuntos elementales disjuntos dos a dos. Si el conjunto $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ es un conjunto σ -elemental, donde los A_k son los conjuntos elementales disjuntos que lo forman, definimos a su medida como sigue:

$$m(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$$

Si la serie diverge, diremos que $m(A) = +\infty$. Si $m(A)$ es finita, esta definición es correcta, en efecto, sea $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ otra sucesión de conjuntos elementales disjuntos dos a dos cuya unión es A . Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$A_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_k \cap B_j) \quad \wedge \quad (A_k \cap B_j) \cap (A_k \cap B_i) = \emptyset \text{ si } j \neq i$$

y

$$B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_j \cap B_k) \quad \wedge \quad (A_j \cap B_k) \cap (A_i \cap B_k) = \emptyset \text{ si } j \neq i$$

la demostración es similar a la dada en la definición de conjunto elemental. Entonces⁷:

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} m(A_k \cap B_j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k \cap B_j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} m(B_j) \end{aligned}$$

Debido a lo demostrado en el teorema anterior.

Si para una descomposición la serie diverge, diverge para todas, porque de lo contrario, si converge para una, por lo visto arriba en esta demo, lo haría para todas, absurdo $\square$

Como un conjunto σ -elemental es la unión de una familia numerable de conjuntos elementales, que son a su vez la unión finita de intervalos disjuntos, podemos decir que un conjunto σ -elemental es la unión numerable de intervalos disjuntos. La demostración no implica mayores complicaciones y se deja al cuidado del lector.

⁷ Para más detalles de la validez de estas igualdades referirse a Tom Apostol, *Análisis matemático* 2ª ed., Reverté, Barcelona, 1996. En el capítulo 8 hay un desarrollo excelente del tema a pesar de no ser exhaustivo.

Nota 2:1.1 A esta altura no está de más hacer la siguiente aclaración que puede haber parado desapercibida.

Un intervalo es la unión de un número finito y disjunto de intervalos (él mismo con un número finito de intervalos vacíos), luego un intervalo es un conjunto elemental. A su vez, un conjunto elemental es la unión numerable de conjuntos elementales, (él mismo con una sucesión de conjuntos iguales al vacío), por tanto un conjunto elemental es σ -elemental. En definitiva, Si llamamos, $\mathcal{I}$ al conjunto de intervalos de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ al conjunto de los conjuntos elementales y $\mathcal{S}$ al conjunto de conjuntos σ -elementales, tenemos: $\mathcal{I} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{S}$, donde las inclusiones son estrictas.

Teorema 2:1.8 La unión, A , de una sucesión de conjuntos elementales, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, es un conjunto σ -elemental.

Demo: Sea la siguiente sucesión:

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \text{ si } n > 1 \end{cases}$$

Entonces, $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$. En efecto, si $x \in A$, definimos $M = \{k / x \in A_k\} \subseteq \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es bien ordenado, M tiene un elemento mínimo. Sea éste k' . Luego, afirmamos que $x \in B_{k'}$. En efecto, de no serlo, como $x \in A_{k'}$, debe ser que $x \in A_{k''}$ para un $k'' < k'$, absurdo. Por otro lado, si $x \in B_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces, $x \in A_k$ y por lo tanto a A y así se verifican ambas inclusiones. Además, si $i \neq j$ se tiene que $B_i \cap B_j = \emptyset$. Efectivamente (supongamos $i < j$), si

$$\begin{aligned} x \in B_i \cap B_j &= \left(A_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right) \cap \left(A_j - \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \right) \\ &= \left(A_i \cap \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k^c \right) \cap \left(A_j \cap \bigcap_{k=1}^{j-1} A_k^c \right) \end{aligned}$$

Tenemos en particular que $x \in A_i \cap A_i^c$, absurdo.

Por último, como cada B_i es la diferencia de conjuntos elementales, es un conjunto elemental. Obtenemos, así, que A es la unión de un conjunto numerable de conjuntos elementales disjuntos dos a dos, o sea A es σ -elemental $\square$

Teorema 2:1.9 La unión de una sucesión de conjuntos σ -elementales es un conjunto σ -elemental y la intersección de un numero finito de conjuntos σ -elementales también lo es.

Demo: Si $A_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{jk} \wedge j \in \mathbb{N}$, en donde, para cada j los conjuntos A_{jk} son disjuntos dos a dos, la tesis se deduce directamente de las formulas:

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{jk} \quad \text{y} \quad \bigcap_{j_p=1}^n A_{j_p} = \bigcap_{p=1}^n \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{j_p k} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{p=1}^n A_{j_p k}$$

del teorema 2:1.8 y del hecho de que la intersección de un numero finito de conjuntos elementales es un conjunto elemental $\square$

Teorema 2:1.10 Todo conjunto abierto U es σ -elemental.

Demo: Llamemos $\mathcal{S} = \{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a la familia de intervalos de $\mathbb{R}^n$ cuyos vértices tengan coordenadas racionales. Esta familia cubre a $\mathbb{R}^n$ y es numerable. Entonces la subfamilia $\mathcal{S}' = \{I_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ formada por todos los intervalos contenidos en U es tal que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{i_k} = U$. Que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{i_k} \subseteq U$ es obvio porque cada $I_{i_k} \subseteq U$. Ahora, si $x \in U$, existe una bola centrada en x contenida en U porque es abierto. Pero dentro de esta bola hay un intervalo abierto $I_{i_k'}$ que contiene a x . Luego $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{i_k}$. Entonces $U \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{i_k}$. Luego, U es la unión de una cantidad numerable de conjuntos σ -elementales y por lo tanto es σ -elemental $\square$

Teorema 2:1.11 Si el conjunto σ -elemental U está incluido en la unión de una sucesión de conjuntos σ -elementales U_k , se tiene:

$$m(U) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m(U_i)$$

Demo: Sea $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ y $U_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{j,i}$ siendo en cada caso conjuntos disjuntos dos a dos y elementales. Se tiene por hipótesis:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \subseteq U \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{j,i}$$

por el teorema 2:1.7 se tiene, ya que $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$:

$$\sum_{k=1}^n m(A_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

Debido que $\bigcup_{k=1}^n A_k \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{j,i}$,

$$m\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{j,i}\right)$$

Por el teorema 2:1.7, y teniendo en cuenta que cada $B_{j,i}$ es elemental:

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{j,i}\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} m(B_{j,i})$$

Y finalmente por definición de medida de un conjunto σ -elemental,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} m(B_{j,i}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(U_i)$$

En definitiva:

$$\sum_{k=1}^n m(A_k) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m(U_i)$$

Tomando el límite para $n \rightarrow \infty$ llegamos a la tesis $\square$

Corolario Si $A \subseteq B$ son conjuntos σ -elementales, entonces $m(A) \leq m(B)$.

Demo: En efecto, por el teorema anterior, $A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ con $B_1 = B$ y $B_j = \emptyset$ si $j > 1$ $\square$

Definición 2:1.4: Dada una función $\phi: K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, en donde K es una familia de conjuntos, se dice que es σ -aditiva sii para cualquier colección numerable, $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de conjuntos disjuntos dos a dos de K , se cumple que:

$$\phi\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi(E_k),$$

cuando la unión $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ pertenezca a K . Por lo tanto la medida de conjuntos σ -elementales es σ -aditiva.

2:2 Medida Exterior de Lebesgue

Definición 2:2.1 Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera, entonces definimos su medida exterior como:

$$m_e(E) = \inf \{m(U) / E \subseteq U \wedge U \text{ es } \sigma\text{-elemental}\} \quad (1)$$

Esta definición es correcta ya que el conjunto sobre el cual se toma el ínfimo es no vacío. En efecto $\mathbb{R}^n$ pertenece⁸ a este conjunto. Si el ínfimo de la definición no es $+\infty$, se dice que la medida exterior del conjunto es finita. Además, si $m_e(E) < +\infty$, se tiene por la definición de ínfimo, que dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto σ -elemental U tal que

⁸ Ya que se tiene $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i_1 \in \mathbb{Z}} \bigcup_{i_2 \in \mathbb{Z}} \dots \bigcup_{i_n \in \mathbb{Z}} \left\{ \prod_{j=1}^n (i_j, i_j + 1] \right\}$, es decir la unión numerable de intervalos disjuntos.

$E \subseteq U$ verifica, $m(U) \leq m_e(E) + \varepsilon$ (1). Por esta definición, si U es σ -elemental, entonces $m_e(U) = m(U)$ (se demuestra abajo).

Teorema 2:2.1 La medida exterior tiene las siguientes propiedades:

$$(i) \ 0 \leq m_e(E) \leq +\infty \text{ y } m_e(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \text{ Si } E_1 \subseteq E_2 \text{ entonces } m_e(E_1) \leq m_e(E_2)$$

$$(iii) \text{ Si } A \text{ es } \sigma\text{-elemental entonces } m_e(A) = m(A)$$

$$(iv) \ m_e\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(A_k), \text{ el caso finito es un caso particular de éste.}$$

(v) Si E_1 y E_2 son conjuntos de medida exterior finita, entonces se cumple:

$$|m_e(E_1) - m_e(E_2)| \leq m_e(E_1 \Delta E_2)$$

Demo: La primera es obvia. (ii) Como la familia de conjuntos elementales que contiene a E_1 incluye al de los que contienen a E_2 el ínfimo del primero es no menor al del segundo. Es de notar que esta propiedad de la medida exterior depende de las propiedades del ínfimo de un conjunto y no de la definición particular de medida. (iii) En efecto, Como $m(U)$ pertenece al conjunto del cuál $m_e(U)$ es ínfimo, $m_e(U) \leq m(V) < m(U)$ (Por propiedad del ínfimo). Si $m_e(U) < m(U)$ entonces existe V σ -elemental con $U \subseteq V$ tal que $m_e(U) \leq m(V)$. Pero si $U \subseteq V$, por el teorema 2:1.1, $m(V) \geq m(U)$, absurdo. Luego, $m_e(U) = m(U)$ y se obtiene la igualdad.

(iv) Supongamos que la serie de la derecha es convergente, sino la propiedad se cumple trivialmente. Dado un $\varepsilon > 0$, existe para cada $k \in \mathbb{N}$ un conjunto σ -elemental U_k tal que:

$$A_k \subseteq U_k \text{ y } m(U_k) \leq m_e(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \quad (2)$$

lo anterior es por la propiedad del ínfimo (1). Además:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k = U$$

donde U es σ -elemental. Y se cumple:

$$\begin{aligned} m_e(A) &\leq m_e(U) = m(U) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(U_k) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\{ m_e(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right\} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(A_k) + \varepsilon \end{aligned}$$

Las justificaciones son, por (iii) demostrado arriba, por ser U σ -elemental, por propiedad de la medida de conjuntos σ -elementales, por (2) y por propiedades de series de términos positivos. En definitiva obtuvimos que para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$m_e(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(A_k) + \varepsilon$$

Y de ahí la tesis.

(v) Se tiene que:

$$E_1 \subseteq E_2 \cup (E_1 \Delta E_2) \text{ y } E_2 \subseteq E_1 \cup (E_1 \Delta E_2)$$

Por lo tanto:

$$m_e(E_1) \leq m_e(E_2) + m_e(E_1 \Delta E_2) \text{ y } m_e(E_2) \leq m_e(E_1) + m_e(E_1 \Delta E_2)$$

Reordenando:

$$m_e(E_1) - m_e(E_2) \leq m_e(E_1 \Delta E_2) \quad \text{y} \quad m_e(E_1) - m_e(E_2) \geq -m_e(E_1 \Delta E_2)$$

Y de ahí sale la tesis $\square$

Teorema 2:2.2 Si $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos de medida exterior finita, tal que $m_e(E_k \Delta E)$ tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$, entonces la medida exterior de E es finita y⁹

$$m_e(E) = \lim_k m_e(E_k)$$

Demo: Como $\lim_k m_e(E_k \Delta E) = 0$, se tiene por definición que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_0$:

$$m_e(E_k \Delta E) < \varepsilon$$

Pero por (v) del teorema anterior se sigue que:

$$|m_e(E_1) - m_e(E)| < \varepsilon$$

o sea que $m_e(E) = \lim_k m_e(E_k)$. Solo queda probar que la medida exterior de E es finita. Como $E \subset E_k \cup (E_k \Delta E)$ se tiene que $m_e(E) \leq m_e(E_k) + m_e(E \Delta E_k)$ y esto prueba lo que faltaba con sólo tomar un k adecuado $\square$

Nota 2:2.1 Si bien la medida exterior cumple muchas condiciones y es un buen candidato para una medida, tiene un defecto fundamental: no es σ -aditiva. De hecho se probará más adelante que existen conjuntos disjuntos A y B tales que

⁹ Como cuando se habla de límite de una sucesión, se habla del único límite posible, cuando $n \rightarrow \infty$, no hay ambigüedad en escribir $\lim_n a_n$ en vez de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$m_e(A \cup B) \neq m_e(A) + m_e(B)$. Por eso no es posible definir una medida así, tenemos que agregar otra condición si queremos mantener que una medida debe ser σ -aditiva. Lo que se hace es restringir la familia de conjuntos que podrán considerarse medibles. Es decir, si bien esta nueva medida servirá para una mayor cantidad de conjuntos no será utilizable para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. De esto se desprende la siguiente definición.

2:3 Conjuntos Medibles

Definición 2:3.1 Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá medible si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto σ -elemental U tal que:

$$E \subseteq U \text{ y } m_e(U - E) < \varepsilon$$

Si E es medible a su medida exterior se la llamara medida y se notará $m(A)$.

Entonces es evidente que un conjunto σ -elemental E es medible, ya que $E \subseteq E$ y $m_e(E - E) = 0 < \varepsilon$. Además si un conjunto es de medida exterior nula, es medible. En efecto, si $m_e(E) = 0$, por definición de medida exterior, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto σ -elemental U con $E \subseteq U$ y $m(U) < \varepsilon$. Como $U - E \subseteq U$, se cumple: $m_e(U - E) \leq m_e(U) < \varepsilon$.

Teorema 2:3.1 La unión de cualquier sucesión de conjuntos medibles es un conjunto medible y la intersección de dos conjuntos medibles, también, es medible.

Demo: Sea $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión de conjuntos medibles y $\varepsilon > 0$. Se cumple que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto σ -elemental U_k tal que:

$$E_k \subseteq U_k \text{ y } m_e(U_k - E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Luego,

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k = U$$

En donde U es σ -elemental. Además:

$$\begin{aligned} m_e \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k - \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) &= m_e \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (U_k - E_k) \right) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e (U_k - E_k) \\ &< \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \end{aligned}$$

Y entonces E es medible. Por otro lado sean E_1 y E_2 medibles. Sea, para $\varepsilon > 0$, U_1 y U_2 conjuntos σ -elementales tales que: $E_1 \subseteq U_1$, $E_2 \subseteq U_2$ y $m_e(U_1 - E_1) < 2^{-1}\varepsilon$, $m_e(U_2 - E_2) < 2^{-1}\varepsilon$. Se tiene que

$$E = E_1 \cap E_2 \subseteq U_1 \cap U_2 = U$$

y por otro lado, $U - E = U_1 \cap U_2 - E_1 \cap E_2 \subseteq (U_1 - E_1) \cup (U_2 - E_2)$ y entonces:

$$m_e(U - E) \leq m_e(U_1 - E_1) + m_e(U_2 - E_2) < \varepsilon$$

Lo que queríamos demostrar $\square$

Definición 2:3.2 Un conjunto es finitamente medible, si es medible y su medida es finita.

Teorema 2:3.2 Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) El conjunto E es finitamente medible.

(ii) Para todo real $\varepsilon > 0$, existe un conjunto elemental A tal que $m_e(A \Delta E) < \varepsilon$

Demo: Si E de medida finita, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ (todo conjunto σ -elemental es la unión de una sucesión de intervalos disjuntos dos a dos.) σ -elemental tal que:

$$E \subseteq U \text{ y } m_e(U - E) < 2^{-1} \varepsilon .$$

Como $U = E \cup (U - E)$ se obtienen que $m_e(U)$ es finita. Como $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ y

$$m_e(U) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(I_k) \quad ^{10}$$

es convergente. Se tiene que para cierto $N \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{k=N}^{\infty} m_e(I_k) < 2^{-1} \varepsilon$$

Entonces definimos:

$$A = \bigcup_{k=1}^{N-1} I_k \text{ y } B = \bigcup_{k=N}^{\infty} I_k$$

A es elemental y $U = A \cup B$. Se tiene: $A - E \subseteq U - E$ por lo que $m_e(A - E) \leq m_e(U - E) < 2^{-1} \varepsilon$. Y $E - A \subseteq U - A = B$ por lo que $m_e(E - A) \leq m_e(U - A) \leq m_e(B) < 2^{-1} \varepsilon$. Como

$$A \Delta E = (A - E) \cup (E - A)$$

¹⁰ Tanto U como los I_k son σ -elementales, luego, $m_e(U) = m(U)$ y $m_e(I_k) = m(I_k)$ y se da la igualdad.

tenemos:

$$m_e(A \Delta E) \leq m_e(A - E) + m_e(E - A) < \varepsilon.$$

Supongamos, ahora, que se cumple (ii), o sea existe un conjunto elemental A tal que $m_e(A \Delta E) < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, en particular se cumple para $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon'}{2}$, Entonces, por definición de medida exterior, existe un conjunto σ - elemental V tal que:

$$A \Delta E \subseteq V \text{ y } m_e(V) < \frac{\varepsilon'}{2}$$

El conjunto σ - elemental $U = A \cup V$ ¹¹ cumple, $E \subseteq A \cup (A \Delta E) \subseteq A \cup V = U$ y es de medida finita, entonces, como, $m_e(E) \leq m_e(U)$ se tiene que la medida exterior de E es finita. Por otro lado:

$$U - E \subseteq (U - A) \cup (A - E) \subseteq V \cup V = V$$

Pero entonces:

$$m_e(U - E) \leq m_e(V) < \varepsilon$$

Como se quería probar $\square$

En el teorema vimos que ser finitamente medible es equivalente a la afirmación:

(ii) Para todo real $\varepsilon > 0$, existe un conjunto elemental A tal que $m_e(A \Delta E) < \varepsilon$

¹¹ Es otro U , no el usado en la demostración $i \Rightarrow ii$.

Esto es, dada una sucesión de reales positivos $\varepsilon_k \rightarrow 0$, tenemos para cada $k \in \mathbb{N}$ un conjunto elemental A_k tal que $m_e(A_k \Delta E) < \varepsilon_k$. Dicho de otro modo, lo anterior es equivalente a:

(ii)' Existe una sucesión de conjuntos elementales (A_k) tal que $m_e(A_k \Delta E) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Si decimos que una sucesión de conjuntos, de medida exterior finita, (A_k) converge a E si $m_e(A_k \Delta E) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ y anotamos $A_k \rightarrow E$ cuando $k \rightarrow \infty$, tenemos la siguiente expresión de la proposición anterior.

