

## Índice

1. <b>Introducción</b> .....	1
2. <b>Fundamentación</b> .....	2
3. Proposición N° 4 del Libro de los Lemmas de Arquímedes.....	3
3. 1. Definición del Árbelos.....	4
3. 2. Proposiciones básicas del Árbelos.....	5
(i). El cuadrilátero $TEDC$ es un rectángulo.....	6
(ii). $TD$ es tangente a los círculos de diámetro $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ .....	6
a) $TD \perp MT$ .....	7
b) $TD \perp DF$ .....	8
(iii). El área del árbelos es igual al área del círculo de diámetro $\overline{CE}$ .....	9
4. Los círculos mellizos de Arquímedes: el inicio de una familia numerosa.....	11
4. 1. Proposición 5 del Libro de los Lemmas de Arquímedes.....	11
(a) $C_1(D, x)$ : Círculo de centro $D$ y radio $x$ .....	12
(b) $C_2(E, y)$ : Círculo de centro $E$ y radio $y$ .....	15
5. El círculo trillizo de Leon Bankoff.....	17
5. 1. Circunferencia inscrita en el árbelos, tangente a los tres semicírculos...17	
1. Propiedad de las áreas de dos triángulos de igual altura.....	18
2. Teorema sobre la relación entre lados y ángulos de un triángulo.....	19
3. Propiedad de la altura de un triángulo en función de su perímetro.....	20
4. Propiedad del área de un triángulo en función de su semiperímetro.....	22
5. 2. Áreas de los triángulos de igual altura, del árbelos, cuando $r_1 \neq r_2$ .....	23
(a) Triángulo $DOE$ , cuando $r_1 \neq r_2$ .....	23
(b) Triángulo $DEF$ , cuando $r_1 \neq r_2$ .....	24
(i) Perímetro del triángulo $DEF$ .....	24
(ii) Semiperímetro del triángulo $DEF$ .....	24
(iii) Fórmula de Herón.....	25
5. 3 Triángulo $DEF$ , cuando $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$ .....	27
(a) Valor de $\rho$ , cuando $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$ .....	28
(i) Perímetro del triángulo $DEF$ .....	28
(ii) Semiperímetro del triángulo $DEF$ .....	28
(iii) Fórmula de Herón.....	29

5. 4.	Radio $z$ del círculo trillizo de Bankoff.....	30
	(i) Perímetro del triángulo $DEF$ .....	30
	(ii) Semiperímetro del triángulo $DEF$ .....	30
	(iii) Fórmula de Herón.....	30
6.	Un círculo especial: Particularidades del círculo trillizo.....	32
	1. Cevianas particulares del círculo trillizo de Bankoff.....	32
	(a) Cevianas que concurren en el punto notable de Gergonne.....	33
	(b) Cevianas que concurren en el punto notable Incentro.....	35
7.	La familia de círculos de Arquímedes aumenta espectacularmente.....	40
	1. Inversiones.....	40
	2. Inversión de un punto.....	41
	3. Inversión de un conjunto de puntos.....	42
	1. Inversión de una recta.....	42
	2. Inversión de una recta que no pasa por el centro de inversión.....	44
	3. Inversión de una circunferencia.....	48
	4. Circunferencias ortogonales.....	51
	1. Ortogonalidad e inversión.....	51
8.	Círculo cuatrillizo de Leon Bankoff.....	54
	1. Demostración geométrica del círculo cuatrillizo, utilizando inversión.....	54
	2. Demostración analítica del círculo cuatrillizo, utilizando inversión.....	58
9.	Los círculos mellizos de Arquímedes, son infinitos, utilizando inversión.....	59
10.	Bibliografía.....	69

# Árbelos o Cuchilla del zapatero

Nilda Esther Altamirano de Baldi

## 1. Introducción

El área comprendida entre tres semicircunferencias mutuamente tangentes, dos a dos, con sus centros alineados sobre una misma recta, fue conocida entre los antiguos griegos con el nombre de “Árbelos”, cuya traducción significa “cuchilla de zapatero”<sup>1</sup>. Esta denominación fue concedida, por su similitud con la herramienta que usaban los profesionales y artesanos de la época para cortar el cuero.

Demostraciones sorprendentes para la geometría, con el uso sólo de regla y compás, fueron desarrolladas por Arquímedes<sup>2</sup> quien estudió y demostró las primeras propiedades de esta figura geométrica llamada, varios siglos después por la geometría moderna, “triángulo curvilíneo”.

Las fascinantes propiedades geométricas del Árbelos van desde conceptos básicos cuyas demostraciones fueron realizadas con propiedades de la geometría Euclidiana<sup>3</sup> tales como: el uso sistemático de rectas auxiliares; triángulos rectángulos, semejanza de triángulos; el Teorema de Pitágoras, la media geométrica, hasta el estudio de proposiciones mucho más abstracta y sofisticadas, por medio del uso de Teoremas que involucran la inversión geométrica y la trigonometría

Arquímedes vivió desde el año 287 antes de Cristo, hasta que fue asesinado<sup>4</sup> en el año 221 antes de Cristo. Es considerado uno de los tres matemáticos más grandes de todos los tiempos, junto con Newton y Gauss.

Esta configuración de círculos tangentes, fue tratada también por Pappus, Descartes, Fermat, Newton, Steiner, y luego, en el siglo XX, por Leon Bankoff.

Este último, dentista de profesión y matemático de vocación, publicó en la revista canadiense “Eureka” (llamada actualmente “Cruce Mathematicorum”), propiedades relacionadas con las de los círculos mellizos de Arquímedes, inscriptos en forma particular, en el área del árbelos, iniciando una numerosísima familia de círculos de radios iguales.

En 1974, Bankoff realiza una publicación en la revista “Mathematics Magazine” con el título “¿Son realmente mellizos los círculos de Arquímedes?, título éste, bien justificado, porque fue él quien encontró un tercer círculo relacionado con el Árbelos, de igual radio que los dos primeros descubierto por Arquímedes.

-1-

---

<sup>1</sup>Traducción de la palabra griega ἀρβηλος.

<sup>2</sup> Investigaciones recientes, sostienen que en las obras de Arquímedes, que se pudieron conservar, no se menciona, el área de la figura formada entre la configuración de estos círculos tangentes, con el nombre de “Árbelos”. La fuente de la afirmación de que Arquímedes denominara con este término a esta figura geométrica, es el Libro de los Lemmas, recopilado por fuentes anónimas.

<sup>3</sup> Los elementos de Euclides, libros III, proposición 31; libro IV, proposición 8; libro XII, proposición 2.