(ii)' Existe una sucesión de conjuntos elementales (A_k) tal que $A_k \rightarrow E$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Resumiendo, una expresión alternativa de 2:3.2 es la siguiente:

Un conjunto E es finitamente medible si, y sólo si, existe una sucesión de conjuntos elementales (A_k) , tal que $A_k \rightarrow E$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Teniendo en cuenta, además, el teorema 2:2.2, tenemos demostrado:

Teorema 2:3.3 Un conjunto E es finitamente medible si, y sólo si, existe una sucesión de conjuntos elementales (A_k) , tal que $A_k \rightarrow E$ cuando $k \rightarrow \infty$. Además

$$m(E) = \lim_k m(E_k)$$

Teorema 2:3.4 Si $A_k \rightarrow E$ y $B_k \rightarrow F$, donde (A_k) y (B_k) son sucesiones de conjuntos elementales, se cumple:

(i) $A_k \cup B_k \rightarrow E \cup F$

$$(ii) A_k \cap B_k \rightarrow E \cap F$$

$$(iii) A_k - B_k \rightarrow E - F$$

Y por lo tanto:

$$(iv) m(E \cup F) = \lim_k (A_k \cup B_k)$$

$$(v) m(E \cap F) = \lim_k (A_k \cap B_k)$$

$$(vi) m(E - F) = \lim_k (A_k - B_k)$$

Demo: La demo es directa si se tiene en cuenta que:

$$(i) (A_k \cup B_k) \Delta (E \cup F) \subseteq (A_k \Delta E) \cup (B_k \Delta F)$$

$$(ii) (A_k \cap B_k) \Delta (E \cap F) \subseteq (A_k \Delta E) \cup (B_k \Delta F)$$

$$(iii) (A_k - B_k) \Delta (E - F) \subseteq (A_k \Delta E) \cup (B_k \Delta F)$$

□

Teorema 2:3.5 Si E y F son conjuntos finitamente medibles, entonces $E - F$ lo es también.

Demo: Sea $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists U, V$ elementales, tales que,

$$m(E \Delta U) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad m(F \Delta U) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, como:

$$(E - F) \Delta (U - V) \subseteq (E \Delta U) \cup (F \Delta V)$$

Tenemos:

$$m_e[(E - F) \Delta (U - V)] \leq m_e[(E \Delta U) \cup (F \Delta V)] < \varepsilon$$

Ahora, sean E y F conjuntos medibles cualquiera. Sea, para cada $k \in \mathbb{N}$, Q_k el cubo de centro en el origen y lado $2k$. Como la unión de todos estos cubos es igual a $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\begin{aligned} E - F &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{(E - F) \cap Q_k\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{(E \cap Q_k) - (F \cap Q_k)\} \end{aligned}$$

Como cada elemento de la última unión es la diferencia de dos conjuntos de medida finita, por el teorema 2:3.4 (iii), cada uno es un conjunto medible (finitamente, aunque esto no influye en la demo) y luego, por teorema 2:3.1, $E - F$ es medible $\square$

Corolario 1 del teorema 2:3.5: El complemento de un conjunto medible es medible.

Demo: Si A es medible, como también $\mathbb{R}^n$ es medible, $A^c = \mathbb{R}^n - A$ es medible $\square$

Corolario 2 del teorema 2:3.5: La intersección de una sucesión de conjuntos medibles es un conjunto medible.

Demo: Es directa, teniendo en cuenta que (Teorema 2:3.1) y:

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k = \mathbb{R}^n - \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k^c \quad \square$$

Corolario 3 del teorema 2:3.5 $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$ ya que

$$m(\mathbb{R}^n) = \lim_k m\left(\prod_{k=1}^n [-k, k]\right) = 2^n k^n = +\infty \quad \square$$

Corolario 3 del teorema 2:3.5 Si un conjunto es finitamente medible, su complemento tiene medida $+\infty$. Ya que si no, como $A \cap (\mathbb{R}^n - A) = \emptyset$ y $\mathbb{R}^n = A \cup (\mathbb{R}^n - A)$,

$$m(\mathbb{R}^n) = m(A) + m(\mathbb{R}^n - A) < +\infty \quad \square$$

Absurdo por el corolario 3.

Ahora demostramos la propiedad más importante de esta medida; σ -aditividad. Probemos primero lo siguiente:

Teorema 2:3.6 Si A, B son conjuntos finitamente medibles, $A \cap B$ y $A \cup B$ lo son también, se tiene:

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

Y si $A \cap B = \emptyset$, entonces:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Demo: Como los conjuntos son finitamente medibles, existen dos sucesiones de conjuntos elementales, (A_k) y (B_k) tales que $A_k \rightarrow A$ y $B_k \rightarrow B$. Se tiene, por el teorema 2:1.4,

$$m(A_k \cup B_k) + m(A_k \cap B_k) = m(A_k) + m(B_k)$$

Y por el teorema 2:3.3 y el 2:3.4 obtenemos la primera parte de la tesis. Si $m(A \cap B) = 0$, entonces $m(A \cap B) = 0$ y obtenemos la segunda parte.

Por inducción se puede probar que si $A_1, \dots, A_n$, son conjuntos disjuntos dos a dos y finitamente medibles, entonces:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n m(A_i) \quad \square$$

Teorema 2:3.7 Si E es la unión de una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos (E_k) , entonces:

$$m(E) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k)$$

también se cumple que $m(E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k)$ si los conjuntos no son necesariamente disjuntos dos a dos.

Demo: Se cumple, por el teorema anterior que:

$$\sum_{i=1}^n m(E_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \leq m(E)$$

y, entonces,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k) \leq m(E).$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} m(E) &= m_e(E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(E_k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k) \end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación $\square$

Teorema 2:3.8 Si E es medible, F es finitamente medible y $F \subseteq E$, entonces, $E - F$ es medible y

$$m(E - F) = m(E) - m(F)$$

Demo: Si las medidas de ambos conjuntos son finitas, entonces, como $E = F \cup (E - F)$ (1),

$$m(E) = m(F) + m(E - F)$$

Y se sigue la tesis. Si la medida de E no es finita, tampoco lo es la de $E - F$ por (1). Luego la igualdad se mantiene $\square$

Teorema 2:3.9 Dada una sucesión creciente de conjuntos de medida finita (E_k) , o sea, una sucesión tal que si $i \leq j$, $E_i \subseteq E_j$, entonces:

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \lim_k m(E_k)$$

Y si (E_k) es una sucesión decreciente, con $m(E_k) < \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$m\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \lim_k m(E_k)$$

Demo: Para un $k \in \mathbb{N}$ cualquiera tenemos:

$$E_k = \bigcup_{j=1}^k \{E_j - E_{j-1}\}$$

Donde los conjuntos que componen la unión son disjuntos dos a dos. Tenemos:

$$m(E_k) = \sum_{j=1}^k m(E_j - E_{j-1})$$

o sea que si llamamos $E_0 = \emptyset$,

$$\lim_k m(E_k) = \lim_k \sum_{j=1}^k m(E_j - E_{j-1}).$$

Y como $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{E_k - E_{k-1}\}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_k m(E_k) &= \lim_k \sum_{j=1}^k m(E_j - E_{j-1}) \\ &= \lim_k m\left(\bigcup_{j=1}^k [E_j - E_{j-1}]\right) \\ &= \lim_k m(E_k) \end{aligned}$$

Así llegamos a la tesis.

En la segunda parte consideremos que $m(E_1) < +\infty$ para simplificar las notaciones. Se sigue así: como $(E_1 - E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente:

$$\begin{aligned} \lim_k m(E_1) - \lim_k m(E_k) &= \lim_k \{m(E_1) - m(E_k)\} \\ &= \lim_k m(E_1 - E_k) \end{aligned}$$

Por propiedad de los límites de números reales y por 2:3.8. Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_k m(E_1 - E_k) &= m\left\{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (E_1 - E_i)\right\} \\ &= m\left\{E_1 - \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i\right\} \end{aligned}$$

Por la primera parte de este teorema. Luego por 2:3.8 otra vez:

$$m\left\{E_1 - \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i\right\} = m(E_1) - m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i\right)$$

O sea que (téngase en cuenta que $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = m(E_1)$):

$$\lim_k m(E_k) = \lim_k m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i\right).$$

Con esto queda probado el teorema $\square$

Teorema 2:3:10 Si un conjunto es numerable, es de medida nula.

Demo: En efecto, el conjunto A se puede escribir como la unión numerable de los conjuntos unipuntuales que están incluidos en él. Cada uno de estos conjuntos, $\{x_i\}$, tiene medida cero. Luego

$$m(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(\{x_i\}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 0 = 0 \quad \square$$

Nota 2:3.1 En $\mathbb{R}^n$ cualquier conjunto $\mathbb{R}^m$ donde $m < n$ es de medida nula, es fácil de ver. En efecto, sea $A \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ donde $A_i = [-p, p]$ para $i \in I_1$ y $A_{j_k} = a_{j_k}$ para $i \in I_2$ donde $\{I_1, I_2\}$ es una partición de $\{1, 2, \dots, n\}$ y el cardinal de I_1 es m .

Luego, por el teorema anterior:

$$m(A) \leq \lim_n \{(2p)^n \cdot 0\} = \lim_n 0 = 0$$

Sin embargo, es interesante ver que en $\mathbb{R}$ hay conjuntos no numerables de medida nula. En efecto, afirmamos que el conjunto de Cantor, denotado por C , tiene medida cero. Sea C_k el conjunto compuesto por 2^k intervalos de longitud $(1/3)^k$ tal que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k = C$$

Por la construcción del conjunto de Cantor, se tiene que $C \subseteq C_k$ cualquiera sea k . Por lo tanto:

$$m(C) \leq m(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Pero entonces la medida de C es cero por el teorema 2:3.9; $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión descendiente que tiende a C $\square$

Definición 2:3.3 Sea $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un elemento de $\mathbb{R}^n$, definimos $T_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la función: $T_v(x) = x + v$. La llamaremos translación de vector v , la razón es obvia. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, al transformado de A por T_v , o sea a $T_v(A)$, lo denotaremos por $A + v$.

Teorema 2:3.11 Propiedad de la translación. Para todo elemento $v \in \mathbb{R}^n$ y todo conjunto medible E , $m(E) = m(E + v)$.

Demo: Si $I \in \mathbb{R}^n$ es un intervalo producto de los intervalos $I_i = (a_i, b_i)$, entonces, $I + v$ es el producto de los intervalos $I_i = (a_i + v_i, b_i + v_i)$ cuyas longitudes son, $b_i + v_i - (a_i + v_i) = b_i - a_i = m(I_i)$. De aquí que $m(I) = m(I + v)$. Para conjuntos elementales y σ -elementales la demo se sigue directamente. Por lo tanto, como todo abierto G es σ -elementales también se sigue que $m(G + v) = m(G)$. Veamos que se cumple para cualquier conjunto medible. Primero veamos que:

$$m_e(E) = m_e(E + v)$$

Como

$$m_e(E) = \inf \{m(U) / E \subseteq U \wedge U \text{ } \sigma\text{-elemental}\}$$

y para cada U , $m(U + v) = m(U)$, se sigue que el último conjunto es

$$\{m(U + v) / E + v \subseteq U + v \wedge U \text{ } \sigma\text{-elemental}\}.$$

Es decir los ínfimos son iguales ya que lo son los conjuntos.

Si E es medible, entonces $\forall \varepsilon > 0$, existe un U σ -elemental, tal que

$$E \subseteq U \text{ y } m_e(U - E) < \varepsilon.$$

Pero, si se da lo de arriba, $E + v \subseteq U + v$ y

$$\begin{aligned} m_e(U + v - (E + v)) &= m_e((U - E) + v) \\ &= m_e(U - E) < \varepsilon \end{aligned}$$

O sea $E + v$ es medible y su medida es $m(E)$ $\square$

2:4 Estructura topológica de los conjuntos medibles

Definición 2:4.1 Diremos que el conjunto A es de clase F_σ si es la unión de una familia numerable de conjuntos cerrados. Es decir:

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \text{ con } F_k \text{ cerrado para cada } k \in \mathbb{N}$$

Decimos que B es de clase G_δ si es la intersección de una familia numerable de conjuntos cerrados. Es decir:

$$B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k \text{ con } G_k \text{ abierto para cada } k \in \mathbb{N}$$

Es evidente que el complemento de un conjunto F_σ es un conjunto G_δ y recíprocamente. Cada conjunto abierto es medible, por ser σ -elemental. Cada conjunto cerrado es medible por ser el complemento de un conjunto medible. Por lo tanto los conjuntos F_σ y G_δ son medibles.

Teorema 2:4.1 Las siguientes proposiciones son equivalentes

(i) El conjunto E es medible

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto G tal que

$$E \subset G \text{ y } m_e(G - E) < \varepsilon$$

(iii) Existen un conjunto H de clase G_δ y un conjunto Z de medida cero tales que
 $E = H - Z$

Demo: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Como E es medible, para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto σ -elemental F tal que:

$$E \subset F \text{ y } m_e(F - E) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Como F es σ -elemental, es la unión de una sucesión de intervalos,

$$F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un intervalo abierto, I'_k tal que:

$$I_k \subseteq I'_k \text{ y } m(I'_k) < m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad (2)$$

El conjunto $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I'_k$ es abierto y cumple:

$$E \subseteq F \subseteq G$$

y

$$\begin{aligned}
 G - F &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I'_j \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (I_k)^c \\
 &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ I'_j \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (I_k)^c \right\} \\
 &\subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ I'_j \cap (I_j)^c \right\} \\
 &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{ I'_j - I_j \}
 \end{aligned}$$

Luego sumando las ecuaciones (2) para todos los $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 m_e(G - F) &= m(G - F) \\
 &\leq m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{I'_k - I_k\}\right) \\
 &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(I'_k - I_k) \quad (3) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} m(I'_k) - \sum_{k \in \mathbb{N}} m(I_k) < \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

Entonces, como, $G - E = (G - F) \cup (F - E)$, por (1) y (3) tenemos,

$$m_e(G - E) = m_e(G - F) + m_e(F - E) < \varepsilon$$

Y listo. Probemos, ahora que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Como sabemos que se cumple (ii) , tenemos para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un abierto G_k tal que

$$m_e(G - E) < \frac{1}{k}$$

El conjunto $H = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k$ incluye a E y es de clase G_δ . Además: $H - E \subseteq G_k - E$ y

entonces:

$$m_e(H - E) \leq m_e(G_k - E) < \frac{1}{k}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto, $m_e(H - E) = 0$. Defino $Z = H - E$. Entonces

$$H - Z = H \cap (H - E)^c = H \cap (H \cap E^c)^c = H \cap (H^c \cup E) = H \cap E = E$$

Y como Z tiene medida exterior nula, es medible y su medida es cero. así se demuestra la segunda implicación.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Tenemos que $E = H - Z$, con H de clase G_δ y $m(Z) = 0$, como los conjuntos G_δ son medibles y la diferencia de dos Conjuntos medibles es un conjunto medible, obtenemos la tercera implicación y la equivalencia de los tres enunciados $\square$

Corolario: Todo conjunto medible está contenido en un conjunto de clase G_δ de igual medida.

Demo: Es otra forma de decir (iii) del teorema anterior $\square$

Teorema 2:4.2 Todo conjunto medible es la unión de un conjunto de clase F_σ y un conjunto de medida nula.

Demo: Si E es medible, E^c , también lo es. Por el teorema anterior, si E^c es el conjunto medible, existe un conjunto G de clase G_δ y un conjunto Z de medida nula tal que

$$E^c = G - Z$$

Por lo tanto,

$$E = (G - Z)^c = (G \cap Z^c)^c = G^c \cup Z$$

En donde G^c es el complemento de un conjunto G_δ , o sea es un conjunto F_σ .

Recíprocamente, si $E = G \cup Z$, con $G \in F_\sigma$ y Z de medida nula, entonces E es medible porque la unión de conjuntos medibles lo es $\square$

Teorema 2:4.3 Todo conjunto medible E cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto G y uno cerrado F que cumplen:

$$F \subseteq E \subseteq G \text{ y } m(G - F) < \varepsilon \quad (1)$$

Y recíprocamente, si se cumple (1) entonces E es medible.

Demo: Por el teorema 2:4.1, podemos tomar un abierto G tal que

$$E \subseteq G \text{ y } m(G - E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

como el complemento de E también es medible, existe H abierto tal que

$$E^c \subseteq H \text{ y } m(H - E^c) = m(H \cap E) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces $F = H^c \subseteq E$ y F es cerrado. Pero

$$G - F = (G - E) \cup (E - F) = (G - E) \cup (E \cap F^c) = (G - E) \cup (E \cap H)$$

Es decir:

$$m(G - F) = m(G - E) + m(H \cap E) < \varepsilon$$

O sea que E es medible. El recíproco, si se cumple (1), en particular se cumple

$$E \subseteq G \text{ y } m(G - F) < \varepsilon.$$

Pero $G - E \subseteq G - F$ y $m(G - E) \leq m(G - F) < \varepsilon$, o sea que E es medible $\square$

Tenemos, ahora, una definición más de conjunto medible. O sea podemos decir que E es medible sii para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto G y uno cerrado F que cumplen: $F \subseteq E \subseteq G$ y $m(G - F) < \varepsilon$.

Teorema 2:4.5 Definición alternativa de medida exterior. La medida exterior definida arriba, es igual a la siguiente, para todo conjunto:

$$m_e(E) = \inf \{m(G) / E \subseteq G \wedge G \text{ es abierto}\}$$

Demo: En efecto, por definición de ínfimo de un conjunto y de medida exterior, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto σ -elemental U tal que,

$$E \subseteq U \text{ y } m(U) \leq m_e(E) + \varepsilon$$

Además, como E es medible, existe un conjunto abierto G , tal que:

$$U \subseteq G \text{ y } m(G - U) < \varepsilon.$$

Llamemos α al ínfimo de $\{m(G) / E \subseteq G \wedge G \text{ es abierto}\}$. Como $G = U \cup (G - U)$, tenemos:

$$\alpha \leq m(G) = m(U) + m(G - U) < m_e(E) + 2\varepsilon$$

Luego: $\alpha \leq m_e(E)$. Por otro lado, cada conjunto abierto es σ -elemental y tenemos:

$$\{m(G)/E \subseteq G \wedge G \text{ es abierto}\} \subseteq \{m(G)/E \subseteq G \wedge G \text{ } \sigma\text{-elemental}\}$$

O sea que el ínfimo del primero no es menor que el del segundo; $\alpha \geq m_e(E)$ $\square$

2:5 Imposibilidad de extender la medida a todo conjunto de $\mathbb{R}^n$.

Hemos definido una medida para conjuntos de $\mathbb{R}^n$, y a su vez dimos la definición de conjunto medible, es decir aquel conjunto que admite una medida. La pregunta que surge es la siguiente, ¿Es todo conjunto de $\mathbb{R}^n$ medible según la definición dada de medida? Además una cuestión íntimamente ligada a esta pregunta es por qué no se definió como medida de un conjunto a su medida exterior, que era el candidato esperado para medida.

Damos la respuesta a la primera pregunta y esta es negativa, en efecto la medida definida arriba, y como se verá más adelante, cualquier medida definida sobre una familia de conjuntos, no puede ser extendida a una medida para todo elemento de la familia y conservar la propiedad de σ -aditividad e invariancia bajo translaciones. De hecho ni siquiera se puede hallar una medida que se aplique a todo conjunto y sea aditiva e invariante bajo translaciones.