<sup>4</sup> Asesinado por un soldado romano, durante el saqueo de Siracusa, durante la segunda guerra púnica.

En el artículo "The geometry of The Arbelos", Brian Mortimer, de la Universidad Carleton, Estados Unidos, prueba varios de los teoremas, propiedades y Lemas de Arquímedes sobre el Árbelos, de los cuales, algunos desarrollaremos en el presente trabajo.

Harold P. Boas, profesor actualmente de una Universidad de Texas, Estados Unidos, publica en la revista "The American Mathematical Monthly", correspondiente a "Mathematical Association of America", el artículo "Reflections of the arbelos" en donde plantea teoremas relacionados con esta configuración de círculos tangentes utilizando, mayormente, inversión geométrica y trigonometría.

## **2. Fundamentación**

La presente tesina tiene como objetivo principal el redescubrimiento de una configuración de tres círculos tangentes entre sí, dos a dos y algunas de sus extraordinarias propiedades y teoremas, descubiertos dos siglos antes de Cristo y retomados, por grandes matemáticos, recién en el siglo XX.

La elección de este tema de la geometría euclidiana, denominado por los griegos "Árbelos", fue inspirada, en primera instancia, por la escasa información y conocimiento sobre este concepto y, en segundo lugar, por la atracción que ocasiona la perfección geométrica de todas y cada una de sus propiedades.

Arquímedes, en su Libro de los Lemas, que consta de 15 proposiciones, hace referencias, en la número cuatro, a la figura geométrica del Árbelos y desarrolla tres propiedades fundamentales, que pasarían a ser consideradas como la base de todos los teoremas desplegados sobre esta disposición de círculos. La propuesta para este trabajo, es desarrollar estas tres propiedades, gráfica y analíticamente.

En la proposición número cinco, Arquímedes incluye un importante teorema acerca del área del árbelos y su igualdad con el área de un círculo, de características específicas. Este teorema será demostrado, luego de probar otra propiedad interesante que se da, entre dos rectas, una, que pasa por el punto de tangencia de los círculos interiores y otra, tangente, desde un punto exterior, a los mismos círculos interiores de la configuración del árbelos.

Otro teorema tan original como atrayente para probar, es el que Arquímedes demostró y denominó "Los círculos mellizos", por tener el mismo radio. Estos círculos especiales, tienen la particularidad de ser tangentes, al círculo exterior, y a una recta, perpendicular al diámetro mayor, con características específicas.

Recién, en el siglo XX, es probado que estos círculos no eran tan mellizos, sino que coexistían un trillizo y un cuatrillizo, con el mismo radio. La demostración de este cuatrillizo, es posible realizar, por uno de los desarrollos más grande de la geometría del siglo XIX, el método de Reflexión, más conocido como "Inversión". Concepto que es otorgado al gran geómetra Steiner, basados en escritos de su propiedad que datan del año 1824.

Probaremos, también, que esta familia de círculos de Arquímedes, fue aumentando rápidamente, desde el descubrimiento del cuatrillizo, hasta, comprobarse que los círculos de igual radio, eran infinitos.

El desafío es utilizar, para estas últimas demostraciones, "Inversión respecto de una circunferencia", luego de realizar una breve incursión sobre esta transformación importante del plano en sí mismo.

### 3. Proposición N° 4 del Libro de los Lemas de Arquímedes.

#### 3.1. Definición del Árbelos

Si  $\overline{AB}$  es el diámetro de un círculo y  $C$ , cualquier punto de  $\overline{AB}$ ; si otros dos círculos se describen en el interior del círculo mayor, cuyos diámetros son  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$  respectivamente, entonces el área comprendida entre las circunferencias de los tres círculos, describen dos figuras geométricas y simétricas, denominadas, cada una de ellas, con el nombre de “Árbelos”.

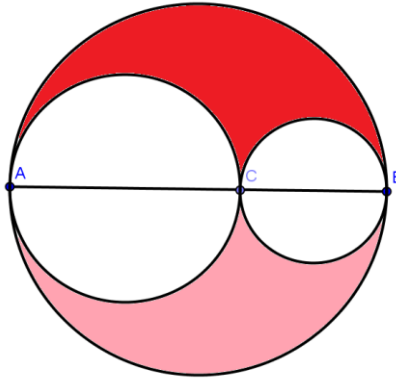


Figura 1. Configuración de 3 círculos tangentes entre sí, dos a dos.

Dada la definición del Árbelos, y la configuración de los círculos tangentes, como en la figura 1, se verifican tres proposiciones para las figuras geométricas correspondientes a cada uno de los semiplanos del segmento  $AB$ , que sellaron las bases para numerosísimas propiedades descubiertas recientemente.

#### 3.2. Proposiciones básicas del Árbelos.

Probaremos la primera de ellas, cuya representación gráfica se ve en la figura 2.

**(i) El cuadrilátero  $TEDC$  es un rectángulo.**

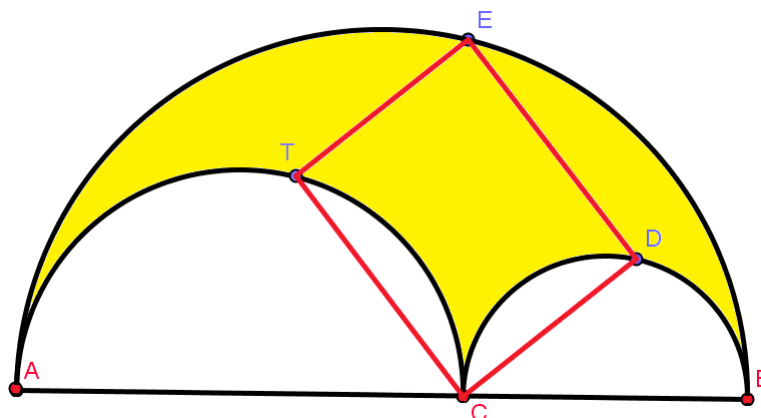


Figura 2. Primera propiedad del árbelos.

Consideremos un segmento  $AB$ , y sea  $C$  un punto cualquiera perteneciente a su interior. Trazando, en un mismo semiplano, los semicírculos de diámetros  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$ , se obtiene el Árbelos de la figura 3.

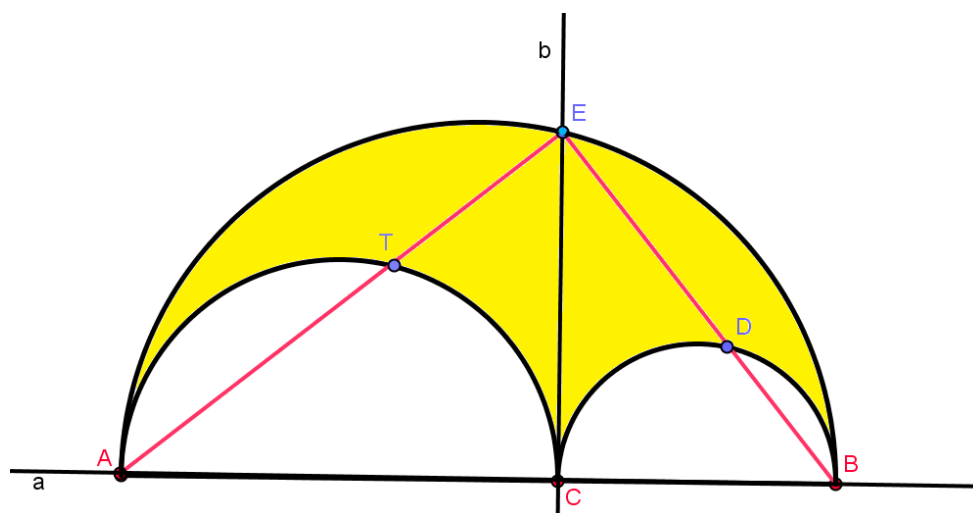


Figura 3. Árbelos

Sea  $C$  el punto de tangencia entre los círculos interiores de esta configuración.

Sea la recta  $b$ , perpendicular a la recta  $a$  que contiene al segmento  $AB$ , con su pie en el punto  $C$ , independientemente de la ubicación del mismo.

Sea  $E$ , la intersección entre la recta  $b$  y la semicircunferencia de diámetro  $\overline{AB}$ .

Uniendo el punto  $E$  con los extremos  $A$  y  $B$ , correspondiente al diámetro mayor, se obtienen:

- Punto  $T$ , intersección de la semicircunferencia de diámetro  $AC$  y el segmento  $AE$ .
- Punto  $D$ , intersección de la semicircunferencia de diámetro  $CB$  y el segmento  $EB$ .
- El triángulo  $AEB$ , inscripto<sup>5</sup> en la semicircunferencia de diámetro  $AB$ .

A continuación se traza el segmento  $\overline{TD}$  que corta al segmento  $\overline{CE}$ , obteniendo el punto  $O = \overline{TD} \cap \overline{CE}$ .

Luego, consideremos los segmentos  $TC$  y  $CD$  y los triángulos  $ATC$  y  $CDB$ , inscriptos en las semicircunferencias de diámetros  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$  respectivamente. (Ver Figura 4).

Para continuar con esta demostración, utilizaremos el teorema sobre el valor de un ángulo inscripto, sabiendo que siempre, a este tipo de ángulos le corresponde un ángulo central<sup>6</sup> que abarca el mismo arco de circunferencia.

<sup>5</sup> Ángulo inscripto: Un ángulo es inscripto en un arco de circunferencia cuando tiene el vértice en uno de sus puntos y los lados pasan por los extremos del mismo.

<sup>6</sup> Ángulo central: es todo ángulo cuyo vértice está situado en el centro de una circunferencia o círculo.

Comenzaremos por el ángulo inscrito  $AEB$  de la Figura 4, que abarca el arco  $AB$ , y al cual le corresponde el ángulo central  $ANB$ , de amplitud  $\pi$ , por tener como lados, a semirrectas opuestas.

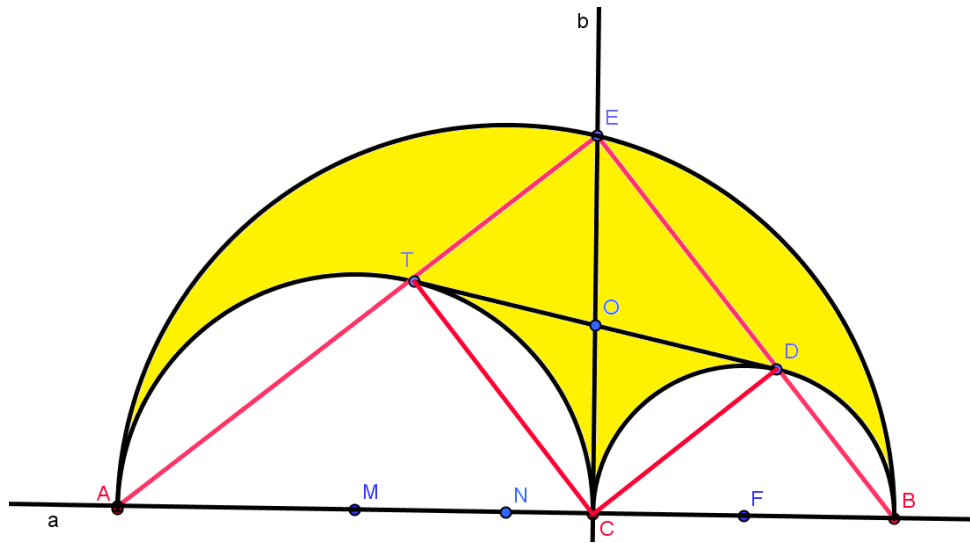


Figura 4. Los tres ángulos inscritos en las tres semicircunferencias que determinan el árbolos.

Teniendo en cuenta el Teorema: “Todo ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco”, podemos afirmar que:

$$\text{Si } \widehat{ANB} = \pi \Rightarrow \widehat{AEB} = \frac{\widehat{ANB}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Además,  $\widehat{AEB} = \widehat{TED}$  por estar  $T$  y  $D$  sobre las mismas rectas que contienen a los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente, es decir, son puntos alineados.