En el plan seguido se definió la medida para ciertos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ (los intervalos), esta se extendió a conjuntos más generales (conjuntos elementales) y luego se volvió a generalizar esta a conjuntos aún más generales (conjuntos σ -elementales). Aquí se hizo una generalización algo diferente. Ya no se definió una medida para una clase de conjuntos más generales, más bien se definió un concepto más débil, el de medida exterior de un conjunto, y se vio que todo conjunto tiene medida exterior.

De acá en más lo que se hizo fue ampliar la familia de conjuntos, pero ya no como antes, definiéndolos a ellos y extendiendo la medida, sino de la siguiente forma. Se definió como conjunto medible a aquellos que cumplieran cierta propiedad, y los conjuntos a los que se generalizó la medida fueron ellos y sólo ellos. La propiedad es la dada en la definición 2:3.1, a saber:

Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá medible si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto σ -elemental U tal que:

$$E \subseteq U \text{ y } m_e(U - E) < \varepsilon$$

Si E es medible a su medida exterior se la llamara medida y se notará $m(A)$.

Estos conjuntos se denominaron medibles. Veremos a continuación que no todo conjunto de $\mathbb{R}^n$ es medible y para ello daremos un ejemplo de uno que no lo es. En la construcción (más bien, en la demostración de la existencia de este conjunto; no se da método para construirlo.) de este conjunto se utiliza el axioma de elección, de ahí que la verdadera construcción del conjunto no exista. Recordemos que el axioma de elección postula la existencia de un conjunto, pero no la forma de obtenerlo, de hecho la construcción de tales conjuntos es hasta el momento imposible.

La versión del axioma de elección que usaremos es la siguiente, conocida como Axioma de Zermelo:

Axioma de Zermelo: Dada una familia X disjunta e infinita de conjuntos, existe un conjunto $C \subseteq \bigcup X$ tal que la intersección de C con cada conjunto de la familia es un conjunto unitario.

Dicho de otra forma, el axioma garantiza que se puede formar un conjunto con exactamente un elemento de cada conjunto de la familia.

A continuación damos la demostración de un conjunto tal, llamado conjunto de Vitali.

Teorema 2:5.1 Conjunto de Vitali Existe un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que no es medible según Lebesgue.

Demo: Construyamos un conjunto de $\mathbb{R}^n$ que no es medible según la definición de medida dada por Lebesgue.

En el intervalo $E = \prod_{i=1}^n (0,1)$ definimos la siguiente relación,

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n$. Esta relación es de equivalencia.

En efecto, es reflexiva; xRx ya que $x - x = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Q}^n$. Es simétrica, xRy sii $x - y \in \mathbb{Q}^n$, pero, entonces, $y - x \in \mathbb{Q}^n$ e yRx . Y, por último, es transitiva, $xRy \wedge yRx$ implica que $x - y \in \mathbb{Q}^n \wedge y - z \in \mathbb{Q}^n$, pero la suma de racionales es un racional, luego $x - y + y - z = x - z \in \mathbb{Q}^n$ y obtenemos que xRz .

Por lo tanto, E queda dividido en clases de equivalencias que son una partición del conjunto (son no vacías, disjuntas dos a dos y su unión es E). Denotemos a la clase de $x \in E$ como, $\bar{x}$. Téngase en mente que cada clase es un conjunto de la forma:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \{y \in E / y - x \in \mathbb{Q}^n\} \\ &= \left\{y \in E / y - x = r \wedge r \in \prod_{i=1}^n (-1, 1) \cap \mathbb{Q}^n\right\} \\ &= \left\{y \in E / y = x + r \wedge r \in \prod_{i=1}^n (-1, 1) \cap \mathbb{Q}^n\right\}\end{aligned}$$

Esto nos dice que cada clase de equivalencia tiene una cantidad numerable de elementos. Pero como su unión es no numerable, debe haber una cantidad no numerable de estas clases.

Por el axioma de elección, según la versión de Zermelo, existe un conjunto V tal que $V \cap \bar{x} = \{x\}$, o sea que V es el conjunto formado por un único representante de cada clase. Y por el párrafo anterior, V es un conjunto no numerable. De hechos, de haber sido numerable sería medible, con medida cero, y todo lo que estamos haciendo sería en balde.

Si $y \in E$, existe un único $x \in V$ tal que $y = x + r$ con r pertenece a $\prod_{i=1}^n (-1, 1) \cap \mathbb{Q}^n$

que será, también, único. Denotemos por $I \subseteq \prod_{i=1}^n (-1, 1) \cap \mathbb{Q}^n$ al conjunto de cada uno

de estos r . Por lo dicha, tenemos:

$$E \subseteq \bigcup_{r \in I} (V + r) \subseteq \prod_{i=1}^n (-1, 2) \quad (1)$$

Demostremos la primera inclusión, la otra es evidente. En efecto, si $y \in E$ y es un elemento del conjunto de Vitali, entonces $y \in V + (0, \dots, 0) \Rightarrow \bigcup_{r \in I} (V + r)$, si no, como tiene que pertenecer a alguna clase, será $y = x + r$ para ciertos $x \in V$ y $r \in I$, es decir, $y \in V + r$. Queda probada la inclusión.

Veamos que los conjuntos son disjuntos. Sea $y \in (V + r) \cap (V + q)$, entonces, $y = x + r$ e $y = x' + q$, pero como hay un solo $x \in V$ con el cual y está relacionado, $x = x'$ y $r = q$.

Supongamos que V es medible y llamemos a su medida $m(V)$. Por la invariancia de la medida bajo las translaciones, $\forall r \in I : m(V) = m(V + r)$. Entonces de las inclusiones (1), obtenemos:

$$1 \leq \sum_{r \in I} m(V) \leq 3^n$$

Pero, todos los términos de la sucesión de arriba son iguales, como esta no diverge (es no mayor a 3^n) deben ser todos sus términos cero. Pero entonces la suma es cero, menor a 1, absurdo. Luego el conjunto de Vitali no puede ser medible $\square$

Veamos ahora, con el conocimiento de un conjunto no medible Lebesgue, que la medida exterior no es aditiva y, por lo tanto, no es un buen candidato para formar una medida.

Teorema 2:5.2 La medida exterior no es aditiva. Es decir existen $A, B \in \mathbb{R}^n$ disjuntos y tales que $m_e(A) + m_e(B) \neq m_e(A \cup B)$.

Demo: Como la medida exterior es σ -subaditiva¹², si fuera aditiva sería σ -aditiva. En efecto, se tiene:

¹² Ver 3:6 para más detalles.

$$m_e \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e (A_k)$$

Supongamos que es aditiva, entonces por inducción tenemos:

$$m_e \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n m_e (A_k)$$

Y entonces:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} m_e (A_k) = \lim_n \sum_{k=1}^n m_e (A_k) = \lim_n m_e \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e (A_k).$$

Es decir que la medida exterior sería σ -aditiva, como se quería probar. Por otro lado, se vio que la medida exterior es invariante bajo la translación y esto nos permite reconstruir mutatis mutandis la construcción del conjunto de Vitali usando la medida exterior. Llegaríamos a lo siguiente:

$$1 \leq \sum_{r \in A} m_e (V) \leq 3^n$$

Que vimos que era contradictorio. Luego el conjunto de Vitali no puede tener medida exterior, lo cual es también absurdo, porque se probó que todo conjunto tiene medida exterior. Este absurdo provino de suponer que la medida exterior era aditiva, luego, no lo es $\square$

Como en el caso del conjunto de Vitali, este teorema nos asegura la existencia de conjuntos disjuntos tales que:

$$m_e (A) + m_e (B) \neq m_e (A \cup B),$$

aunque no da forma de hallarlos. Además esta demostración está basada en la aceptación del axioma de elección. Volveremos luego a este tema.

De lo anterior se deduce el siguiente teorema, de gran importancia por lo que implica.

Teorema 2:5.3 No existe ninguna medida aditiva e invariante bajo la translación que este definida para todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Demo: Es la misma usada para la medida de Lebesgue, ya que en la demo sólo se uso el hecho de que la medida de Lebesgue es σ -aditiva e invariante bajo la translación, el resto de las hipótesis son referentes al espacio topológico usual de $\mathbb{R}^n$ $\square$

Nota 2:5.1 En todo este apartado hemos hecho uso del axioma de elección y por lo tanto surge la pregunta de rigor, ¿Cómo está ligado el axioma de elección con la existencia de conjuntos no medibles? En principio, el único ejemplo de conjunto no medible del que se dispone es el dado aquí, o alguna versión similar. O sea, el conjunto de Vitali. Pero para la construcción de éste nos basamos en la aceptación del axioma de elección. ¿Sería posible una teoría de la medida, basada en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) sin el axioma de elección, en la cual no todo conjunto de $\mathbb{R}$ sea medible?

Si bien no es el objetivo de la exposición, comentamos que se ha probado que el axioma de elección no es equivalente a la existencia de conjuntos no medibles. Esto es si la teoría de conjuntos ZF es consistente, también es consistente la teoría ZF sin el axioma de elección y en la cual no todo conjunto es medible (no se olvide el lector que cuando decimos medible estamos hablando de medida de Lebesgue).

Por otro lado en un trabajo de Solovay¹³ se prueba que si es consistente ZF con el axioma que establezca la existencia de un cardinal inaccesible, entonces también es consistente ZF en donde todo conjunto de reales es medible.

En definitiva, como nosotros usamos como sistema axiomático la teoría de conjuntos ZF con el axioma de elección, tenemos que las medidas σ -aditivas e invariantes bajo la translación no se pueden extender a todo conjunto de $\mathbb{R}^n$.

¹³ Solovay R.M.: "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable". Ann of Math., 92, 1-56, 1970 (MR42,1,64).

Hasta aquí la primera parte del trabajo, la exposición detallada de un modelo de la teoría de la medida, la de Lebesgue y sus propiedades más sobresalientes. En lo que sigue nos abocamos a la tarea fundamental del trabajo, la posibilidad de dar una base axiomática rigurosa a esta teoría.

Como puede advertir, partiremos de la teoría de conjuntos ZF con el axioma de elección y de allí construiremos la axiomática de la teoría de la cual lo visto arriba es un modelo. Y quedara así demostrada la existencia de modelo a la axiomática propuesta. El plan utilizado, como ya se dijo es al revés de lo esperado, pero es el que mejor refleja el proceso histórico de las teorías axiomáticas. En efecto, es lo natural que el modelo preceda a la axiomatización, aunque una vez alcanzado este el estudio de las teorías sea siempre, o casi siempre, llevado a cabo exponiendo la axiomática y presentando modelos que sirvan de ejemplo, dentro los cuales figura el que dio origen a esta axiomática.

De aquí en adelante; la presentación de la axiomatización.

3: Nuestra axiomatización de la teoría de la medida de Lebesgue.

3:1 Preliminares

Definición 3:1.1 Sucesiones de conjuntos y clases monótonas. Sea una familia de conjuntos $\mathfrak{F}$. Una sucesión de conjuntos es una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{F}$. Si $f(i) = A$ donde $A_i \in \mathfrak{F}$ lo notaremos de la siguiente forma, A_i . Y a la sucesión la escribimos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ o mas compactamente, cuando no haya lugar a ambigüedad, $\{A_i\}$. Al conjunto imagen de la sucesión, $f(\mathbb{N})$ también lo notamos $\{A_i\}$. Es un abuso de notación ampliamente usado en la literatura matemática por eso lo introduzco. Sin embargo el contexto siempre elimina las ambigüedades, si no, se aclarará oportunamente a que nos hacemos referencia. Otro abuso de notación común es decir que la sucesión está incluida en una familia $\mathfrak{F}$ cuando lo está su imagen. Es decir si $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathfrak{F}$, simplemente decimos que la sucesión está incluida en $\mathfrak{F}$. Si la sucesión de conjuntos es tal que $i > j$ implica que $A_i \supseteq A_j$ la sucesión se denomina creciente. Si para todo $i > j$ se cumple $A_i \subseteq A_j$ se denomina decreciente. Si las inclusiones son siempre estrictas, las sucesiones se denominan estrictamente creciente o decreciente respectivamente.

Denominamos límite superior y límite inferior de una sucesión de conjuntos a los siguientes conjuntos respectivamente:

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n \text{ y } \liminf_n A_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} A_n$$

Se cumple la siguiente propiedad, si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es creciente $\liminf_n A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y notamos,

$$A_n \nearrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \text{ Y si } \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ es decreciente } \limsup_n A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ y notamos, } A_n \searrow \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_n.$$

En efecto, si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es creciente, $\bigcap_{n \geq m} A_n = A_m$, entonces $\liminf_n A_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$,

cambiando los subíndices para que la notación quede más homogénea,

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Por otro lado, si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es decreciente $\bigcup_{n \geq m} A_n = A_m$, entonces, $\limsup_n A_n = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$, y

cambiando los subíndices:

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Por lo visto, entonces, si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es creciente tenemos, $A_n \nearrow A$ y

decimos, simplemente, que $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiende crecientemente a A . A veces solo diremos

que tiende a A . De la misma forma, si $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es decreciente tenemos,

$A_n \searrow A$ y decimos, simplemente, que $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiende decrecientemente a A o

simplemente que tiende a A .

Definición 3:1.2 Sea Γ una familia de conjuntos. Una subclase $\mathfrak{C}$ de Γ es una clase monótona sii

- (i) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{C}$ y $A_n \nearrow A$ entonces $A \in \mathfrak{C}$ con $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ creciente
- (ii) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{C}$ y $A_n \searrow A$ entonces $A \in \mathfrak{C}$ con $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente

3:2 Las estructuras algebraicas de las familias de conjuntos

En la primera parte de la exposición definimos medida para cierta familia de conjuntos, los intervalos, vamos en principio a generalizar este concepto. Es decir definiremos una familia de conjuntos de modo tal que cumpla con las propiedades que cumplen los intervalos que son las responsables de que las propiedades demostradas se cumplan.

En el desarrollo se ve que las propiedades de la medida (nótese que no daremos demostraciones referentes a la medida, sólo al sistema de conjuntos, lo referente a medida vendrá después.)

Lo que nos permitió desarrollar el tema es que los intervalos de $\mathbb{R}^n$ cumplen con ciertas propiedades; una, que el conjunto vacío era considerado un intervalo, la segunda que la intersección de un número finito de conjuntos del sistema pertenecía al sistema y la tercera, que dados dos conjuntos, $A_1 \subseteq A$ era posible encontrar un conjunto finito de intervalos tales que la unión de A_1 con ellos era el conjunto A y que además la familia formada por A_1 y los conjuntos hallados era disjunta dos a dos.

De aquí surge la siguiente definición:

Definición 3:2.1 Una familia $\mathfrak{S}$ se denomina semianillo de conjuntos sii:

$$(i) \quad \emptyset \in \mathfrak{S}^{14}$$

$$(ii) \quad A_1, A_2 \in \mathfrak{S} \text{ entonces } A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{S}^{15}$$

$$(iii) \quad A_1, A \in \mathfrak{S}, \quad A_1 \subseteq A, \text{ entonces existen } \{A_2, A_3, \dots, A_n\} \text{ tales que } A = \bigcup_{k=1}^n A_k \text{ y}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j \quad \text{con} \quad 1 \leq i, j \leq n^{16}$$

Definimos intervalo a cada miembro de un semianillo. Esto es una definición que no tiene ninguna relación con el concepto de intervalo real (o de $\mathbb{R}^n$) dado en la primera parte de la exposición. Veamos algunas propiedades de los semianillos. De ahora en adelante a toda familia $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$, finita, y disjunta dos a dos de conjuntos de un anillo, intervalos, la llamaremos descomposición disjunta, o solamente descomposición de su conjunto unión, $A = \bigcup \{A_1, A_3, \dots, A_n\}$. Si existe $E \in \mathfrak{S}$ tal que para todo elemento $A \in \mathfrak{S}$ se cumple que:

$$E \cap A = A$$

A E se lo denomina unidad del semianillo y al semianillo, semianillo con unidad.

¹⁴ Véase definición 1:1.1

¹⁵ Véase teorema 1:1.1

¹⁶ Abuso de notación ampliamente usado; $1 \leq i, j \leq n$ quiere decir $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Teorema 3:2.1 Si $A, B \in \mathfrak{S}$, entonces existe $\{A_2, A_3, \dots, A_n\} \subseteq \mathfrak{S}$, disjunta, tal que

$$A - B = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

Demo: Como $A_1 = A \cap B \in \mathfrak{S}$ y $A_1 = A \cap B \subseteq A$. Por (iii) tenemos una familia disjunta dos a dos:

$$\{A_2, A_3, \dots, A_n\} \subseteq \mathfrak{S}$$

tal que:

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Pero, como $A - B = A - (A \cap B)$, llegamos a que:

$$A - B = \bigcup_{k=2}^n A_k$$

Listo $\square$

Nótese que lo que afirma el teorema es que la diferencia de dos conjuntos del semianillo es unión de conjuntos del semianillo. Pero los semianillos no son, en general, cerrados para la unión de sus elementos, luego la diferencia, en general, no es parte del anillo¹⁷.

El teorema 1:3.1 nos garantiza que los intervalos de $\mathbb{R}^n$ cumplen (iii). En efecto, sean $A_1, A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $A_1 \subseteq A$. Por el teorema 1:3.1:

¹⁷ Véase Teorema 1:1.3 parte 3.

$$A - A_1 = \bigcup_{k=2}^n A_k$$

Y por lo tanto:

$$A = (A - A_1) \cup A_1 = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

Entonces, definitivamente, invirtiendo el orden del desarrollo, podríamos decir que el conjunto de intervalos de $\mathbb{R}^n$ es un semianillo de conjuntos.

Desarrollemos un poco más, dando algunas propiedades que nos serán útiles más adelante y de paso nos permitirán explotar esta nueva exposición axiomática de lo visto arriba.

Teorema 3:2.2 Sean $A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{S}$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ y para cada i , $A_i \subseteq A$. Entonces existe una familia disjunta dos a dos, $\{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ tal que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n+p} A'_k \quad \text{con} \quad A'_k = \begin{cases} A_k & \Leftrightarrow 1 \leq k \leq n \\ B_{k-n} & \Leftrightarrow n < k \leq n+p \end{cases}.$$

Demo: Por inducción sobre el número n de conjuntos iniciales. El caso $n=1$ es (iii) de la definición de semianillo (Definición 3:2.1). Veamos que si vale para h esto implica que vale para $h+1$.

Sea $A, A_1, A_2, \dots, A_h \in \mathfrak{S}$ cumpliendo las condiciones de la hipótesis, entonces existen $\{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ tales que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{h+p} A'_k \quad \text{con} \quad A'_k = \begin{cases} A_k & \Leftrightarrow 1 \leq k \leq h \\ B_{k-h} & \Leftrightarrow h < k \leq h+p \end{cases}$$

O asociando las uniones:

$$A = \bigcup_{k=1}^h A_k \cup \bigcup_{j=1}^p B_j$$

Formemos los conjuntos:

$$B_{j,1} = A_{h+1} \cap B_j.$$

Por (iii) de la definición de semianillo existe $\{B_{j,2}, B_{j,3}, \dots, B_{j,s_j}\}$ disjunta dos a dos tal que para cada $1 \leq j \leq p$ se cumple:

$$B_j = \bigcup_{k=1}^{s_j} B_{j,k}.$$

Tenemos, como $B_i \cap B_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$, que $B_{i,k} \cap B_{j,k'} = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j \vee k \neq k'$ para todo $1 \leq k \leq s_j$ y todo $1 \leq k' \leq s_i$. Por otro lado:

$$A_{h+1} = \bigcup_{k=1}^p B_{k,1}.$$

Entonces, llegamos a:

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{k=1}^h A_k \cup \bigcup_{j=1}^p B_j \\ &= \bigcup_{k=1}^h A_k \cup \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{k=1}^{s_j} B_{j,k} \\ &= \bigcup_{k=1}^h A_k \cup \bigcup_{j=1}^p B_{j,1} \cup \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{k=2}^{s_j} B_{j,k} \\ &= \bigcup_{k=1}^h A_k \cup A_{h+1} \cup \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{k=2}^{s_j} B_{j,k} \\ &= \bigcup_{k=1}^{h+1} A_k \cup \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{k=2}^{s_j} B_{j,k} \end{aligned}$$

Luego por el principio de inducción completa llegamos a la tesis $\square$

Teorema 3:2.3 Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una familia finita de intervalos, entonces existe otra familia finita de intervalos del semianillo, $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ disjunta dos a dos tal que para $1 \leq k \leq n$,

$$A_k = \bigcup_{j \in N_k} B_j$$

Donde $N_k \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$.

Demo: Si $n = 1$ el teorema es obvio, la familia dada es $\{A_1\}$ y la disjunta dos a dos es $\{A_1\}$ también. Veamos que si el teorema se cumple para h , entonces, se cumple para $h + 1$.

Sea dado $\{A_1, A_2, \dots, A_h, A_{h+1}\}$ y por hipótesis inductiva, sabemos que existe $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ disjunta, tal que

$$A_k = \bigcup_{j \in N_k} B_j \text{ para } 1 \leq k \leq h.$$

Definamos:

$$B_{s,1} = A_{h+1} \cap B_s \text{ para } 1 \leq s \leq m$$

Por el teorema anterior, tenemos la descomposición de A_{h+1} siguiente:

$$A_{h+1} = \bigcup_{i=1}^m B_{i,1} \cup \bigcup_{k=1}^p C_i$$

En donde todos los conjuntos son disjuntos dos a dos. Por (iii) de la definición de semianillo (definición 3:2.1), para $1 \leq s \leq m$, podemos encontrar $\{B_{s,2}, B_{s,3}, \dots, B_{s,q_s}\}$ tal que es disjunta dos a dos y:

$$B_s = \bigcup_{i=1}^{q_s} B_{s,i}.$$

Formemos la nueva familia:

$$F = \bigcup_{i=1}^m \{B_{i,2}, B_{i,3}, \dots, B_{i,q_i}\} \cup \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$$

De acá llegamos a que para $1 \leq k \leq h$

$$A_k = \bigcup_{j \in N_k} \bigcup_{i=1}^{q_{k_i}} B_{j,i}$$

Y

$$A_{h+1} = \bigcup_{i=1}^m B_{i,1} \cup \bigcup_{k=1}^p C_k$$

Falta ver que los conjuntos de la familia F son disjuntos dos a dos. Por la construcción:

$\{B_{i,2}, B_{i,3}, \dots, B_{i,q_i}\}$ es disjunta dos a dos. Para cada $1 \leq i \leq m$. Y también lo es:

$$\{C_1, C_2, \dots, C_p\}.$$

Falta ver que cada $B_{i,j} \cap C_k = \emptyset$ para cada $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q_i$ y $1 \leq k \leq p$. Pero, también por la construcción $1 \leq k \leq p$, $A_l \cap C_k = \emptyset$ para $1 \leq l \leq h$. Y como $B_{i,j} \subseteq A_l$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q_i$ y $1 \leq l \leq h$, $B_{i,j} \cap C_k = \emptyset$ se cumple para todos los índices en

sus rangos. Y por último $B_{i,j} \cap B_{i',j'} = \emptyset$ si $i \neq i'$ ya que están incluidos en sendos conjuntos disjuntos; $B_{i,j} \subseteq B_i$ y $B_{i',j} \subseteq B_{i'}$. Por hipótesis inductiva llegamos a la tesis $\square$

Definición 3:2.2 Sea $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ en donde los A_k son disjuntos dos a dos, decimos que $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es una descomposición finita de A

Más adelante, en el desarrollo se introdujo otra familia de conjuntos, los conjuntos elementales. Los que se obtenían como la unión finita de intervalos. Estos conjuntos cumplían con las siguientes propiedades; la intersección (finita), unión (finita), diferencia y diferencia simétrica de conjuntos elementales eran también elementales. Por eso ahora vamos a definir una estructura axiomática de conjuntos que cumplan con estas propiedades, que son las que hicieron posible la continuación del desarrollo. A esta nueva familia se la llamara anillo de conjuntos y lo notaremos por $\mathfrak{R}$.

Definición 3:2.3 Una familia, no vacía, de conjuntos se denomina anillo y la denotamos por $\mathfrak{R}$, si y solo si:

- (i) $A, B \in \mathfrak{R}$ entonces $A \Delta B \in \mathfrak{R}$
- (ii) $A, B \in \mathfrak{R}$ entonces $A \cap B \in \mathfrak{R}$

Con esto alcanza, para ver que en todo anillo de conjuntos también son cerradas las uniones finitas y la diferencia. También que el conjunto vacío siempre pertenece al anillo.

Teorema 3:2.4 Si $\mathfrak{R}$ es un anillo, se cumple:

- (i) $\emptyset \in \mathfrak{R}$
- (ii) $A, B \in \mathfrak{R}$ entonces $A \cup B \in \mathfrak{R}$
- (iii) $A, B \in \mathfrak{R}$ entonces $A - B \in \mathfrak{R}$

Demo: (i) $\emptyset \in \mathfrak{R}$ ya que $A \Delta A = \emptyset$ y la diferencia simétrica es cerrada. (ii) Porque $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ y ya que la diferencia simétrica y la intersección son cerradas en un anillo. (iii) Porque $A - B = (A \Delta B) \cap A$ $\square$

Teorema 3:2.5 Todo anillo es un semianillo.

Demo: (i) y (ii) se cumplen trivialmente. Para (iii) Sea $A_1, A \in \mathfrak{R}$ y tales que $A_1 \subseteq A$. Pero entonces: $A = A_1 \cup (A - A_1)$ en donde es obvio que $A_1 \cap (A - A_1) = \emptyset$ y $A - A_1 \in \mathfrak{R}$ ya que el anillo es cerrado para la diferencia $\square$

Definición 3:2.4 Si existe $E \in \mathfrak{R}$ tal que para todo elemento $A \in \mathfrak{R}$ se cumple que:

$$E \cap A = A$$

A E se lo denomina unidad del anillo y al anillo, anillo con unidad, o más comúnmente algebra de conjuntos.

El modelo dado es un modelo en el que se uso un anillo sin unidad. Es evidente que la unidad de un anillo es un conjunto que pertenece al anillo y contiene a todos los demás conjuntos de éste. Se podría decir que es un conjunto maximal, de hecho lo es en la relación de orden parcial dada por la inclusión de conjunto.

El siguiente teorema nos será útil para demostrar un hecho medular en el desarrollo que hicimos de la teoría de la medida en el segundo capítulo del presente trabajo.

Teorema 3:2.6 La intersección de una familia arbitraria de anillos de conjuntos, es un anillo de conjuntos. Es decir, sea $\{\mathfrak{R}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de anillos, entonces

$$\mathfrak{R} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{R}_\alpha$$

Es también un anillo.

Demo: En efecto la demostración es bastante obvia. Si $A, B \in \mathfrak{R}$, entonces, para todo $\alpha \in A$ se tiene que $A, B \in \mathfrak{R}_\sigma$ $A, B \in \mathfrak{R}_\alpha$. Como cada $\mathfrak{R}_\alpha$ es un anillo, $A \Delta B$ y $A \cap B$ también pertenecen a cada $\mathfrak{R}_\sigma$ y por lo tanto a la intersección. Luego $\mathfrak{R}$ es cerrado para la diferencia simétrica y la intersección finita; es un anillo $\square$

Teorema 3:2.7 Sea $\mathfrak{F}$ una familia no vacía e conjuntos. Existe, y es único, un anillo que la contiene y tal que está incluido en cualquier otro anillo que la contenga. Es decir existe un anillo minimal que contiene a $\mathfrak{F}$.

Demo: Sea $\mathfrak{B}$ la unión de la familia de conjuntos, es decir:

$$\mathfrak{B} = \bigcup \mathfrak{F} \quad 18$$

Y tomamos el anillo formado por $P(\mathfrak{B})$ (conjunto de partes de $\mathfrak{B}$ que siempre es anillo). Sea Γ el conjunto de todos los anillos de conjuntos que están incluidos en $P(\mathfrak{B})$. $\Gamma \neq \emptyset$ porque $P(\mathfrak{B}) \in \Gamma$. Entonces el anillo buscado es:

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{S}) = \bigcap_{\mathfrak{R} \in \Gamma} \mathfrak{R}$$

Como la intersección de conjuntos está incluida en cada uno de los conjuntos que la forman, obtuvimos un anillo minimal. Veamos, ahora, que es único. Sea $\tilde{\mathfrak{R}}$ otro anillo minimal, como $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ mismo es un elemento de Γ , $\tilde{\mathfrak{R}} \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$. Pero ya se había visto que $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}) \subseteq \tilde{\mathfrak{R}}$. Luego $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ es único $\square$

Definición 3:2.5 Al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ se lo denomina anillo de conjuntos generado por $\mathfrak{S}$.

¹⁸ Uso la notación conjuntista de ZF. Es decir, definimos $\bigcup A$ al conjunto de todos los elementos que son miembros de miembros de A . O sea, si $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, entonces $\bigcup A = \bigcup \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$.

Cuando la familia $\mathfrak{S}$ es arbitraria, el anillo generado no se puede obtener ni caracterizar de una forma general. Pero, esto es posible de hacerse si $\mathfrak{S}$ es un semianillo y es lo que haremos a continuación, caracterizaremos el anillo generado por un semianillo. Esta generalización está motivada por lo hecho arriba cuando se definió conjuntos elementales. Como se comprobó arriba, la familia de conjuntos elementales es la generada por la familia de intervalos de $\mathbb{R}^n$. Veamos que como en el caso de $\mathbb{R}^n$, en donde los conjuntos elementales eran aquellos formados por uniones finitas y disjuntas de intervalos de $\mathbb{R}^n$, los conjuntos, que también llamaremos elementales ya que el contexto evitará ambigüedad, pertenecientes al anillo generado por un semianillo también son aquellos y solo aquellos que se obtienen como unión disjunta de intervalos del semianillo.

Teorema 3:2.8 Si $\mathfrak{S}$ es un semianillo, entonces $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ es la familia de conjuntos que se pueden expresar como unión disjunta de un numero finito de conjuntos del semianillo $\mathfrak{S}$. O dicho de otra forma, si $\mathfrak{S}$ es un semianillo, $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ es la familia de conjuntos que admiten una descomposición finita en intervalos.

Demo: Sea Σ la familia de conjuntos que se expresan como unión disjunta y finita de elementas de $\mathfrak{S}$. Veamos que es un anillo de conjuntos. Sean $A, B \in \Sigma$. Es decir:

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k \text{ y } B = \bigcup_{i=1}^m B_i$$

En donde $\{A_k\}_{1 \leq k \leq n} \subseteq \mathfrak{S}$, $\{B_i\}_{1 \leq i \leq m} \subseteq \mathfrak{S}$ y ambas familias finitas son disjuntas dos a dos.

Formemos la familia: $\{C_{i,j}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ donde cada elementos suyo es:

$$C_{i,j} = A_i \cap B_j.$$

Como los semianillos son cerrados por intersecciones finitas de sus elementos,

$\{C_{i,j}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \subseteq \mathfrak{S}$. Llamemos $\{C_p\}_{1 \leq p \leq l}$ a la familia de los $C_{i,j} \neq \emptyset$. Por el teorema 3:2.2,

Podemos descomponer a cada A_k y B_i de la siguiente forma:

$$A_k = \bigcup_{j=1}^{n_k} D_{j,k} \cup \bigcup_{p=1}^r C_p \text{ y } B_i = \bigcup_{l=1}^{n_l} E_{l,i} \cup \bigcup_{p=1}^q C_p.$$

De aquí sale casi directamente la tesis ya que

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \bigcup_{k=1}^n A_k \Delta \bigcup_{i=1}^m B_i \\ &= \left(\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_k} D_{j,k} \cup \bigcup_{p=1}^r C_p \right) \Delta \left(\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{l=1}^{n_l} E_{l,i} \cup \bigcup_{p=1}^q C_p \right) \\ &= \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_k} D_{j,k} \cup \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{l=1}^{n_l} E_{l,i} \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} A \cap B &= \bigcup_{k=1}^n A_k \cap \bigcup_{i=1}^m B_i \\ &= \left(\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_k} D_{j,k} \cup \bigcup_{p=1}^r C_p \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{l=1}^{n_l} E_{l,i} \cup \bigcup_{p=1}^q C_p \right) \\ &= \bigcup_{p=1}^r C_p \end{aligned}$$

En donde, por construcción, todas las uniones son disjuntas y de elementos de $\mathfrak{S}$.

Luego Σ es, efectivamente un anillo que contiene a $\mathfrak{S}$, luego, $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}) \subseteq \Sigma$.

Pero, $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$, por ser anillo tiene que contener a todos los conjuntos que son uniones finitas de elementos suyos, en particular los que son uniones de elementos de $\mathfrak{S}$, entonces $\Sigma \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$. De donde se desprende la tesis $\square$

Luego en el desarrollo se introdujo el concepto de σ -aditividad de la medida y conjuntos σ -elementales. Esto era necesario para poder dar una medida en conjuntos

más generales, no solo una medida para conjuntos que se descompusieran en forma finita, sino para conjuntos que fueran unión disjunta de una familia numerable de intervalos. En realidad, en el desarrollo definimos conjunto σ -elementales como unión disjunta y numerable de conjuntos elementales y después se demostró que esto era equivalente a definirlos como unión disjunta y numerable de intervalos. Entonces en lo que sigue damos la definición axiomática de la estructura que suplirá el lugar de los conjuntos σ -elementales. Nótese que aun seguimos trabajando con estructuras de conjuntos, todavía no se ha definido el concepto de medida. Éste vendrá una vez que tengamos preparado el terreno.

Definición 3:2.6 Un anillo de conjuntos $\mathfrak{R}$ se denomina σ -anillo si para toda sucesión de conjuntos de él, se tiene que su unión también es parte de $\mathfrak{R}$. Es decir, sean $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, entonces:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}$$

Si el σ -anillo, además tiene unidad, el conjunto se denomina σ -álgebra. A los elementos del σ -anillo se los denomina σ -elementales.

Definición 3:2.7 Un anillo de conjuntos $\mathfrak{R}$ se denomina δ -anillo si para toda sucesión de conjuntos de él, se tiene que su intersección también es parte de $\mathfrak{R}$. Es decir, sean $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, entonces:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}$$

Si el anillo, además tiene unidad, el conjunto se denomina δ -álgebra. Además la unidad del anillo es la unidad de la σ -álgebra. En efecto, Como se cumple que $A \cap E = A$ sii $A \subseteq E$ y que $E \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$, se tiene que toda intersección, diferencia simétrica e intersección está incluida en E . Por lo tanto para todo elemento A de la σ -álgebra, $A \cap E = A$.

Teorema 3:2.9 Toda δ -álgebra es una σ -álgebra .

Demo: Sea E la identidad del anillo, entonces, todo conjunto de éste está incluido en E . Por lo tanto si $\mathfrak{R}$ es δ -álgebra , entonces, para todo $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tenemos que, por ser $\mathfrak{R}$ anillo, $\{E - A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ está incluida en $\mathfrak{R}$.

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{E - A_i\} = E - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{E - [E - A_i]\} = E - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}$$

Pero, otra vez, por res $\mathfrak{R}$ anillo, si $E - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}$, entonces, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}$. Es decir que toda δ -álgebra es una σ -álgebra .

Recíprocamente, si $\mathfrak{R}$ es σ -álgebra , entonces, para todo $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tenemos que, por ser $\mathfrak{R}$ anillo, $\{E - A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ está incluida en $\mathfrak{R}$.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E - A_i = E - \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}$$

Pero, otra vez, por res $\mathfrak{R}$ anillo, si $E - \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}$, entonces, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}$. Es decir que toda σ -álgebra es una δ -álgebra $\square$

Esta ultima propiedad no tiene por qué ser verdadera para anillos sin unidad. En la axiomática que seguimos, definiremos la medida para σ -anillos generadas por un anillo sin unidad, a diferencia de la mayoría de las axiomáticas que lo hacen para σ -álgebras .

Teorema 3:2.10 La intersección de σ -anillos es un σ -anillo . Es decir, si $\{\mathfrak{R}_\sigma^{(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$ es una familia de σ -anillos , entonces:

$$\mathfrak{R}_\sigma = \bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{R}_\sigma^{(\alpha)}$$

Es un σ -anillo.

Demo: Como cada $\mathfrak{R}_\sigma^{(\alpha)}$ es un σ -anillo, cada uno de ellos es un anillo y su intersección lo es, por el teorema 3:5. Además, sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{R}_\sigma^{(\alpha)}$ para todo $\alpha \in A$, entonces:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}_\sigma^{(\alpha)} \text{ para cada } \alpha \in A$$

Ya que cada $\mathfrak{R}_\sigma^{(\alpha)}$ es un σ -anillo. Luego

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{R}_\sigma^{(\alpha)} = \mathfrak{R}_\sigma$$

Y con esto llegamos a que $\mathfrak{R}_\sigma$ es un σ -anillo $\square$

Sigamos con nuestro plan, y veamos que dada una familia no vacía de conjuntos, existe un σ -anillo minimal. Después veremos que si esta familia de conjuntos es un anillo $\mathfrak{R}$, entonces los elementos del σ -anillo son fáciles de caracterizar.

Teorema 3:2.11 Sea $\mathfrak{F}$ una familia de conjuntos, entonces existe un σ -anillo que contiene a $\mathfrak{F}$ y que denotaremos con el símbolo $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{F})$ y llamaremos σ -anillo generado por $\mathfrak{F}$, tal que cualquier otro $\mathfrak{R}_\sigma$ que contiene a $\mathfrak{F}$, contiene a su vez a $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{F})$. Además éste último es único.