Por lo tanto:

$$\boxed{\widehat{TED} = \frac{\pi}{2}}$$

Como el ángulo  $\widehat{ATC}$  es inscrito en la semicircunferencia de diámetro  $AC$ , entonces le corresponde el ángulo central  $\widehat{AMC} = \pi$  porque sus lados son semirrectas opuestas. Por el teorema anterior, se afirma que:

$$\text{Si } \widehat{AMC} = \pi \Rightarrow \widehat{ATC} = \frac{\widehat{AMC}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Sabiendo que el ángulo  $\widehat{ATC}$ , es adyacente al  $\widehat{CTE}$ , podemos decir que son suplementarios y concluir que:

$$\boxed{\widehat{CTE} = \frac{\pi}{2}}$$

Un tercer ángulo, inscrito éste, en la semicircunferencia de diámetro  $CB$ , es el  $\widehat{CDB}$ , al que le corresponde el ángulo central  $\widehat{CFB} = \pi$  por ser un ángulo llano. Por el mismo teorema enunciado:

$$\text{Si } \widehat{CFB} = \pi \Rightarrow \widehat{CDB} = \frac{\widehat{CFB}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Sabiendo que el ángulo  $\widehat{CDB}$ , es adyacente al  $\widehat{CDE}$ , podemos indicar que son suplementarios, concluyendo que:

$$\boxed{\widehat{CDE} = \frac{\pi}{2}}$$

Luego, como:

$$\widehat{TED} = \widehat{CDE} = \widehat{CTE} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow CTED \text{ es un rectángulo.}$$

Esta proposición tiene consecuencias que nos serán muy útiles para demostraciones geométricas posteriores, como por ejemplo:

- $\overline{TD}$  y  $\overline{CE}$  se cortan en un punto medio  $O$ , por tratarse de las diagonales de un rectángulo, probado en (i). (Ver figura 4)

**(3. 2). (ii)  $\overline{TD}$  es tangente a los círculos de diámetro  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$ .**

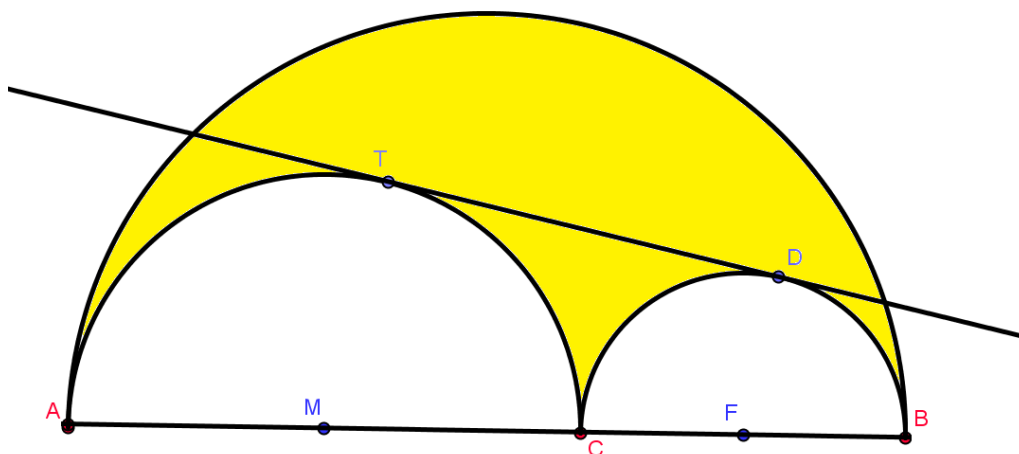


Figura 5. Árbelos con la recta  $TD$  tangente a los círculos interiores, en  $T$  y en  $D$ , respectivamente.

Para demostrar que  $\overline{TD}$  es tangente a los dos círculos de diámetro  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$  es suficiente con probar que  $\overline{TD}$ , es perpendicular a  $\overline{MT}$  y perpendicular a  $\overline{DF}$ , ya que, por propiedad<sup>7</sup>, se sabe que todo radio es siempre perpendicular a la recta tangente en ese punto de la circunferencia.

<sup>7</sup> Teorema: La perpendicular a un radio, en su extremo, es tangente a la circunferencia.

Recíprocamente: Toda tangente a una circunferencia, en uno de sus puntos, es perpendicular al radio que corresponde a ese punto.

Sean  $\overline{MT}$  y  $\overline{DF}$  radios de las semicircunferencias de diámetros  $AC$  y  $CB$ .  
 Sea la recta  $TD$ , cuyas intersecciones, simultáneas a las dos semicircunferencias de diámetros  $AC$  y  $CB$  son los puntos  $T$  y  $D$ , respectivamente.  
 Demostraremos que:

- a)  $TD \perp MT$
- b)  $TD \perp DF$

**(ii) (a)  $TD \perp MT$**

Sea el triángulo  $TMC$ , isósceles, porque  $\overline{TM} = \overline{MC}$  por ser los radios del mismo semicírculo de diámetro  $AC$ .

Dado el rectángulo  $CTED$ , (3.2). (i), sea  $TD$  y  $CE$  sus diagonales.

Como  $O$  es el punto de intersección entre esas diagonales, entonces,  $O$  es punto medio de  $TD$  y de  $CE$ , por propiedad de los rectángulos.

Luego, el triángulo  $TOC$  es isósceles porque  $\overline{TO} = \overline{OC}$  por ser las semidiagonales del rectángulo  $CTED$ .

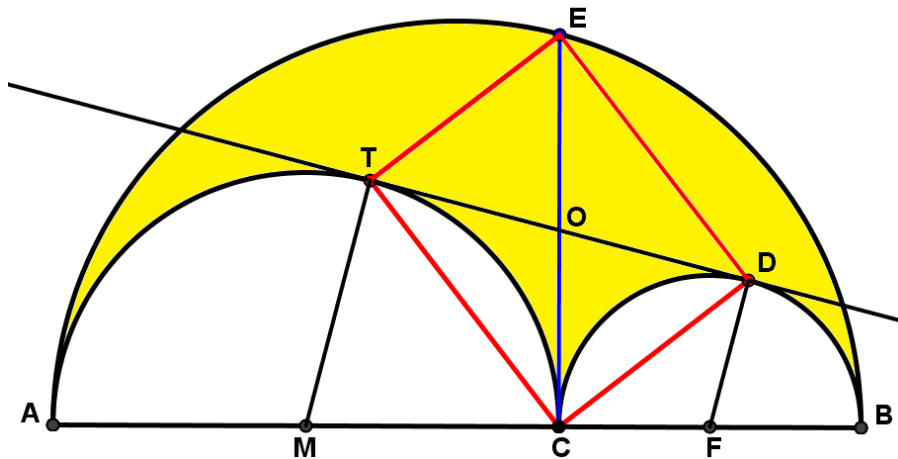


Figura 6. Árbelos: Demostración gráfica de la proposición (ii).

En el triángulo  $TMC$ , se verifica que:  $\widehat{MTC} = \widehat{MCT}$  por ser isósceles.

En el triángulo  $TOC$ , se verifica que:  $\widehat{OTC} = \widehat{OCT}$  por ser isósceles.