Demo: Sea $\mathfrak{B}$ la unión de la familia $\mathfrak{F}$, o sea:

$$\mathfrak{B} = \bigcup \mathfrak{F}$$

Entonces $P(\mathfrak{B})$ es un σ -anillo (La unión arbitraria de elementos de $P(\mathfrak{B})$ es un elemento de $P(\mathfrak{B})$). Sea $\Gamma \neq \emptyset$, por lo aclarado en el paréntesis, el conjunto de todos los σ -anillos de conjuntos que están incluidos en $P(\mathfrak{B})$. Entonces el σ -anillo buscado es:

$$\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcap_{\mathfrak{R}_\sigma \in \Gamma} \mathfrak{R}_\sigma$$

La intersección es anillo, 3:2,6. Sea, ahora $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{R}_\sigma \in \Gamma} \mathfrak{R}_\sigma$, esta sucesión pertenece a cada anillo. Pero cada anillo es σ -anillo. Luego su unión pertenece a cada elemento de la intersección; luego pertenece a la intersección y $\bigcap_{\mathfrak{R}_\sigma \in \Gamma} \mathfrak{R}_\sigma$ es efectivamente σ -anillo.

Como la intersección de conjuntos está incluida en cada uno de los conjuntos que la forman, obtuvimos un σ -anillo minimal. Veamos, ahora, que es única. Sea $\tilde{\mathfrak{R}}_\sigma$ otro σ -anillo minimal, como $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{F})$ mismo es un elemento de Γ , $\tilde{\mathfrak{R}}_\sigma \subseteq \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{F})$. Pero ya se había visto que $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \tilde{\mathfrak{R}}_\sigma$. Luego $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{F})$ es única $\square$

Como antes, si la familia de conjuntos $\mathfrak{F}$ es un anillo de conjuntos, es fácil caracterizar al σ -anillo minimal. Veamos esto:

Teorema 3:2.12 Sea $\mathfrak{R}$ un anillo, entonces $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ es la familia de conjuntos que se obtienen como uniones numerables y disjuntas de elementos de $\mathfrak{R}$.

Demo: Sea Σ el conjunto formado por las uniones numerables y disjuntas de conjuntos de $\mathfrak{R}$. Demostremos que Σ es un σ -anillo.

Es un anillo, la demo es mutatis mutandis la de 3:2.8. Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$. Formemos la familia $\{A_i^*\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ de la siguiente forma:

$$\begin{cases} A_1^* = A_1 \\ A_i^* = A_i - \bigcup_{1 \leq k < i} A_k \text{ sii } 2 \leq i \end{cases}$$

Sea $p \neq j$, supongamos que $p < j$. Luego $A_p \in \bigcup_{i \leq k \leq j} A_i$, o sea que ningún elemento de A_p pertenece a A_j . Es decir $A_p \cap A_j = \emptyset$. Por la construcción $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^* \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, porque cada $A_i^* \subseteq A_i$. Ahora, si $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ tomemos el conjunto de todos los i tales que $x \in A_i$. Como es un subconjunto de $\mathbb{N}$, tiene primer elemento, sea j . Entonces $x \in A_j$, pero a ningún A_l con $l < j$, es decir $x \in A_j^*$, y por lo tanto a $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^*$. Lo que implica a su vez que, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^*$.

Luego, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^* \in \Sigma$. Luego Σ es σ -anillo y contiene a $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ por ser este último σ -anillo minimal que contiene a $\mathfrak{R}$. Pero $\Sigma \subseteq \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ ya que Σ es el conjunto formado por uniones numerables disjuntas de elementos de $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ es un conjunto cerrado por uniones numerables, disjuntas o no. Luego se sigue la tesis $\square$

Corolario (importante): Sea $\mathfrak{R}$ un anillo generado por un semianillo $\mathfrak{S}$, entonces $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ es la familia de conjuntos que se obtienen como uniones numerables y disjuntas de elementos de $\mathfrak{S}$.

Demo: Es una consecuencia directa del teorema anterior y del teorema 3:2.8 teniendo en cuenta que la unión numerable de conjuntos finitos es numerable $\square$

Veamos algunas definiciones necesarias para introducir un teorema de vital importancia al desarrollo de la teoría.

Teorema 3:2.13 Si un algebra de conjuntos es clase monótono, entonces es un σ -algebra y recíprocamente una σ -álgebra es clase monótona.

Demo: Sea $\mathfrak{F}$ un algebra de conjuntos y sea $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos suyos.

Definamos la sucesión $\{A_i^*\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{cases} A_1^* = A_1 \\ A_i^* = \bigcup_{j \leq i} A_j \end{cases}$$

Luego, como el algebra es clase monótona y $\{A_i^*\}$ es creciente y $A_i^* \nearrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^*$ tenemos

que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^* \in \mathfrak{F}$. Pero $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Esto es, $\mathfrak{F}$ es cerrada por uniones numerables, o sea es una σ -álgebra.

Recíprocamente, por el teorema 3:7, la σ -álgebra es, no sólo, cerrada por uniones numerables de conjuntos suyos, sino también que por intersecciones numerables. Luego si $\{A_n\} \subseteq \mathfrak{F}$ y $A_n \nearrow A$, $A \in \mathfrak{F}$ ya que

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

Y $\mathfrak{F}$ es σ -álgebra. Por otra parte, si $\{A_n\} \subseteq \mathfrak{F}$ y $A_n \searrow A$, $A \in \mathfrak{F}$ ya que

$$A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Luego la σ -álgebra es clase monótona $\square$

3:3 Medida sobre semianillos, anillos y σ -anillos de conjuntos.

Definiremos ahora el concepto de medida para los subconjuntos de un conjunto Ω . Primero para un subanillo de conjuntos de Ω , luego para el anillo generado. Esto se hará de forma tal que la medida de un conjunto del semianillo sea la misma que su medida como elemento del anillo generado. Después definiremos una medida en el σ -anillo generado y de forma tal que la medida de un conjunto del anillo sea la misma

que su medida como elemento del σ -anillo. En el siguiente paso se verá el problema de extender esta medida a todos los subconjuntos de Ω . Comencemos entonces con nuestro plan.

Definición 3:3.1 Una función $\mu: \mathfrak{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se denomina medida sobre el semianillo sii

- (i) El dominio de la función es un semianillo.
- (ii) El recorrido de la función es el conjunto de los elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ no negativos.
- (iii) Es aditiva, es decir, sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \mathfrak{S}$ una familia disjunta y finita, tal que

$\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{S}$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Como primera consecuencia de la definición, se sigue que la medida del conjunto vacío es cero. En efecto $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$, luego, $\mu(\emptyset) = 0$ $\square$

Definición 3:3.2 Sea $\tilde{\mu}$ una medida sobre una familia $\mathfrak{F}$ de conjuntos. Si para cada sucesión de conjuntos disjunta dos a dos, $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{F}$ se cumple que:

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_k)$$

Diremos que la medida es σ -aditiva. Si en cambio se cumple:

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_k)$$

La medida se denominará σ -subaditiva.

Los dos siguientes teoremas son necesarios para el desarrollo posterior. Y se verá como entran en juego las propiedades de los semianillos en las demostraciones.

Teorema 3:3.1 Sean los conjuntos de $\mathfrak{S}$ $A_1, A_2, \dots, A_n, A$, tales que para $1 \leq i \leq n$, $A_i \subseteq A$ y la familia $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es disjunta. Entonces:

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Demo: Por el teorema 3:2.2, $A = \bigcup_{i=1}^{n+m} C_i$, en donde $C_i = A_i$ si $1 \leq i \leq n$ y $C_i = B_{i-n}$ si $n+1 \leq i \leq m$ y son todos disjuntos dos a dos. Luego, como la medida es aditiva,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+m} C_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+m} \mu(C_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{i=1}^m \mu(B_i) \end{aligned}$$

Pero, como la medida es siempre no negativa, $0 \leq \sum_{i=1}^m \mu(B_i)$. Y, entonces,

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu(A) \quad \square$$

Corolario: Si $A_i \subseteq A$, entonces $\mu(A_i) \leq \mu(A)$.

Demo: Es el caso en que la familia $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es unitaria $\square$

Teorema 3:3.2 Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una familia arbitraria de $\mathfrak{S}$ y $A \in \mathfrak{S}$. Si

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Entonces, se cumple:

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Demo: Por el teorema 3:2.3, existe una familia disjunta del semianillo $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$, tal que para cada elemento de $\{A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}\}$ donde $A = A_{n+1}$ se cumple:

$$A_k = \bigcup_{j \in N_k} B_j \text{ para } 1 \leq k \leq n+1.$$

Luego, como la familia $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ es disjunta y $A = A_{n+1} = \bigcup_{j \in N_{n+1}} B_j$,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j \in N_{n+1}} B_j\right) = \sum_{j \in N_{n+1}} \mu(B_j)$$

Por otro lado,

$$\sum_{j \in N_{n+1}} \mu(B_j) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \mu(B_j) = \sum_{i=1}^n \mu\left(\bigcup_{j \in N_i} B_j\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

En donde la desigualdad se cumple ya que en la sumatoria doble aparecen los mismos términos positivos que en la primera sumatoria más otros, y además algunos de ellos aparecen repetidos. En efecto, en la segunda sumatoria un $\mu(B_j)$ aparece t veces si B_j pertenece a t conjuntos A_i . En definitiva, se obtiene la tesis $\square$

Si en particular, en el teorema anterior, $n=1$, volvemos a obtener el corolario del teorema 3:3.1.

Ahora nos proponemos seguir adelante y obtener una medida para un anillo. Para esto la siguiente definición.

Definición 3:3.3 Sea $S_1 \subseteq S_2$ dos familias de conjuntos en las que están definidas las medidas μ_1 y μ_2 respectivamente. Decimos que μ_2 es una extensión de μ_1 si para todo $A \in S_1$, se cumple:

$$\mu_1(A) = \mu_2(A)$$

Si μ_2 una extensión de μ_1 notamos $\mu_2 = \text{ex}(\mu_1)$.

Teorema 3:3.3 Sea μ una medida sobre el semianillo $\mathfrak{S}$. Existe una única extensión de ésta al anillo generado $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$. La llamaremos $\mu_1 : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Demo: Definamos la medida μ_1 de la siguiente forma. Sea $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, en donde $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \mathfrak{S}$ es una descomposición de A . Entonces su medida es:

$$\mu_1(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Tenemos que probar, antes que nada, que es efectivamente una medida. Cada elemento de la imagen es suma de elementos no negativos, luego es no negativo. El dominio es un semianillo por ser un anillo. Sea $\{B_1, B_2, \dots, B_m\} \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ una familia disjunta. Entonces cada uno de los elementos es unión de una familia finita y disjunta de elementos de $\mathfrak{S}$, sea $\{B_{i,1}, B_{i,2}, \dots, B_{i,m_i}\} \subseteq \mathfrak{S}$ la descomposición de B_i para $1 \leq i \leq m$.

Entonces $B_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} B_{i,j}$ y

$$\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} B_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \mu(B_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \mu_1(B_i)$$

En la segunda igualdad se aplica la definición de μ_1 . Luego μ_1 es aditiva.

Además, la medida de un conjunto del anillo es independiente de la descomposición del conjunto elemental en conjuntos del semianillo. Es obvio que esta propiedad es

fundamental, de lo contrario la definición no tendría sentido. Probémoslo, sean dos descomposiciones de $A \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$, a saber:

$$A = \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{j=1}^m C_j$$

Como los semianillos son cerrados por intersecciones finitas, tenemos que $B_i \cap C_j \in \mathfrak{S}$ para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$. Todas estas intersecciones son disjuntas dos a dos. Además, es $B_i = \bigcup_{j=1}^m (B_i \cap C_j)$ y $C_j = \bigcup_{i=1}^n (B_i \cap C_j)$, por lo que

$$\mu(B_i) = \sum_{j=1}^m \mu(B_i \cap C_j) \text{ y } \mu(C_j) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i \cap C_j)$$

Luego:

$$\mu_1(A) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^m \mu(C_j).$$

Solo nos queda ver que esta extensión es única. Sea $\tilde{\mu}_1$ otra extensión y sea $A = \bigcup_{i=1}^n B_i$ un conjunto arbitrario de $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ y su descomposición en elementos de $\mathfrak{S}$. Entonces:

$$\tilde{\mu}_1(A) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_1(B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \sum_{i=1}^n \mu_1(B_i) = \mu_1(A)$$

Luego la extensión es única. Además queda probado que la medida de todo conjunto de un anillo es finita por se suma finita de reales $\square$

Nota 3:3.1 En la demostración de 3:3.1 y 3:3.2 solo se usó como hipótesis que la medida fuera aditiva, luego, como μ_1 es aditiva, 3:3.1 y 3:3.2 se cumplen, también, para esta extensión de μ sobre el anillo generado. Tenemos:

Corolario del teorema 3:3.1 Sean los conjuntos de $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ $A_1, A_2, \dots, A_n, A$, tales que para $1 \leq i \leq n$, $A_i \subseteq A$ y la familia $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es disjunta. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n \mu_1(A_i) \leq \mu_1(A)$$

En particular, si $A_1 \subseteq A$, $\mu_1(A_1) \leq \mu_1(A)$.

Corolario del teorema 3:3.2 Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una familia arbitraria de $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ y $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$. Si

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Entonces, se cumple:

$$\mu_1(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu_1(A_i)$$

En el teorema que sigue ampliamos el alcance de los conceptos vistos en el segundo capítulo del trabajo. Allí partimos de una medida sobre el semianillo en cuestión (el de los intervalos de $\mathbb{R}^n$) que era aditiva y luego probamos (por propiedades topológicas del espacio métrico usual de $\mathbb{R}^n$) que la medida de los conjuntos del anillo (el de los conjuntos elementales de $\mathbb{R}^n$) es σ -aditiva. Veremos que si la medida es σ -aditiva en el semianillo $\mathfrak{S}$, entonces lo es en el anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$. En efecto se probará que la medida en el anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ es σ -aditiva si lo es en el semianillo que lo genera, $\mathfrak{S}$. Esto se

podría haber hecho en nuestro modelo, aunque preferimos dejar este enfoque para el final, ampliando así la cantidad de conceptos abarcados por la teoría.

Teorema 3:3.4 Si la medida μ definida en un semianillo $\mathfrak{S}$ es σ -aditiva, la medida $\mu_1 = \text{ex}(\mu)$ sobre $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ también es σ -aditiva.

Demo: Sea $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ y $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ una familia disjunta dos a dos. Y sea, además,

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k.$$

Entonces queremos probar que

$$\mu_1(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(B_k)$$

Sabemos que, tanto A como B_k con $k \in \mathbb{N}$, se pueden descomponer en elementos de $\mathfrak{S}$;

$$A = \bigcup_{j=1}^n Z_j \text{ y } B_k = \bigcup_{i=1}^{m_k} S_{k,i}.$$

Formemos la familia $\{C_{k,i,j} = S_{k,i} \cap Z_j / C_{k,i,j} \neq \emptyset\}$. Como $\mathfrak{S}$ es cerrado por intersecciones finitas, cada $C_{k,i,j} \in \mathfrak{S}$ y, además, la familia $\{C_{k,i,j}\} \subseteq \mathfrak{S}$ es disjunta. En efecto, si $(k,i,j) \neq (k',i',j')$ se tiene que $C_{k,i,j} \cap C_{k',i',j'} = \emptyset$ ya que si:

- $k \neq k'$, porque $C_{k,i,j} \subseteq S_k \wedge C_{k',i',j'} \subseteq S_{k'}$ y $S_k \cap S_{k'} = \emptyset$, porque a su vez, $S_k \subseteq B_k \wedge S_{k'} \subseteq B_{k'}$ y $B_k \cap B_{k'} = \emptyset$ por hipótesis.

- $i \neq i'$, porque, para cada $k \in \mathbb{N}$, $S_{k,i} \cap S_{k,i'} = \emptyset$ ya que cada $\{S_{k,i}\}_{1 \leq i \leq m_k}$ es disjunta por ser una descomposición de B_k .
- $j \neq j'$, porque $C_{k,i,j} \subseteq Z_j \wedge C_{k',i',j'} \subseteq Z_{j'}$ y $\{Z_j\}_{1 \leq j \leq n}$ es disjunta por ser una descomposición de A

Por otro lado, como $Z_j \subseteq A$, $B_k = \bigcup_{i=1}^{m_k} S_{k,i}$ y $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{m_k} S_{k,i}$ se tiene,

$$Z_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{m_k} (S_{k,i} \cap Z_j) \quad (1).$$

Además,

$$B_k = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{m_k} (S_{k,i} \cap Z_j) \quad \text{y} \quad \mu_1(B_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \mu(S_{k,i} \cap Z_j)$$

Ahora sí, podemos ir a la demostración con la ayuda de lo probado arriba. Por (1),
Obtenemos que:

$$\mu(Z_j) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{m_k} (S_{k,i} \cap Z_j)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m_k} (S_{k,i} \cap Z_j)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(S_{k,i} \cap Z_j)$$

Porque, por hipótesis, la medida μ de $\mathfrak{S}$ es σ -aditiva.

$$\mu_1(A) = \sum_{j=1}^n \mu(Z_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(S_{k,i} \cap Z_j) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \mu(S_{k,i} \cap Z_j) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(B_k)$$

Que es la tesis $\square$

Teorema 3:3.5 Si μ_1 es σ -aditiva en $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$, $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ entonces:

- (i) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq A$ y además $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ entonces $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k) \leq \mu_1(A)$
- (ii) $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ entonces $\mu_1(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k)$

Demo: (i) Como la medida es aditiva, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$\sum_{k=1}^n \mu_1(A_k) \leq \mu_1(A) \quad (1)$$

Por el primer corolario del teorema 3:3.1. Pero recordando un hecho de análisis elemental que dice que si una sucesión $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es tal que cada $a_j \leq l$, entonces se cumple que:

$$\lim_n a_n \leq l,$$

y que por definición la suma infinita es el límite de la sucesión de las sumas parciales, o sea:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k = \lim_n \sum_{k=1}^n a_k$$

Obtenemos la tesis de (1). En efecto:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k) = \lim_n \sum_{k=1}^n \mu_1(A_k) \leq \mu_1(A)$$

(ii) Formemos la siguiente sucesión disjunta dos a dos:

$$B_k = \begin{cases} A_1 \cap A & \text{sii } k = 1 \\ (A \cap A_k) - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i & \text{cuando } k > 1 \end{cases}$$

Por la misma prueba dada en el teorema 3:2.12 se llega a que esta familia es disjunta dos a dos y que su unión es el conjunto A . Como supusimos que la medida μ_1 es σ -aditiva, obtenemos:

$$\mu_1(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(B_k) \quad (2)$$

Como, además, para todo k , $B_k \subseteq A_k$ por el corolario del teorema 3:3.1 tenemos

$\mu_1(B_k) \leq \mu_1(A_k)$ para todo k y entonces:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(B_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k)$$

Y por lo que dice la ecuación (2) llegamos a la tesis:

$$\mu_1(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k) \quad \square$$

Nota 3:3.2 La propiedad (i) del teorema anterior es válida para toda medida aditiva, no hace falta pedir más. De aquí se puede obtener una generalización interesante.

Corolario: Si la medida sobre el semianillo $\mathfrak{S}$ es aditiva, entonces, en $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$,

$\mu_1(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k)$ cuando se cumpla que $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ donde los A_k son elementos del anillo generado $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

Demo: Directamente del anterior $\square$

Extendamos la medida al σ -anillo generada por $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ y veamos que es única. Esta demostración es similar a la de la extensión del semianillo $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ y es más que idéntica a la dada en la definición de conjunto σ -elemental de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3:3.6 Si $\mathfrak{R}$ es un anillo con medida σ -aditiva, existe una única extensión de esta a $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$.

Demo: Sea $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ donde los A_k son los conjuntos elementales de $\mathfrak{R}$, disjuntos dos a dos que lo forman, definimos a su medida como sigue:

$$\mu_\sigma(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k)$$

Las dos primeras condiciones para ser una medida las cumple. Veamos que es aditiva.

Sean $A, B \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ disjuntos, entonces tenemos las siguientes descomposiciones en elementos de $\mathfrak{R}$: $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ y $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ con $A_k, B_k \in \mathfrak{R}$ para todo k . Luego

$$\mu_\sigma(A \cup B) = \mu_\sigma\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(B_k) = \mu_\sigma(A_k) + \mu_\sigma(B_k)$$

En la segunda igualdad se aplicó la definición de μ_σ , la demo se completa por inducción como ya se hizo varias veces. Si la serie diverge, diremos que $\mu_\sigma(A) = +\infty$.

Si $\mu_\sigma(A)$ es finita, esta definición es correcta, en efecto, sea $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ otra sucesión de conjuntos de $\mathfrak{R}$ disjuntos dos a dos cuya unión es A . Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$A_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_k \cap B_j) \quad \wedge \quad (A_k \cap B_j) \cap (A_k \cap B_i) = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

y

$$B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_j \cap B_k) \quad \wedge \quad (A_j \cap B_k) \cap (A_i \cap B_k) = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$

Entonces¹⁹:

¹⁹ Para más detalles de la validez de la siguiente igualdad referirse a Tom Apostol, *Análisis matemático* 2ª ed., Reverté, Barcelona, 1996. En el capítulo 8 hay un desarrollo excelente del tema a pesar de no ser exhaustivo.

$$\begin{aligned}
\mu_\sigma(A) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k \cap B_j) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k \cap B_j) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_1(B_j)
\end{aligned}$$

La segunda y cuarta igualdades se cumplen ya que la medida definida sobre el anillo es σ -aditiva²⁰.

Si para una descomposición la serie diverge, diverge para todas, porque de lo contrario, si converge para una, por lo visto arriba en esta demo, lo haría para todas, absurdo $\square$

Se tiene también el siguiente hecho digno de mención, si el conjunto $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ es un

conjunto σ -elemental de $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$, por el corolario del teorema 3:2.8, cada $B_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} C_{k,i}$,

en donde cada $C_{k,i} \in \mathfrak{S}$ y entonces:

$$\mu_1(B_k) = \sum_{i=1}^{n_k} \mu(C_{k,i})$$

Luego, como $\{C_{k,i} / k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq i \leq n_k\}$ es un conjunto numerable, lo podemos reordenar y escribirlo como $\{C_p / p \in \mathbb{N}\}$ y²¹

$$\mu_\sigma(A) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n_j} \mu(C_{j,i}) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \mu(C_p)$$

Por ende, la medida de un conjunto σ -elemental es la suma de la serie de las medidas de los conjuntos de $\mathfrak{S}$ que lo componen (la serie es absolutamente convergente si es

²⁰ Es de gran importancia notar que la extensión de la medida del anillo a una en el σ -anillo es posible porque la medida del anillo es σ -aditiva. Si la medida del anillo es, solamente, aditiva, la extensión puede no ser posible, o por lo menos no se puede llevar a cabo como lo hacemos aquí.

²¹ Ver nota 7

convergente ya que las medidas son no negativas). La demostración de la unicidad se desprende directamente de lo dicho, la demostración es una copia de la dada antes para demostrar la unicidad de μ_1 $\square$

Teorema 3:3.7²² (i) Si la medida en $\mathfrak{S}$ es σ -aditiva y $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ es el anillo generado, la medida $\mu_\sigma = \text{ex}(\mu_1)$ sobre el σ -anillo generado por el anillo, $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$, que bien se lo puede definir como generado por el semianillo, $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$, es σ -aditiva.

(ii) Si $A, B \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ y $A \subseteq B$, entonces $\mu_\sigma(A) \leq \mu_\sigma(B)$.

Demo: (i) Sea $A \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ tal que $\mu_\sigma(A) < +\infty$ y $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ una familia disjunta cuya unión es A (que desde ahora llamaremos una descomposición numerable de A), entonces queremos ver que:

$$\mu_\sigma(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_\sigma(B_k).$$

Sean las descomposiciones numerables en elementos del anillo:

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \text{ y } B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{k,j}$$

Formemos la familia $\{C_{i,k,j} = A_i \cap B_{k,j} / i, k, j \in \mathbb{N} \wedge C_{i,k,j} \neq \emptyset\} \subseteq \mathfrak{R}$. Esta familia es disjunta dos a dos. Se tiene:

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_{i,k,j}, \quad B_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,k,j} \text{ y } B_{k,j} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,k,j}$$

Por definición de μ_σ , tenemos:

$$\mu_\sigma(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_1(C_{i,k,j}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_1(C_{i,k,j}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_1(B_{k,j}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_\sigma(B_k)$$

²² Comparece con el teorema 3:3.4

Lo primero se justifica por la definición de μ_σ . Lo segundo, porque las sumatorias son absolutamente convergentes (ver Tom Apostol óp. cit.). Y de vuelta definición de μ_σ . Fuimos más escuetos en la demo ya que es muy similar a varias hechas a lo largo del trabajo, sin embargo no está incompleta, sólo dicha en pocas palabras.

(ii) Sea las descomposiciones de A y B siguientes:

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \text{ y } B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$$

Formemos la familia $\{C_{i,j} = A_i \cap B_j / i, j \in \mathbb{N} \wedge C_{i,j} \neq \emptyset\} \subseteq \mathfrak{R}$. Esta familia es disjunta dos a dos. Se tiene,

$$\mu_\sigma(B) = \sum_{C_{i,j} \in B} \mu_1(C_{i,j}) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_1(C_{i,j}) = \mu_\sigma(A) \quad \square$$

Como en un σ -anillo, las uniones numerables de elementos suyos son elementos suyos, tenemos que la σ -aditividad se cumple para cualquier familia del σ -anillo

Definición 3:3.4 Espacio de medida para conjuntos σ -elementales. Un σ -anillo de subconjuntos de un conjunto Ω y una medida σ -aditiva sobre él forman una estructura de conjuntos para los cuales está definida una medida σ -aditiva. A esta estructura la notamos como $(\Omega, \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S}), \mu_\sigma)$ y, también, nos referiremos a ella como espacio de medida para conjuntos σ -elementales.

Nota 3:3.3 En la parte dos de la exposición se vio que $\mathfrak{R}_\sigma$ era la mayor estructura para la que se podía definir una medida que fuera aplicable a todo subconjunto suyo, σ -aditiva e invariante bajo la translación. Ya que estas propiedades no se podían extender a la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. De aquí surge la importancia de los σ -anillos. Pero para seguir se tuvo que abandonar la pretensión de una medida aplicable a todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Luego el plan que se siguió fue el de conservar

ambas propiedades aunque la medida no se aplicara a todo subconjunto y además describir la clase de subconjuntos a la que esta medida era aplicable. Surgió así el concepto de conjunto medible. Veamos como agregamos esto a nuestra axiomática, ya que pretendemos seguir el mismo camino que en el modelo. Sin embargo, se verá, que no es necesario que la familia de conjuntos medibles esté estrictamente incluida en el conjunto de partida, se dan casos en que son iguales, o sea en donde todos los conjuntos son medibles.

3:4 Medida exterior sobre un espacio de medida para conjuntos

σ -elementales.

Este es el último paso antes de llegar a la definición de la medida de Lebesgue. Veremos las propiedades de la medida exterior (que dicho sea de paso *no* es medida en general) y el por qué no se la adopta por medida.

Adelantando, hasta el momento, las medidas que obtuvimos para clases más generales de conjuntos como extensiones de medidas sobre clases menos generales que cumplieran la propiedad de ser σ -aditivas, en particular aditivas. En efecto, esto es una de las características fundamentales de una medida que pretenda extender el primitivo concepto griego de medida; si una figura es la suma de dos figuras que no se solapan, entonces su área es la suma de las áreas. Es mas en nuestro plan, nos propusimos algo mas general que implicaba lo anterior, si una figura está formada por una cantidad infinita de figuras que no se solapan (infinita numerable, la única que casi entendían lo griegos) su área debe ser la suma de las áreas. Este concepto de σ -aditividad no fue alcanzado, sino hasta época reciente; los procesos de exhaustión griegos no pretendían obtener una figura descompuesta en infinitas figuras, solo ir aproximando por medio de cantidades finitas, aunque cada vez mayores.

En la segunda mitad de este trabajo ya vimos que, en general, una medida exterior no tiene por qué ser aditiva, la que allí definimos, de hecho, no lo era. Por eso en nuestro enfoque axiomático debemos llegar a un concepto de medida que sea en todo caso σ -aditiva (y en particular aditiva).

Empecemos, entonces, a dar las definiciones y propiedades pertinentes.

Definición 3:4.1 Sea $(\Omega, \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S}), \mu_\sigma)$ espacio de medida para conjuntos σ -elementales en donde²³ $\Omega \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ y $\Omega \notin \mathfrak{S}$ (podría pertenecer, pero no necesariamente). Definimos medida exterior, $m_e : P(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, de la siguiente forma. La medida exterior de un elemento A de $P(\Omega)$ es:

$$m_e(A) = \inf H \text{ donde } H = \{\mu_\sigma(U) / A \subseteq U \wedge U \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})\}$$

Si el ínfimo de este conjunto es un real (pertenecer a $\overline{\mathbb{R}} - \{+\infty\}$), se dice que A tiene medida exterior finita. Es evidente que $m_e(\emptyset) = 0$, ya que $\emptyset \in H$ por ser elemental (y obviamente σ -elemental) y $\mu_\sigma(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Nótese que como suponemos que $\Omega \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ $H \neq \emptyset$ ($\Omega \in H$) y por lo tanto el ínfimo está definido **para todo** conjunto de Ω .

La primera propiedad de la medida exterior surge, simplemente, porque la medida exterior es el ínfimo de un conjunto.

Teorema 3:4.1 Para todo real $\varepsilon > 0$ existe un $U_\varepsilon \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ tal que:

$$\mu_\sigma(U_\varepsilon) \leq m_e(A) + \varepsilon$$

Demo: Es una propiedad del ínfimo $\square$

Teorema 3:4.2 Si $A \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$, entonces $m_e(A) = \mu_\sigma(A)$.

²³ Si no se pide como necesario que $\Omega \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$, podría darse el caso que el H definido abajo sea vacío. Si no se pide esta condición, se podría reformular la teoría cambiando la definición de H por la siguiente: $H = \{\mu_\sigma(U) / A \subseteq U \wedge U \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})\} \cup \{+\infty\}$. Se prueba que, en este caso, llegamos a obtener los mismos resultados y que, lo más importante, todo conjunto sigue teniendo medida exterior.

Demo: Como $A \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$, entonces $\mu_\sigma(A) \in H$ y, por lo tanto, no es menor al ínfimo; $m_e(A) \leq \mu_\sigma(A)$. Sea $m_e(A) < \mu_\sigma(A)$, entonces debe haber un $\mu_\sigma(A') \in H$ tal que $m_e(A) < \mu_\sigma(A') < \mu_\sigma(A)$ y $A \subseteq A'$ (sino $\mu_\sigma(A)$ sería al ínfimo). Pero esto es absurdo por el teorema 3:3.7 (ii). Luego la tesis $\square$

Teorema 3:4.3 Si $A, B \in P(\Omega)$ y $A \subseteq B$ entonces $m_e(A) \leq m_e(B)$.

Demo: Sean H_1 el conjunto de todos los conjuntos σ -elementales que contienen a A y H_2 el análogo para B . Si $U \in H_2$, entonces $B \subseteq U$ y como A está incluido en B , $A \subseteq U$ y esto implica que $U \in H_1$. Entonces $H_2 \subseteq H_1$. Y por propiedad del ínfimo de un conjunto $\inf(H_1) \leq \inf(H_2)$, es decir, por definición, $m_e(A) \leq m_e(B)$ $\square$

Teorema 3:4.4 La medida exterior es σ -subaditiva. Es decir, si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq P(\Omega)$ es una familia disjunta dos a dos:

$$m_e\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(A_k).$$

Demo: Sea, para cada $k \in \mathbb{N}$, $U_{\varepsilon,k} \in H_k$ y

$$\mu_\sigma(U_{\varepsilon,k}) \leq m_e(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k},$$

Sumando todas las igualdades (Consideramos el caso en que la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(A_k)$ converge, el otro es trivialmente cierto ya que como es una serie de términos positivos, si no converge es igual a $+\infty$),

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_\sigma(U_{\varepsilon,k}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\{ m_e(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right\} = \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(A_k) + \varepsilon$$

Como lo anterior vale para todo $\varepsilon > 0$, tenemos:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_{\sigma}(U_{\varepsilon,k}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(A_k) \quad (1)$$

Por otro lado, como en particular, μ_{σ} es σ -subaditiva, se cumple

$$\mu_{\sigma}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{\varepsilon,k}\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_{\sigma}(U_{\varepsilon,k}) \quad (2)$$

Como $A_k \subseteq U_{\varepsilon,k}$, tenemos $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{\varepsilon,k}$. Pero $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{\varepsilon,k} \in \mathfrak{R}_{\sigma}(\mathfrak{S})$ y contiene a $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$,

es decir que pertenece al H de la definición de medida exterior de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Entonces

$$m_e\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \mu_{\sigma}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{\varepsilon,k}\right) \quad (3)$$

De (3), (2) y (1), obtenemos:

$$m_e\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(A_k)$$

Que es la tesis $\square$

Corolario: La medida exterior es subaditiva

Demo: Es el teorema cuando $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq P(\Omega)$ es eventualmente el vacío o sea existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k_0 \leq k$, entonces $A_k = \emptyset$ $\square$

Teorema 3:4.5 Si $A_1, A_2 \in P(\Omega)$ son de medida exterior finita, entonces se cumple la desigualdad:

$$|m_e(A_1) - m_e(A_2)| \leq m_e(A_1 \Delta A_2)$$

Demo: Como $A_1 \subseteq A_2 \cup (A_1 \Delta A_2)$ y $A_2 \subseteq A_1 \cup (A_1 \Delta A_2)$, por teorema 3:20 se tiene respectivamente:

$$m_e(A_1) \leq m_e(A_2 \cup (A_1 \Delta A_2)) \text{ y } m_e(A_2) \leq m_e(A_1 \cup (A_1 \Delta A_2))$$

Y por el corolario del teorema 3:21,

$$m_e(A_1) \leq m_e(A_2) + m_e(A_1 \Delta A_2) \text{ y } m_e(A_2) \leq m_e(A_1) + m_e(A_1 \Delta A_2)$$

Luego, despejando llegamos a:

$$m_e(A_1) - m_e(A_2) \leq m_e(A_1 \Delta A_2) \text{ y } m_e(A_1) - m_e(A_2) \geq -m_e(A_1 \Delta A_2)$$

Y de esto a la tesis $\square$

Teorema 3:4.6 Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq P(\Omega)$ una sucesión de conjuntos eventualmente finita tal que $\lim_n m_e(A_n \Delta A) = 0$, entonces $m_e(A) = \lim_n m_e(A_n)$. Y la medida exterior de A es finita.

Demo: Como $\lim_n (A_n \Delta A) = 0$, entonces por el teorema anterior, $\lim_n |m_e(A_n) - m_e(A)| = 0$. O sea, $\lim_n [m_e(A_n) - m_e(A)] = \lim_n m_e(A_n) - m_e(A) = 0$, despejando $\lim_n m_e(A_n) = m_e(A)$. Como, además, si existe n_0 tal que si $n_0 \leq n$, $m_e(A_n) \leq M$; de la relación: $|m_e(A_n) - m_e(A)| \leq m_e(A_n \Delta A)$, obtenemos la siguiente: $m_e(A) - M \leq m_e(A) - m_e(A_n) \leq m_e(A_n \Delta A)$. Despejando:

$$m_e(A) \leq m_e(A_n \Delta A) + M$$

Pero, como $\lim_n m_e(A_n \Delta A) = 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$, hay un real N para el cual $m_e(A_n \Delta A) \leq N$. En definitiva, se cumple:

$$m_e(A) \leq N + M$$

Luego $m_e(A) \in \mathbb{R}$. El teorema está demostrado $\square$

Finalmente llegamos al tema central el de la definición de medida. Aquí el plan presenta una inflexión. Primero fuimos definiendo medidas para conjuntos más generales, medida sobre semianillos, medida sobre anillos que fueran extensión de la primera, y medida sobre σ -anillos que fuera extensión de la anterior. Esto era siempre posible en $\overline{\mathbb{R}}$. Luego definimos una función para todo conjunto de $P(\mathbb{R}^n)$ que no alcanzó a ser medida, sólo era σ -subaditiva. Pero en todos los casos anteriores la función de conjunto extensión de la anterior se aplicaba a todo conjunto de la familia de conjuntos introducida.

Para la última familia $P(\mathbb{R}^n)$, no pudimos llegar a encontrar una medida de todos sus conjunto, esto lo hizo manifiesto el ejemplo del conjunto de Vitali para $\mathbb{R}^n$. De aquí el cambio en el proceso, ya no definimos una medida sobre la clase de todos los subconjuntos de un conjunto dado. Lo que hicimos fue definir la clase de conjuntos para los cuales la función de conjuntos hallada era una medida σ -aditiva, los llamados conjuntos medibles.

De aquí salió la idea que dio forma a nuestra axiomatización. Veremos entonces cuales son, para un conjunto arbitrario la clase $\mathfrak{M}(\mathfrak{R}_\sigma)$ de conjuntos medibles generados por el σ -anillo.

En el caso general que estamos viendo en nuestra axiomática no hay por qué suponer que $\mathfrak{M}(\mathfrak{R}_\sigma) \neq P(\Omega)$. Si se da el caso de la igualdad, tendríamos definida una medida σ -aditiva aplicable a todos los subconjuntos de un conjunto dado y la medida exterior pasaría a ser la medida sobre todo subconjunto de Ω . Que esto no ocurra en $\mathbb{R}^n$ no es consecuencia de la axiomática, sino de propiedades de la medida menos general usada y del axioma de elección, conceptos que no entran en nuestra teoría.

Recalcando lo dicho, nuestra axiomática no descarta la existencia de un Ω tal que $\mathfrak{M}(\mathfrak{R}_\sigma) = P(\Omega)$. Si llamamos m a la medida de la axiomática, entonces decimos que $(\Omega, \mathfrak{M}, m)$ es un espacio de medida de Lebesgue. Si, además se da el caso que $\mathfrak{M} = P(\Omega)$, decimos que $(\Omega, P(\Omega), m)$ es un espacio de medida de Lebesgue con conjuntos siempre medibles²⁴.