Entonces, sumando miembro a miembro los ángulos detallados, podemos obtener la primera comparación entre ellos, para luego probar que sus amplitudes corresponden a un recto.

$$\begin{aligned} \widehat{MTC} &= \widehat{MCT} \\ \widehat{OTC} &= \widehat{OCT} \\ \widehat{MTC} + \widehat{OTC} &= \widehat{MCT} + \widehat{OCT} \end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{MTO} = \widehat{MCO}}$$

Como  $\widehat{MTO} = \widehat{MTD}$ , por ser  $T, O$  y  $D$  puntos alineados, luego  $\boxed{\widehat{MTD} = \widehat{MCO}}$

Como  $\widehat{MCO} = \widehat{MCE}$ , por ser  $C, O$  y  $E$  puntos alineados, luego  $\boxed{\widehat{MTD} = \widehat{MCE}}$  [1]

Como sabemos que las rectas que contienen los segmentos  $CE$  y  $AB$  son perpendiculares por definición, entonces podemos afirmar que:

$$\text{Si } CE \perp AB \Rightarrow \widehat{ACE} = \frac{\pi}{2}$$

Luego  $\widehat{MCE} = \frac{\pi}{2}$ , por ser  $A, M$  y  $C$  puntos alineados.

Como  $\widehat{MTD} = \widehat{MCE}$  por [1], entonces  $\widehat{MTD} = \frac{\pi}{2}$ .

Por lo tanto  $\overline{TD} \perp \overline{MT}$ , que es lo que queríamos demostrar.

**(ii) (b)  $\overline{TD} \perp \overline{DF}$**

Esta perpendicularidad se prueba de forma análoga a la primera: comparando y estableciendo los ángulos congruentes, a partir de los triángulos isósceles constituidos.

Luego, sumando miembro a miembro los ángulos detallados a continuación, podemos obtener la segunda comparación entre ellos, para luego probar que sus amplitudes corresponden a un recto.

$$\begin{aligned} \widehat{CDF} &= \widehat{DCF} \\ \widehat{CDO} &= \widehat{OCD} \\ \widehat{CDF} + \widehat{CDO} &= \widehat{DCF} + \widehat{OCD} \end{aligned}$$

$$\widehat{FDO} = \widehat{FCO}$$

Como  $\widehat{FDO} = \widehat{FDT}$  Por ser  $T, O$  y  $D$  puntos alineados, luego  $\widehat{FDT} = \widehat{FCO}$  [2]

Como  $\widehat{FCO} = \widehat{FCE}$  Por ser  $C, O$  y  $E$  puntos alineados, luego  $\widehat{FCE} = \widehat{FDO}$

Como sabemos que los segmentos  $CE$  y  $AB$  son perpendiculares por definición, entonces podemos afirmar que:

$$\overline{CE} \perp \overline{AB} \Rightarrow \widehat{BCE} = \frac{\pi}{2}$$

Luego  $\widehat{FCO} = \frac{\pi}{2}$ , por ser  $B, F$  y  $C$  puntos alineados.

Como  $\widehat{FDT} = \widehat{FCO}$  por [2], entonces  $\widehat{FCO} = \frac{\pi}{2}$ . Luego  $\overline{TD} \perp \overline{FD}$ . (Ver Figura 6)

Por lo tanto,  $\overline{TD}$  es tangente a los semicírculos de diámetro  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$  en los puntos  $T$  y  $D$  respectivamente.

Además, sabiendo que los segmentos  $CE$  y  $TD$  se bisecan, por ser diagonales de un mismo rectángulo, podemos afirmar que los puntos  $C, E, T$  y  $D$  son concéntricos<sup>8</sup>.

Esto se comprueba con la demostración de la tercera proposición fundamental del árbelos.

<sup>8</sup> Un paralelogramo es inscribible en una circunferencia si y sólo si, es un rectángulo.



Sabiendo que el área del semicírculo es  $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 \text{Área}_{\text{árbelos}} &= \frac{\pi \cdot r^2}{2} - \left( \frac{\pi \cdot r_1^2}{2} + \frac{\pi \cdot r_2^2}{2} \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} r^2 - \frac{\pi}{2} r_1^2 - \frac{\pi}{2} r_2^2 \\
 &= \frac{\pi}{2} (r^2 - r_1^2 - r_2^2) \\
 &= \frac{\pi}{2} ((r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2) \quad \text{Por (3.2). [3]: } r_1 + r_2 = r \\
 &= \frac{\pi}{2} (r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 - r_1^2 - r_2^2) \\
 &= \frac{\pi}{2} 2r_1 r_2
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área}_{\text{árbelos}} = \pi r_1 r_2} \quad [4]$$

Otra consideración a tener en cuenta para la demostración de esta proposición, es el siguiente Teorema: “Toda semicuerda perpendicular a un diámetro es media proporcional entre los segmentos en que lo divide”.

Sea:  $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{CE}$  es semicuerda,  $\overline{AB}$  es diámetro

$$\text{Si } \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} \Rightarrow \boxed{\overline{CE}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB}} \quad [5]$$

Volviendo a la demostración de la proposición (iii), el área del círculo de diámetro  $\overline{CE}$ , vale:

$$\begin{aligned}
 \text{Área}_{\text{círculo diám.}\overline{CE}} &= \pi \cdot \left( \frac{\overline{CE}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \overline{CE}^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CB} \quad \text{Por [5]} \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot 2r_1 \cdot 2r_2
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área}_{\text{círculo diám.}\overline{CE}} = \pi r_1 r_2} \quad [6]$$

Entonces, por 4 y 6, obtenemos lo que queríamos demostrar:

$$\boxed{\text{Área}_{\text{árbelos}} = \text{Área}_{\text{círculo diám.}\overline{CE}}}$$

#### 4. Los círculos mellizos de Arquímedes: el inicio de una familia numerosa.

##### 4. 1. Proposición 5 del Libro de los Lemas de Arquímedes.

Si dos círculos están inscriptos en el árbelos, separados por el segmento CT perpendicular, en C, a la recta que contiene el segmento AB, diámetro del círculo mayor, entonces estos dos círculos tienen el mismo radio.

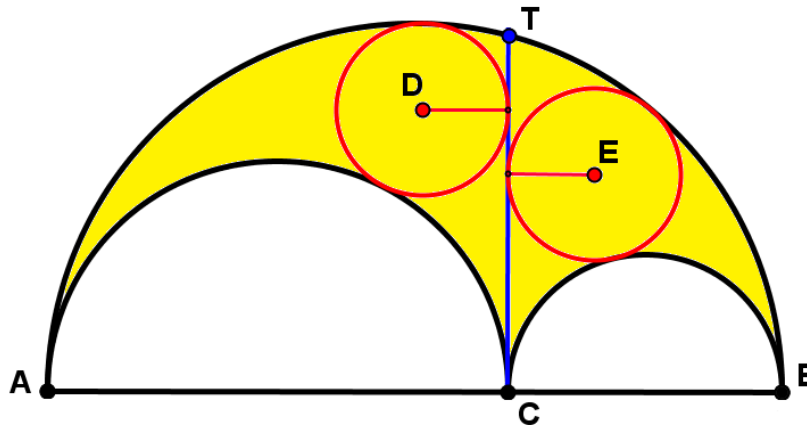


Figura 8. Los círculos mellizos de Arquímedes.

Para demostrar que los radios de estos dos círculos son iguales, se utilizará trigonometría, siendo esta demostración, relativamente moderna.

Consideremos cada uno de los círculos y sus centros  $D$  y  $E$ , respectivamente. (Ver figura 8).

Denominemos “ $x$ ” e “ $y$ ” a los radios desconocidos de los círculos y llamemos:

(a)  $C_1(D, x)$ : Círculo de centro  $D$  y radio  $x$ .

(b)  $C_2(E, y)$ : Círculo de centro  $E$  y radio  $y$ .

Sabiendo que:  $P = \frac{AB}{2}$  ;  $M = \frac{AC}{2}$  ;  $N = \frac{CB}{2}$

$$\overline{PB} = r \quad ; \quad \overline{MA} = r_1 \quad ; \quad \overline{NB} = r_2$$

Demostraremos que los radios “ $x$ ” e “ $y$ ” son iguales, trabajando con los dos círculos mellizos de Arquímedes y los triángulos que se obtienen al unir los centros de los mismos,  $D$  y  $E$ , con los centros de los tres semicírculos que conforman la configuración que define al árbelos.

Las rectas auxiliares, los triángulos rectángulos y otros elementos, que se utilizarán, son representados en la gráfica de la figura 9.

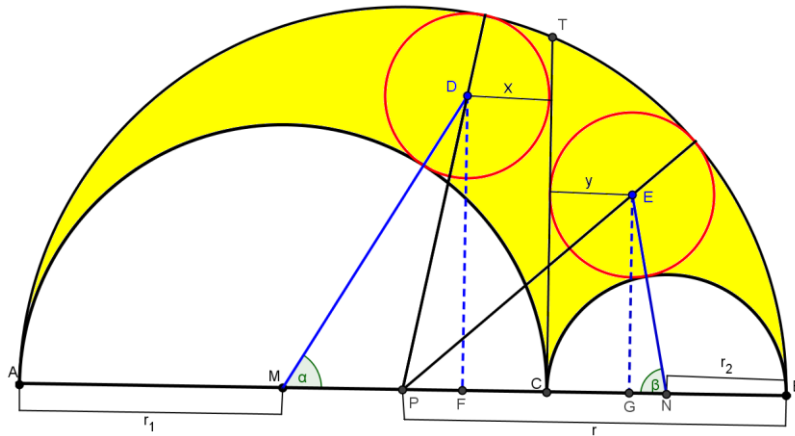


Figura 9. Los círculos inscriptos en el árbelos, llamados “círculos mellizos de Arquímedes”.

**4. 1. (a)  $C_1(D, x)$ : Círculo de centro D y radio “x”.**

Trabajemos, en primer lugar, con el valor del radio “x”, correspondiente al círculo de centro D y que fue presentado, gráficamente, en la Figura 9.

Si unimos los puntos  $M, D, F$ , queda determinado el triángulo rectángulo  $DFM$  y el ángulo  $\widehat{DMF}$  que denominaremos  $\alpha$ .

Primeramente, consideremos el coseno del ángulo  $\alpha$ :

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\overline{MF}}{\overline{MD}} = \frac{r_1 - x}{r_1 + x} \quad \boxed{7}$$

Por otra parte, uniendo el punto  $P$ , centro del círculo mayor de la configuración, con el punto  $D$  y, este último, con el punto  $M$ , obtenemos el triángulo  $DMP$ , cuyo ángulo interior, también es  $\widehat{DMF} = \hat{\alpha}$ .

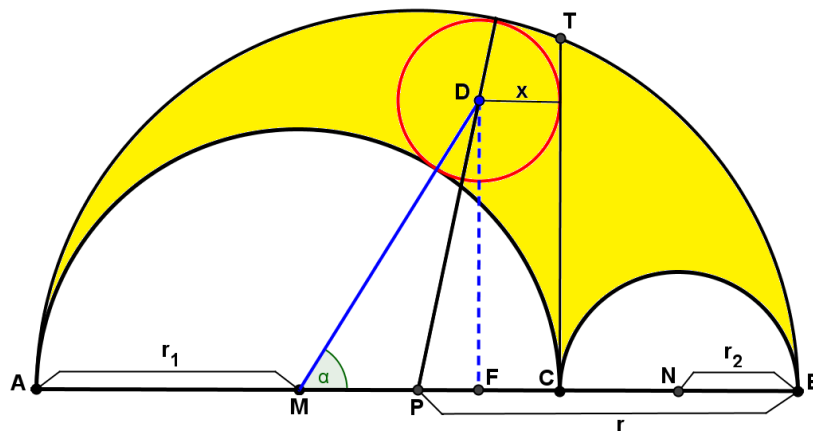
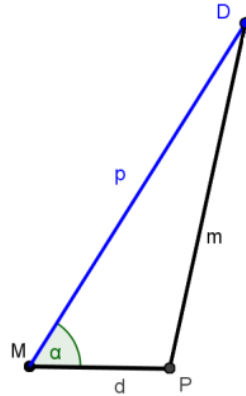


Figura 10. Círculo mellizo de centro D y radio “x”.

Utilizando el Teorema del coseno<sup>10</sup> para el ángulo  $DMP = \hat{\alpha}$ , señalamos, para mayor claridad, en la siguiente figura de análisis, los lados respectivamente opuestos a cada ángulo interior del triángulo  $MDP$ .