3:5 Medida de Lebesgue sobre un espacio de medida para conjuntos σ -elementales.

Definición 3:5.1 Sea $(\Omega, \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S}), \mu_\sigma)$ un espacio de medida para conjuntos σ -elementales, un conjunto $E \in P(\Omega)$ se dice medible si para todo real $\varepsilon > 0$ existe $U_\varepsilon \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ tal que:

$$E \subseteq U_\varepsilon \text{ y } m_e(U_\varepsilon - E) < \varepsilon.$$

Y si un conjunto es medible, su medida de Lebesgue (o simplemente medida como escribiremos de ahora en más) se define como la medida exterior del conjunto. Notamos la medida del conjunto E como $m(E)$ ²⁵. A la familia de todos los conjuntos medibles la denotamos como $\mathfrak{M}(\mathfrak{R}_\sigma)$.

Ahora, dado un semianillo, este define unívocamente un anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$. A su vez, $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ define unívocamente a $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$, por lo que en definitiva, $\mathfrak{S}$ define unívocamente al σ -anillo, luego podemos decir que este último está generado por el semianillo y anotar $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$. Pero el σ -anillo define unívocamente la familia de conjuntos medibles, por lo tanto, el semianillo define unívocamente a la familia de

²⁴ La nomenclatura es nuestra.

²⁵ En algunas bibliografías se usan mE o $|E|$.

conjuntos medibles. Luego llamamos a $\mathfrak{M}(\mathfrak{R}_\sigma)$ familia de conjuntos medibles generada por $\mathfrak{S}$ y notamos $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$.

Teorema 3:5.1 Todo conjunto σ -elemental R es medible y su medida es igual a $\mu_\sigma(R)$.

Demo: En efecto, para todo real $\varepsilon > 0$, $R \subseteq U_\varepsilon = R$ y

$$m_e(U_\varepsilon - R) = m_e(R - R) = m_e(\emptyset) = 0 < \varepsilon$$

Y como se vio en el teorema 3:4.4, $m_e(R) = m(R) = \mu_\sigma(R)$ $\square$

Teorema 3:5.2 Todo conjunto E de medida exterior nula es medible y su medida es cero.

Demo: Si $m_e(E) = 0$, entonces por definición de medida exterior, $\inf H = 0$ donde $H = \{\mu_\sigma(U) / E \subseteq U \wedge U \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})\}$. Es decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $U \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ tal que $E \subseteq U$ y $\mu_\sigma(U) = m_e(U) < \varepsilon$, propiedad del ínfimo de un conjunto. Pero $U - E \subseteq U$, entonces $m_e(E - U) \leq m_e(U) < \varepsilon$ y entonces E es medible y su medida exterior es su medida $\square$

Corolario (importante): Si un conjunto arbitrario E es medible y $m(E) = 0$, entonces para todo conjunto $A \subseteq E$, $m_e(A) \leq m_e(E) = m(E) = 0$ y por el teorema anterior A es medible, o sea $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ $\square$

Definición 3:5.2: Decimos que la medida $\tilde{\mu}$ sobre una familia $\mathfrak{F}$ es completa si se cumple que para todo $A \in \mathfrak{F}$ tal que $\tilde{\mu}(A) = 0$, $E \in \mathfrak{F}$ si $E \subseteq A$. El corolario anterior afirma, entonces, que la medida de Lebesgue es completa.

Teorema 3:5.3 La intersección de dos conjuntos medibles es medible. En consecuencia la intersección finita de conjuntos medibles es medible.

Demo: Sean $A, B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$, entonces Para todos $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existen $U_{\varepsilon_1}, U_{\varepsilon_2} \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ tales que:

$$A \subseteq U_{\varepsilon_1} \wedge m_e(U_{\varepsilon_1} - A) < \varepsilon_1 \text{ y } B \subseteq U_{\varepsilon_2} \wedge m_e(U_{\varepsilon_2} - B) < \varepsilon_2.$$

Sea un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomemos $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tales que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$,

$$(U_{\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_2}) - (A \cap B) \subseteq (U_{\varepsilon_1} - A) \cup (U_{\varepsilon_2} - B)$$

Entonces:

$$m_e\{(U_{\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_2}) - (A \cap B)\} \leq m_e(U_{\varepsilon_1} - A) + m_e(U_{\varepsilon_2} - B) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$$

Luego $A \cap B$ es medible $\square$

Teorema 3:5.4 La unión numerable de conjuntos medibles es medible. Es decir si $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ entonces: $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$.

Demo: Como cada $E_i \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$, tenemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $U_{\varepsilon, i} \in \mathfrak{H}_i$ tal que:

$$E_i \subseteq U_{\varepsilon, i} \text{ y } m_e(U_{\varepsilon, i} - E_i) < 2^{-i} \varepsilon$$

Entonces,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{\varepsilon_i} \text{ y } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{\varepsilon_i} - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{U_{\varepsilon_i} - E_i\}$$

Por lo tanto,

$$m_e \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{\varepsilon_i} - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m_e (U_{\varepsilon_i} - E_i) < \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \varepsilon = \varepsilon$$

Luego $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ $\square$

Definición 3:5.3 Un conjunto es finitamente medible, si es medible y su medida pertenece a $\mathbb{R}$.

En lo que sigue vamos a demostrar que $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ es un σ -anillo y aprovechar todo lo demostrado para este tipo de familia. Para ello antes tenemos que dar unas demostraciones previas. Sin embargo, en la parte tres del trabajo se demostraron y se partió de hipótesis de las estructuras de conjuntos. Como en nuestra teoría estas hipótesis se cumplen las demostraciones son, mutatis mutandis, idénticas a las ya dadas (de hecho si uno las escribe no hay siquiera que cambiar nada en absoluto). Por eso se pueden dar por demostradas las siguientes propiedades.

Teorema 3:5.5 (el análogo al Teorema 2:3.2) Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (i) El conjunto E pertenece a $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ y es de medida finita.
- (ii) Para todo real $\varepsilon > 0$, existe $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ tal que $m_e(A \Delta E) < \varepsilon$

Demo: Si E es de medida finita, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ con

$S_k \in \mathfrak{G}$ tal que:

$$E \subseteq U \text{ y } m_e(U - E) < 2^{-1} \varepsilon .$$

Como $U = E \cup (U - E)$ se obtienen que $m_e(U)$ es finita. Como $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ y

$$m_e(U) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m_e(S_k)$$

es convergente. Se tiene que para cierto $N \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{k=N}^{\infty} m_e(S_k) < 2^{-1} \varepsilon$$

Entonces definimos:

$$A = \bigcup_{k=1}^{N-1} S_k \text{ y } B = \bigcup_{k=N}^{\infty} S_k$$

A es elemental y $U = A \cup B$. Se tiene: $A - E \subseteq U - E$ por lo que $m_e(A - E) \leq m_e(U - E) < 2^{-1} \varepsilon$. Y $E - A \subseteq U - A = B$ por lo que $m_e(E - A) \leq m_e(U - A) \leq m_e(B) < 2^{-1} \varepsilon$. Como

$$A \Delta E = (A - E) \cup (E - A)$$

tenemos:

$$m_e(A \Delta E) \leq m_e(A - E) + m_e(E - A) < \varepsilon .$$

Supongamos, ahora, que se cumple (ii), o sea existe un conjunto elemental A tal que $m_e(A \Delta E) < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, en particular se cumple para $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon'}{2}$, Entonces, por definición de medida exterior, existe un conjunto σ -elemental $V \in \mathfrak{R}_{\sigma}(\mathfrak{S})$ tal que:

$$A\Delta E \subseteq V \text{ y } m_e(V) < \frac{\varepsilon'}{2}$$

El conjunto σ -elemental U cumple, $E \subseteq A \cup (A\Delta E) = A \cup V = U$ y es de medida finita, entonces, como, $m_e(E) \leq m_e(U)$ se tiene que la medida exterior de E es finita. Por otro lado:

$$U - E \subseteq (U - A) \cup (A - E) \subseteq V \cup V = V$$

Pero entonces:

$$m_e(U - E) \leq m_e(V) < \varepsilon$$

Como se quería probar²⁶ $\square$

En el teorema vimos que ser finitamente medible es equivalente a la afirmación:

(ii) Para todo real $\varepsilon > 0$, existe un conjunto elemental $A \in \mathfrak{S}$ tal que $m_e(A\Delta E) < \varepsilon$

Esto es, dada una sucesión de reales positivos $\varepsilon_k \rightarrow 0$, tenemos para cada $k \in \mathbb{N}$ un conjunto elemental $A_k \in \mathfrak{S}$ tal que $m_e(A_k\Delta E) < \varepsilon_k$. Dicho de otro modo, lo anterior es equivalente a:

(ii)' Existe una sucesión de conjuntos elementales $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{S}$ tal que $m_e(A_k\Delta E) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

²⁶ Esta demostración es una copia de la dada para el teorema análogo del modelo y se podría haber omitido sin pérdida de rigurosidad. De ahora en adelante este tipo de demostraciones, las que son muy similares a las del modelo, se omiten y se indica al lector cual es su similar.

Si decimos que una sucesión de conjuntos, de medida exterior finita, (A_k) converge a E si $m_e(A_k \Delta E) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ y anotamos $A_k \rightarrow E$ cuando $k \rightarrow \infty$, tenemos la siguiente expresión de la proposición anterior.

(ii)' Existe una sucesión de conjuntos elementales $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{S}$ tal que $A_k \rightarrow E$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Resumiendo, una expresión alternativa de 3:26 es la siguiente:

Un conjunto E es finitamente medible si, y sólo si, existe una sucesión de conjuntos elementales $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{S}$, tal que $A_k \rightarrow E$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Teniendo en cuenta, además, el teorema 3:4.6, tenemos demostrado:

Teorema 3:5.6 Un conjunto $E \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ y es de medida finita si, y sólo si, existe una sucesión de conjuntos $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{S}$, tal que $A_k \rightarrow E$ cuando $k \rightarrow \infty$. Además

$$m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$$

Teorema 3:5.7 Si $A_k \rightarrow E$ y $B_k \rightarrow F$, donde $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}, (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$ son sucesiones de conjuntos elementales, se cumple:

$$A_k - B_k \rightarrow E - F$$

Demo: Ver demo del Teorema 3:3.5 $\square$

Teorema 3:5.8 Si E y F son conjuntos finitamente medibles, entonces $E - F$ lo es también. Y de esto se deduce que si sólo son medibles, la diferencia también lo es.

Demo: Ver 2:3.5 $\square$

Teorema 3:5.9 Si A, B son conjuntos finitamente medibles, $A \cap B$ y $A \cup B$ lo son también, se tiene:

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

Y si $A \cap B = \emptyset$, entonces:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Demo: Ver la demostración de 3:3.6

Por inducción se puede probar que si $A_1, \dots, A_n$, son conjuntos disjuntos dos a dos y finitamente medibles, entonces:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n m(A_i) \quad \square$$

Con lo anterior podemos probar un resultado importante, ya que muestra que $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ tiene una estructura bien definida.

Teorema 3:5.10 Si E es la unión de una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos (E_k) , entonces:

$$m(E) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k),$$

también se cumple que $m(E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k)$ si los conjuntos no son necesariamente disjuntos dos a dos.

Demo: Ver la demostración del teorema 2:3.7 $\square$

Teorema 3:5.11 La familia $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ es un σ -anillo.

Demo: Sean $A, B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$, tenemos que

$$A \cap B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \text{ y } A \Delta B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$$

Lo primero por el teorema 3:5.1 y lo segundo porque, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, el teorema 3:5.2 y 3:5.5 $\square$

Con esto podemos hacer algo que hasta ahora se le puede haber pasado de alto al lector, y es ver que la medida de Lebesgue es en efecto una medida, de hecho es una medida σ -aditiva. Recordando la definición de medida ya dada, demos otra un tanto más general que se aplica muy bien a la familia de conjuntos medibles.

Definición 3:5.4 Una función $\mu: \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se denomina medida sobre el σ -anillo sii

- (i) El dominio de la función es un σ -anillo.
- (ii) El recorrido de la función es el conjunto de los elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ no negativos.
- (iii) Es aditiva, es decir, sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ una familia disjunta y finita, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Si además, para todo familia $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum \mu(A_k)$$

La medida se dice σ -aditiva

Teorema 3:5.12 La medida m de Lebesgue es una medida σ -aditiva sobre $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$

Demo: (i) Se probó en el teorema 3:5.11 que $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ es efectivamente un σ -anillo. (ii) Sale directamente de la definición de m . (iii) Se vio en el teorema 3:5.4. Y que es sigma aditiva se vio en el teorema 3:5.10 $\square$

Extendamos un poco mas nuestra teoría, ya que lo que sigue se cumple en muchos casos y amplia en gran medida la cantidad de conjuntos medibles porque, en este caso, podremos afirmar que si un conjunto es medible, lo es también su complemento. Y de hecho es una propiedad que cumple nuestro modelo de partida. Recordemos que el σ -anillo $\mathfrak{R}_\sigma$ es una σ -álgebra si posee un conjunto unidad, es decir un $E \in \mathfrak{R}_\sigma$ tal que para todo $A \in \mathfrak{R}$, $A \cap E = A$. Por esto, todo elemento de $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ esta incluido en E y podemos hablar del complemento de un conjunto relativo a E , o sea $C^E(A) = E - A$ y se cumplirán, entre otros propiedades, las de De Morgan relativas a E .

Teorema 3:5.13 Dada una sucesión creciente de conjuntos de medida finita $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$, o sea, una sucesión tal que si $i \leq j$, $E_i \subseteq E_j$, entonces:

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k)$$

Y si además $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ es σ -álgebra y $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, con $m(E_k) < \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$m\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k)$$

Demo: Ver la demostración del teorema 2:3.9 $\square$

Teorema 3:5.14 Si $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ es una σ -álgebra, entonces, si $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$, entonces $C^E(A) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$.

Demo: Directamente del teorema 3:5.5 $\square$

Además se vio, teorema 3:2.5, que toda σ -álgebra es una δ -álgebra, luego $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ lo es y tenemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3:5.15 La intersección de una familia numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible.

3:6 Un gran paréntesis en la exposición

En realidad cabe aclarar que en el desarrollo del modelo no se probó que la medida de intervalos era σ -aditiva, sólo probamos la σ -aditividad recién a partir de los conjuntos elementales. Este es un enfoque común y por eso se dejó así. Sin embargo, allí también es posible probar que la medida de intervalos es σ -aditiva. Vamos a agregar a continuación una demostración de esto para que quede más marcada la similitud entre el modelo y la teoría axiomática.

Teorema 3:6.1 La familia de intervalos de $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de semianillo.

Demo: Por definición $\emptyset$ es un intervalo. La intersección de dos intervalos es un intervalo, teorema 1:1.1. Sea $I_1 \subseteq I$ intervalos. Entonces por teorema 1:1.3 parte 1,

$$I - I_1 = \bigcup_{i=2}^n I_k$$

Y, entonces,

$$I = I_1 \cup (I - I_1) = I_1 \cup \bigcup_{i=2}^n I_k$$

y se cumple que $I_k \cap I_j = \emptyset$ para $1 \leq i, k \leq n$. Luego, en efecto, el conjunto de intervalos de $\mathbb{R}^n$ es semianillo y se le aplican todas las propiedades de estos $\square$

Teorema 3:6.2 Sea I un intervalo de $\mathbb{R}^n$ y sean, también, $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ intervalos de $\mathbb{R}^n$ tales que $I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$, entonces

$$\mu(I) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k).$$

Y si los intervalos son disjuntos dos a dos, entonces:

$$\mu(I) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k)$$

Demo: Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, Para cada k existe un intervalo abierto U_k tal que $I_k \subseteq U_k$ y $\mu(U_k) < \mu(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$ (1) por el teorema 2:1.5. Por el mismo teorema existe un intervalo cerrado, $E \subseteq I$ tal que $\mu(I) - \varepsilon < \mu(E)$. Como E es compacto y $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto suyo, existe un subcubrimiento finito, y tenemos:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}.$$

Existe, por el teorema 3:2:3 una familia de intervalos $B = \{B_1, \dots, B_m\}$ disjunta dos a dos,

tal que: $E = \bigcup_{k \in M_E} B_{m_k}$ y $U_{k_i} = \bigcup_{k \in M(U_{k_i})} B_{m_k}$ y por ende $\bigcup_{i=1}^n U_{k_i} = \bigcup_{i=1}^m B_i$. Luego:

$$\mu(I) - \varepsilon < \mu(E) = \mu\left(\bigcup_{k \in M_E} B_{m_k}\right) = \sum_{k \in M_E} \mu(B_{m_k}) \leq \sum_{i=1}^m \mu(B_{m_i}) = \sum_{k=1}^n \sum_{k \in M(U_{k_i})} \mu(B_{k_i})$$

La segunda igualdad se cumple por el teorema 2:1.1. La primera desigualdad se cumple porque los términos de la segunda sumatoria son los mismos que los de la primera y además otros, el resto de los m sumandos. Y las dos últimas sumatorias son

iguales porque lo que se hizo fue reordenar los términos de una suma finita (propiedad conmutativa de la suma de reales). Pero:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{k \in M(U_{k_i})} \mu(B_{k_i}) = \sum_{k=1}^n \mu(U_{k_i}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(U_{k_i})$$

por el teorema 2:1.1 otra vez. De las dos últimas ecuaciones y (1)

$$\mu(I) - \varepsilon < \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \mu(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right\} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k) + \varepsilon$$

Y como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\mu(I) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k).$$

Si además, la familia $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es disjunta dos a dos, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia finita $\{I_k\}_{1 \leq k \leq n}$ es disjunta dos a dos. Además cada una está contenida en I . Por el teorema 3:2.2 podemos hallar $\{J_k\}_{n < k \leq m_n}$ tal que

$$I = \bigcup_{k=1}^n I_k \cup \bigcup_{k > n}^{m_n} J_k$$

Y los intervalos son disjuntos dos a dos. Por lo tanto

$$\mu(I) = \sum_{k=1}^n \mu(I_k) + \sum_{k > n}^{m_n} \mu(J_k).$$

Como las medidas son positivas, lo es la última sumatoria, luego, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(I) \geq \sum_{k=1}^n \mu(I_k)$$

Entonces, por propiedad de límite de sucesiones:

$$\mu(I) \geq \lim_n \sum_{k=1}^n \mu(I_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k).$$

Que junto a lo anterior nos da la tesis $\square$

En la demostración de que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k) \leq \mu(I) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k\right)$ solo se usaron las propiedades

que los intervalos reales tienen por formar un semianillo. Luego se desprende que toda medida en un semianillo es σ -subaditiva, definición 3:3.3. Y Por los teoremas 3:3.5 y 3:3.7 las medidas en anillos y σ -anillos son también σ -subaditiva siempre.

Probado este teorema, es evidente que el teorema que demostraba la σ -aditividad en el modelo es redundante. Sin embargo, demostrar la σ -aditividad de los conjuntos elementales de $\mathbb{R}^n$ es menos trabajoso que hacerlo para intervalos, ya que hay que cuidarse en las demos de no medir uniones de intervalos, que no son medibles a esa altura del desarrollo del modelo y esto es una dificultad que obstaculiza bastante la comprensión de los teoremas. Además en ausencia de la axiomática, habría que probar que los intervalos reales cumplen con los teoremas 3:2.1 y 3:2.2, sin suponer que ellos forman semianillos ya que este concepto no se uso en el modelo. Esto último es un problema con cierta dificultad, aunque no mayor a la demandada en la demostración de los teoremas mencionados y de hecho las demostraciones son similares. Pero, según se presentó el modelo, no hizo falta introducir los similares al teorema 3:2.1 y 3:2.2 haciendo la exposición del modelo más corta.

Fernando José García

4: Los semianillos con unidad y la medida interior

4:1 Semianillos con identidad

Ahora amplíemos la axiomática con el fin de mostrar cómo se puede ampliar nuestro grupo de axiomas para introducir el concepto de medida interior²⁷. A lo largo del trabajo y en la bibliografía se habla de anillos con unidad, sin embargo este concepto puede definirse antes. Es decir dotar de una unidad al semianillo, al cual será la unidad del anillo y σ -anillo generados, que pasarán a ser álgebra y σ -álgebra respectivamente. Igual, lo anterior no es necesario, es posible que un semianillo sin un elemento unidad genere un anillo con ella.

Demos, entonces, la definición. Que es una variación de la definición 3:2.1:

Definición 4:1.1 Una familia $\mathfrak{S}$ se denomina semianillo de conjuntos sii:

- (i) $\emptyset \in \mathfrak{S}$
- (ii) $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}$ entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{S}$
- (iii) $A_1, A \in \mathfrak{S}$, $A_1 \subseteq A$, entonces existen $\{A_2, A_3, \dots, A_n\}$ tales que $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ y $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ $1 \leq i, j \leq n$
- (iv) Y si existe un elemento E tal que para todo $A \in \mathfrak{S}$ se cumple que $E \cap A = A$ se lo denomina unidad y al semianillo, semianillo con unidad.

Debido a esta definición, tenemos:

Teorema 4:1.1 Un anillo, y σ -anillo generados por un semianillo con unidades son álgebra y σ -álgebra respectivamente.

²⁷ En nuestra teoría definiremos medida interior para el caso en que el semianillo tenga unidad. Es posible, sin embargo, definir medida interior cuando el semianillo no tiene unidad y hay teorías en que esto se lleva a cabo.

Demo: En efecto, como para todo elemento $A \in \mathfrak{S}$, $A \cap E = A$, entonces todos los A están incluidos en E y por lo tanto lo está cada intersección finita o arbitraria de ellos.

Entonces, si $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$, $B = \bigcup_{i=1}^n A_i$ con $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq \mathfrak{S}$, se tiene que todo elemento de $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ está incluido en E , que por definición de anillo generado pertenece a $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$, y entonces $B \cap E = B$. Luego el anillo es álgebra. Lo mismo para la σ -álgebra $\square$

Vimos, para el final de la tercera parte del trabajo, cuáles de las propiedades del σ -anillo de cumplían si éste era σ -álgebra. Éstas se seguirán cumpliendo en este caso. Pero también se cumplirán otras, porque a diferencia de antes, si el elemento unidad de la σ -álgebra es heredado del semianillo (o anillo si se introduce ahí), éste tiene medida finita, cosa que de otra forma no es necesariamente cierta; en el caso en que el elemento unitario de la σ -álgebra no lo es del semianillo (o anillo según fuere). En efecto, veamos este hecho, que es bastante evidente.

Teorema 4:1.2 Si el elemento unitario de la σ -álgebra se hereda del semianillo (o anillo), entonces éste es de medida finita y son de medida finita todos los elementos de la σ -álgebra.

Demo: Por la definición de medida en un semianillo, todos sus elementos tienen medida finita ya que la medida (definición 3:3.1) y el hecho que las sumas son finitas es una función $\mu: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ y por lo tanto la imagen de cada conjunto (su medida) es un real en particular la de la unidad E . Pero entonces como la medida de cada elemento del anillo generado es suma finita de reales, cada uno tiene medida finita. Por definición de extensión de medida a la σ -álgebra, (teorema 3:3.4). Como la medida de $\mu_\sigma(E) = \mu_1(E) = \mu(E)$ éste tiene medida finita en la σ -álgebra y como todos los elementos la σ -álgebra están incluidos en él, por el teorema 3:18 (ii), todos los elementos la σ -álgebra tienen medida finita. Es decir la serie $\mu_\sigma(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_k)$ con $A_k \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ es siempre absolutamente convergente. Y como $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ es cerrado por

uniones numerables, las series $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_\sigma(A_k)$ con $A_k \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ son siempre la medida de un conjunto de $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$, luego son siempre absolutamente convergente $\square$

En estas condiciones, podemos ahora definir la medida interior ya que lo anterior implica que la medida exterior de un conjunto es siempre finita. En efecto, probemos esto que es fácil. Pero ahora la definición 3:4.1 sería así:

Definición 4:1.2 Sea $(\Omega, \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S}), \mu_\sigma)$ espacio de medida para conjuntos σ -elementales en donde $E \in \mathfrak{S}$ es unidad (ahora $\mathfrak{R}_\sigma$ es, también, σ -álgebra) y por tanto todo $U \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ está incluido en E . Definimos medida exterior, $m_e : P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, de la siguiente forma. La medida exterior de un elemento A de $P(\Omega)$ es:

$$m_e(A) = \inf H \text{ donde } H = \{\mu_\sigma(U) / A \subseteq U \wedge U \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})\}$$

Debemos probar que, en efecto, $m_e : P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Pero esto es obvio porque el ínfimo de un conjunto de reales no negativos es un real; de hecho no menor a cero. Y es finito, ya que $H \neq \{+\infty\}$ único conjunto con ínfimo $+\infty$.

4:2 Medida Interior y definiciones equivalentes de medibilidad derivadas de ella

Ahora sí, la definición de medida interior.

Definición 4:2.1 Sea $(\Omega, \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S}), \mu_\sigma)$ espacio de medida para conjuntos

σ -elementales en donde $E \in \mathfrak{S}$ es unidad, definimos medida interior de un conjunto al real:

$$m_i(A) = m(E) - m_e(E - A).$$

Se desprende la siguiente propiedad muy fácil de demostrar.

Teorema 4:2.1 Se tiene que para todo A ,

$$m_i(A) \leq m_e(A)$$

Demo: Sabemos que $m_i(A) = m(E) - m_e(E - A)$ y como

$$m(E) = m(\{E - A\} \cup A) = m_e(\{E - A\} \cup A) \leq m_e(E - A) + m_e(A)$$

Obtenemos:

$$m_i(A) \leq m_e(E - A) + m_e(A) - m_e(E - A) = m_e(A)$$

Que es la tesis $\square$

Si A es medible (y por ende finitamente medible), como E es finitamente medible, $E - A$ es finitamente medible y además,

$$m_i(A) = m(E) - m(E - A) \quad (1)$$

Por otro lado, como $A \subseteq E$, $m(E \cup A) = m(E)$ y como:

$$m(E) = m(E \cup A) = m(\{E - A\} \cup A) = m(E - A) + m(A),$$

obtenemos

$$m_i(A) = m(E - A) + m(A) - m(E - A) = m(A) = m_e(A) \quad (2)$$

Pero como $m(E) - m(E - A) = m_i(A) = m_e(A)$, (2) equivale a

$$m(E) = m_e(A) + m_e(E - A)$$

Si A es medible.

Teorema 4:2.2 Si $m_i(A) = m_e(A)$ o lo equivalente $m(E) = m_e(A) + m_e(E - A)$, entonces A es medible y $m(A) = m_i(A) = m_e(A)$.

Demo: Vamos a demostrar que si $m(E) \geq m_e(A) + m_e(E - A)$ ²⁸, entonces, $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$.

Sean $U_\sigma, V_\sigma \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ tales que $A \subseteq U_\sigma$ y $E - A \subseteq V_\sigma$. Ya que los conjuntos son σ -elementales, son medibles y podemos escribir a E como la siguiente unión disjunta:

$$E = (U_\sigma - V_\sigma) \cup (V_\sigma - U_\sigma) \cup (U_\sigma \cap V_\sigma)$$

y por la aditividad de la medida,

$$m(E) = m(U_\sigma - V_\sigma) + m(V_\sigma - U_\sigma) + m(U_\sigma \cap V_\sigma) \quad (1)$$

Probemos que la hipótesis implica que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un par de conjuntos U_σ, V_σ con las condiciones de arriba que cumple que $m(U_\sigma \cap V_\sigma) < \varepsilon$. Por el absurdo, supongamos que para todo par de conjuntos U_σ, V_σ se tiene que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $m(U_\sigma \cap V_\sigma) > \varepsilon > 0$. Luego de (1) se deduce que

$$m(E) < m(U_\sigma - V_\sigma) + m(V_\sigma - U_\sigma) \quad (2).$$

²⁸ Esta desigualdad es la que hace que A sea medible, no hace falta pedir tanto como la igualdad. Sin embargo, siempre es cierto que $m(E) \leq m_e(A) + m_e(E - A)$ por la subaditividad de la medida exterior. Por eso exigir la igualdad en la hipótesis no resta generalidad al teorema, porque en realidad lo único que se pide como condición es $m(E) \geq m_e(A) + m_e(E - A)$, no se pide la igualdad, esta viene sola, por decirlo de alguna forma.

Pero los conjuntos U_σ, V_σ cumplen que: $A \subseteq U_\sigma$ y $E - A \subseteq V_\sigma$, por lo tanto:

$$V_\sigma - U_\sigma \subseteq E - U_\sigma \subseteq E - A \text{ y } U_\sigma - V_\sigma \subseteq E - V_\sigma \subseteq A$$

Y por teorema 3:4.3,

$$m(V_\sigma - U_\sigma) \leq m_e(E - A) \text{ y } m(U_\sigma - V_\sigma) \leq m_e(A).$$

Reemplazando esto en (2) obtenemos

$$m(E) < m_e(E - A) + m_e(A)$$

Que es absurdo ya que la hipótesis supone lo contrario. Entonces hemos probado que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un par de conjuntos $U_\sigma, V_\sigma \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ tales que $A \subseteq U_\sigma$ y $E - A \subseteq V_\sigma$ y que cumple que $m(U_\sigma \cap V_\sigma) < \varepsilon$.

Por otro lado se cumple:

$$(U_\sigma - A) \cup (V_\sigma - (E - A)) = (U_\sigma - A) \cup (V_\sigma \cap A) = \{(U_\sigma - A) \cup V_\sigma\} \cap (U_\sigma - A)$$

Y como $U_\sigma - A \subseteq E - A \subseteq V_\sigma$ implica que $(U_\sigma - A) \cup V_\sigma = V_\sigma$ y que $A \subseteq U_\sigma$, implica que $(U_\sigma - A) \cup A = U_\sigma$. Obtenemos:

$$(U_\sigma - A) \cup (V_\sigma - (E - A)) = U_\sigma \cap V_\sigma$$

Ahora sí demostramos que $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe U_σ , el de arriba (y un V_σ también), tal que $A \subseteq U_\sigma$, $U_\sigma \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{S})$ y

$$m_e(U_\sigma - A) \leq m_e\{(U_\sigma - A) \cup (V_\sigma - (E - A))\} = m_e(U_\sigma \cap V_\sigma) < \varepsilon$$

O sea que, en efecto, A es medible y su media es (recuérdese la definición de medida) igual a la medida exterior que es igual a la interior $\square$

Habíamos probado ya, a continuación del teorema 4:2.1 que si A es medible entonces, $m_i(A) = m_e(A)$ y el teorema 4:2.2 es el recíproco, si $m_i(A) = m_e(A)$, entonces A es medible. Por lo tanto, llegamos con nuestra exposición a dos definiciones equivalentes de conjunto medible para los casos en que el semianillo $\mathfrak{S}$ tiene unidad. Las enunciamos:

Teorema 4:2.5 Si el semianillo $\mathfrak{S}$ tiene unidad E entonces son equivalentes:

- (i) $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$
- (ii) $m_i(A) = m_e(A)$
- (iii) $m(E) = m_e(A) + m_e(E - A)$

Y queda probado que la teoría de la medida de Lebesgue para semianillos con unidad es un caso particular de nuestra teoría más general²⁹.

Para finalizar con el trabajo, hacemos unas aclaraciones con respecto a la estructura de los conjuntos medibles. Todo lo expuesto en la segunda sección con respecto a la estructura de los conjuntos medibles es consecuencia de la topología de $\mathbb{R}^n$ y son ajenas a la axiomatización dada. Esto da un marco de referencia importante que nos permite ver bien claro qué parte de nuestro modelo es fruto de la teoría axiomática y que parte es resultado de otras propiedades que pueda o no tener el conjunto de partida de la mencionada axiomática.

Damos, así, por terminada la exposición de nuestra teoría $\blacksquare$

²⁹ Esta es una media mentira lógica, ya que también es cierto que nuestra teoría es un caso particular de la teoría de la medida para semianillos con unidad (también mas general). Aclarando, las teorías son equivalentes.

Fernando José García

5: Nuestra conclusión:

Como se prometió al principio del trabajo, pudimos desarrollar toda la teoría de la medida de Lebesgue sin la necesidad de la introducción de la medida interior de conjuntos, por lo que podemos afirmar que el objetivo de la misma fue cumplido.

Sin embargo, no se agota acá el contenido de la exposición. Se obtuvo una importante cantidad de resultados importantes que echarán luz sobre la naturaleza de la teoría axiomática dada (desde ahora TMLE³⁰). También se obtuvieron importantes alcances en la comprensión del modelo (Desde ahora TMLR³¹).

En cuanto a la invariancia de la medida bajo la translación, se vio que no es necesaria a toda medida³². En efecto en la exposición axiomática de TMLE no aparece este concepto, ni como axioma, ni como conclusión de ellos, es más, abajo doy un pequeño modelo en el cual esto no se cumple.

Por otro lado, vimos que la imposibilidad de extender la medida a todo conjunto de $\mathbb{R}^n$ en TMLR, una vez aceptada la invariancia de la translación, es debida a que se consideró como marco de referencia para la teoría a la teoría de conjuntos ZF-C que fue posible la demostración de la existencia de un conjunto no medible, el de Vitali, único del que se dispone hasta el momento en TMLR. Este es un tema de cuidado en toda teoría axiomática, ya que el axioma de elección es una herramienta con una seria dificultad lógica inherente a él, la comprobación de la existencia de conjuntos para los cuales ni es posible hallar una construcción. Es decir el mismo axioma postula la existencia de conjuntos no susceptibles de descripción dentro de la misma teoría ZF-C de la cual forma parte como axioma. O sea que la imposibilidad de extender la medida a todo conjunto en TMLR se basa en la existencia de un conjunto imposible de describir. Debido a las controversias que el axioma de elección provoca, vemos como positiva su eliminación de nuestra teoría de la medida. Pero, por cada solución surge un problema, no se ha probado efectivamente que eliminando el axioma de elección todo conjunto de $\mathbb{R}^n$ es medible, lo único que podemos decir es que, hasta ahora, no se encontró ningún conjunto no medible aparte del de Vitali. Surge así un nuevo problema que queda

³⁰ Teoría de la medida de Lebesgue para semianillos sin unidad, o sea en la que solo entra la medida Exterior de Lebesgue.

³¹ Teoría de la medida de Lebesgue para $\mathbb{R}^n$ con la topología usual.

³² Consultar Medida de Lebesgue-Stieltjes.

abierto; el de encontrar un ejemplo de conjunto no medible en TMLR partiendo solamente de ZF o demostrar que tal no existe.

En cuanto a la medida interior, se llegó a ver que este es sólo una reformulación de un concepto ya existente; la medida exterior del complemento relativo de un conjunto a en un espacio de medida de medida finita.

Además se llegó a descubrir el germen de TMLE, probando que, además de la teoría ZF, son dos los conceptos que construyen la teoría. Uno la definición de una teoría aditiva sobre un semianillo de conjuntos y la σ -aditividad sobre esta misma familia.

Otro concepto que queda como complementario es el de las estructuras topológicas de los conjuntos medibles. Los conjuntos medibles no tienen por qué tener una caracterización topológica, las que surgieron en TMLR se debían a la forma de definir la medida para los intervalos de $\mathbb{R}^n$ basada en la topología usual del conjunto.

Entonces en una teoría de la medida no tienen por qué cumplirse que:

- 1: La medida es invariante bajo la translación (es más pueden darse teorías de la medida de Lebesgue sobre conjuntos en los que, ni siquiera, se pueda definir una translación).
- 2: Los espacios de medida no tienen por qué tener conjuntos no medibles.
- 3: Los conjuntos medibles de un espacio de medida no tienen por qué tener ninguna caracterización topológica.

Por ejemplo, sea $\Omega = \mathbb{N}$ y partamos del semianillo de los conjuntos finitos. Sobre él definimos la siguiente medida, si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, entonces $\mu(A) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}}$. En este

ejemplo muy elemental, todo conjunto de $P(\mathbb{N})$ es medible, de hecho, $m(\mathbb{N}) = 1$. La medida no es invariante bajo la translación, sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(A+n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{(a_i+n)}} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}} = \frac{1}{2^n} \mu(A). \text{ Y el único conjunto de medida nula es el } \emptyset, \text{ por lo que es trivialmente completo. Como, además todo conjunto es medible, no hay ninguna característica topológica que los diferencie.}$$

Y, para finalizar, repitamos, recalquemos y enfatizamos; lo que se puede hacer con una axiomática con medida interior, se puede hacer con una que no la tenga.

Esta es nuestra conclusión $\square\square\square$

6: Bibliografía de Referencia

Teoría de la medida

A. N. Kolmogórov, S. V. Fomín, *Elementos de la Teoría de funciones y del análisis funcional*, Editorial Mir- Moscú, 1975

A. N. Kolmogórov, S. V. Fomín, *Measure, Lebesgue Integrals and Hilbert Space*, Editorial Mir- Moscow, 1961

N. Fava, F. Zo, *Medida e integral de Lebesgue*, Editorial Red Olímpica, 1996

H. Wilcox, D. Myers, *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*, Robert Krieger Publishina

Ober B. Ash, *Real Analysis and Probability*, Academic Press, 1972

Halmos Paul R., *Measure Theory* D. Van Nostrand Company, 1950

Topología

Ayala, Domínguez, Quintero, *Elementos de topología elemental*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1998

James R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2000

Seymour Lipschutz, *General Topology, Schaum's outline series* McGraw-Hill, 1965

Análisis Real

T. M. Apostol, *Análisis matemático*, Reverté, 1996

J. Rey Pastor, P. Pi calleja, C. A. Trejo, *Análisis matemático Vol. 3*, Editorial Kapelusz, 1965

Teoría de Conjuntos

Monk J. Donald, *Introduction to Set Theory*, Robert E. Krieger Publishing Company, Inc, 1980

Patrick Suppes, *Axiomatic Set Theory*, D. Van Nostrand Company, inc

Jean E. Rubin, *Set Theory for the Mathematician*, Holden-Day