**Figura 11.** Triángulo  $MDP$  al que se aplica el Teorema del coseno.

Teniendo en cuenta el ángulo  $\alpha$  y los lados del triángulo, podemos escribir la siguiente fórmula, aplicando el Teorema del coseno:

$$m^2 = d^2 + p^2 - 2dp \cdot \cos \hat{\alpha}$$

Sustituimos el valor de cada lado del triángulo  $MDP$ , en función de “ $x$ ” y de los radios correspondientes a los círculos de la configuración que forman el árbelos:

$$(r - x)^2 = (r - r_1)^2 + (r_1 + x)^2 - 2(r - r_1)(r_1 + x) \cos \hat{\alpha}$$

El coseno del  $\hat{\alpha}$ , lo podemos escribir según la expresión obtenida en [7].

$$(r - x)^2 = (r - r_1)^2 + (r_1 + x)^2 - 2(r - r_1)(r_1 + x) \frac{r_1 - X}{r_1 + X}$$

Simplificando, en el tercer término, la expresión:  $r_1 + x$ , se obtiene:

$$(r - x)^2 = (r - r_1)^2 + (r_1 + x)^2 - 2(r - r_1)(r_1 - x)$$

---

<sup>10</sup> Teorema del coseno:

Dado un triángulo  $ABC$ , siendo  $\alpha, \beta, \gamma$ , los ángulos;  $a, b, c$ , los lados respectivamente opuestos a estos ángulos, entonces:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

Desarrollando los cuadrados y cancelando:

$$r^2 - 2rx + x^2 = r^2 - 2rr_1 + r_1^2 + r_1^2 + 2r_1x + x^2 - 2rr_1 + 2rx + 2r_1^2 - 2r_1x$$

$$-2rx = 4r_1^2 - 4rr_1 + 2rx$$

$$0 = 4r_1^2 - 4rr_1 + 4rx$$

$$0 = 4(rx + r_1^2 - rr_1)$$

$$0 = rx + r_1(r_1 - r)$$

$$-rx = r_1(r_1 - r)$$

$$x = -\frac{r_1(r_1 - r)}{r}$$

$$x = \frac{r_1(r - r_1)}{r}$$

Si probamos que:  $r - r_1 = r_2$ , podemos obtener el valor de "x", en función de los radios de los círculos que intervienen en la configuración del área del árbelos, y reemplazar en la expresión inmediatamente anterior.

Sabiendo que el diámetro  $\overline{AC} = 2r_1$ ; el diámetro  $\overline{CB} = 2r_2$  (ver Figura 9), luego:

$$\text{El diámetro } \overline{AB} = 2r_1 + 2r_2$$

$$\text{Entonces: } \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2r_1 + 2r_2}{2}$$

Como  $\overline{AB}$  es el diámetro del círculo mayor, luego:  $\frac{\overline{AB}}{2} = r$ , es radio del mismo círculo.

Entonces:

$$r = \frac{2r_1 + 2r_2}{2} \Rightarrow r = r_1 + r_2$$

Luego:

$$\boxed{r_2 = r - r_1} \quad \boxed{8}$$

Prosiguiendo con las operaciones algebraicas anteriores, sustituimos, de acuerdo a la expresión  $\boxed{8}$ .

$$x = \frac{r_1(r - r_1)}{r} \Rightarrow x = \frac{r_1 r_2}{r}$$

Como,  $r = r_1 + r_2$ , entonces:

$$\boxed{x = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \quad \boxed{9}$$

**4. 1. (b)  $C_2(E, y)$ : Círculo de centro E y radio “y”.**

Para trabajar con el círculo  $C_2(E, y)$ , procederemos de forma análoga, teniendo en cuenta, esta vez, el semicírculo de la configuración que conforman el árbelos, cuyo diámetro es  $\overline{CB}$  y su radio  $r_2$ .

Probaremos que este segundo círculo, tiene su radio “y”, igual al radio “x” del primer círculo de centro D y radio “x”.

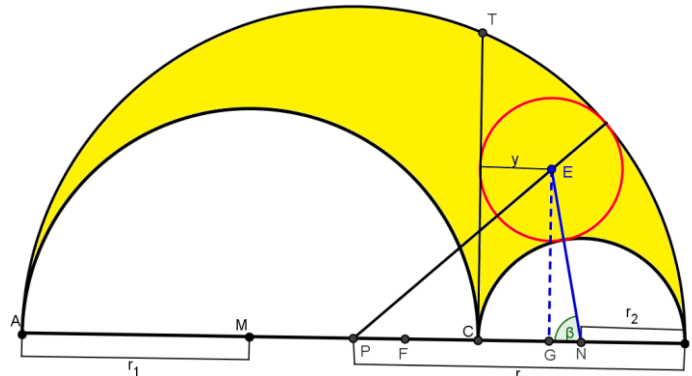


Figura 12. Círculo de centro E y radio “y”.

Trazando  $\overline{EG}$ , perpendicular a la recta que contiene al diámetro  $\overline{AB}$ , y uniendo los puntos  $E, G, N$ , queda determinado el triángulo rectángulo, en G, y el ángulo  $\widehat{ENG}$  que denominaremos  $\beta$ .

Consideremos, en primer lugar, el coseno de este ángulo  $\beta$ :

$$\cos \hat{\beta} = \frac{\overline{GN}}{\overline{EN}} = \frac{r_2 - y}{r_2 + y} \quad [10]$$

Nuevamente, trabajemos con el centro  $P$  del semicírculo mayor de la configuración, es decir, el que tiene diámetro  $AB$ . Uniendo los puntos  $E, N$ , y  $P$ , obtenemos el triángulo  $ENP$ , siendo uno de sus ángulos interiores, también el  $\widehat{ENG} = \hat{\beta}$ .

Para utilizar el Teorema del coseno, tendremos en cuenta este ángulo  $\beta$  y la figura 12, de análisis:

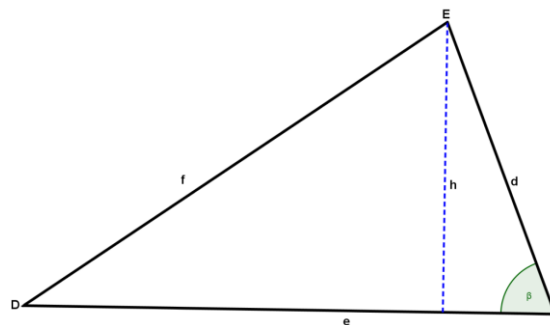


Figura 13. Triángulo  $DNP$ , de análisis para aplicar el Teorema del coseno.

Teniendo en cuenta el ángulo  $\beta$  y los lados del triángulo  $ENP$ , escribimos, aplicando el Teorema del coseno:

$$n^2 = e^2 + p^2 - 2ep \cdot \cos \hat{\beta}$$

Sustituimos el valor de cada lado del triángulo  $MDP$ , en función de los radios correspondientes a los semicírculos de la configuración que forman el árbelos y en función del radio "y" del segundo círculo mellizo.

$$(r - y)^2 = (r - r_2)^2 + (r_2 + y)^2 - 2(r - r_2)(r_2 + y) \cos \hat{\beta}$$

El coseno del  $\hat{\beta}$ , lo podemos escribir según la expresión obtenida en [\[10\]](#).

$$(r - y)^2 = (r - r_2)^2 + (r_2 + y)^2 - 2(r - r_2)(r_2 + y) \frac{r_2 - y}{r_2 + y}$$

Simplificando, en el tercer término, la expresión:  $r_2 + y$  se obtiene:

$$(r - y)^2 = (r - r_2)^2 + (r_2 + y)^2 - 2(r - r_2)(r_2 - y)$$

Desarrollando los cuadrados:

$$r^2 - 2ry + y^2 = r^2 - 2rr_2 + r_2^2 + r_2^2 + 2r_2y + y^2 - 2rr_2 + 2ry + 2r_2^2 - 2r_2y$$

Cancelando los términos correspondientes:

$$-2ry = 4r_2^2 - 4rr_2 + 2ry$$

$$0 = 4r_2^2 - 4rr_2 + 4ry = 4 (ry + r_2^2 - rr_2) = 4 (ry + r_2^2 - rr_2)$$

Dividiendo miembro a miembro por 4 y despejando "y":

$$0 = ry + r_2 (r_2 - r)$$

$$-ry = r_2 (r_2 - r)$$

$$y = - \frac{r_2 (r_2 - r)}{r}$$

$$y = \frac{r_2 (r - r_2)}{r}$$

Recordemos que:  $r = \frac{2r_1 + 2r_2}{2} \Rightarrow r = r_1 + r_2$

Luego:

$$\boxed{r_1 = r - r_2}$$

Sustituyendo en: 
$$y = \frac{r_2 (r - r_2)}{r} \Rightarrow y = \frac{r_2 r_1}{r}$$

Sabiendo que  $r = r_1 + r_2$  entonces:

$$y = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Luego, por  $\boxed{9}$  en (4. 1) (a):

$$\boxed{X = Y}$$

### 5. El círculo trillizo de Leon Bankoff.

Demostraremos que el radio de un tercer círculo, descubierto por Leon Bankoff en el año 1974, coincide con los radios de los círculos mellizos de Arquímedes, probado en (4. 1), con lo cual, ya tendríamos “trillizos”.

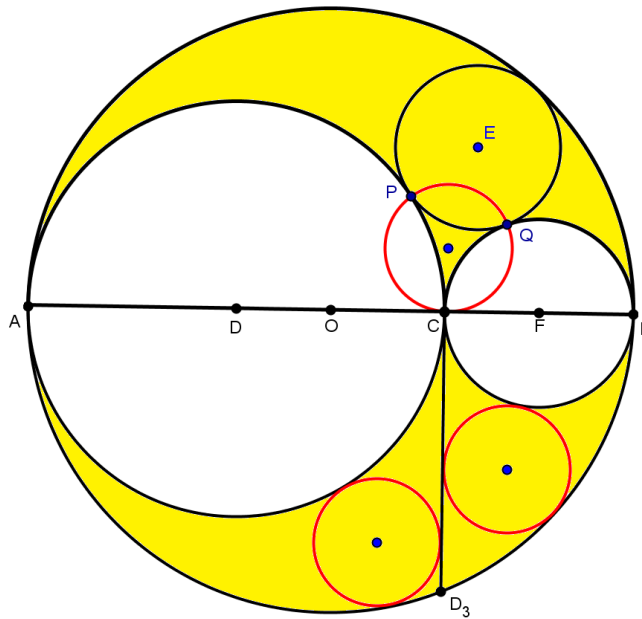


Figura 14. El círculo trillizo de Bankoff.

#### 5. 1. Circunferencia inscrita en el árbelos, tangente a los tres semicírculos.

Para la demostración del círculo trillizo, primero debemos conocer el radio de la circunferencia inscrita en el árbelos, tangente a los tres semicírculos de la configuración del mismo.

En la gráfica presentada en la figura 15, se observa el círculo de centro  $E$  y radio  $\rho$  con el cual vamos a trabajar, como así también, sus puntos de tangencias con los semicírculos de diámetros  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$  en  $P$  y  $Q$ .

Además se señalan los radios,  $r$ ,  $r_1$  y  $r_2$  de los tres semicírculos de diámetros  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$ , respectivamente, recordando que  $r = r_1 + r_2$  (4. 1).

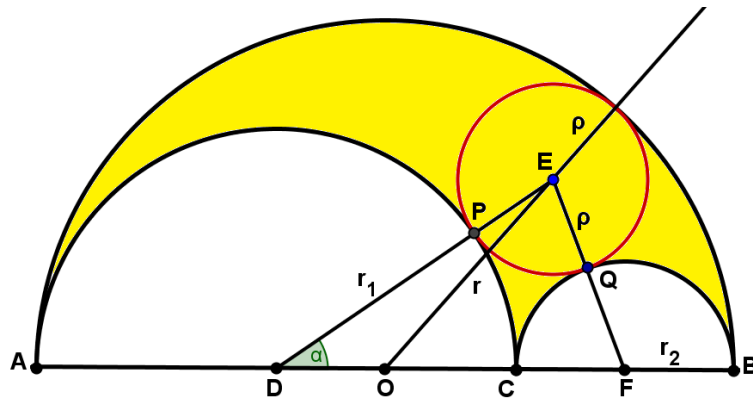


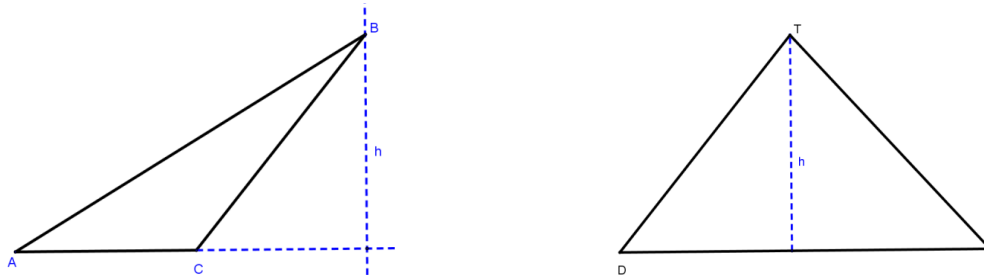
Figura 15. Círculo de radio  $\rho$ , inscripto en el árbol.

Si trazamos los segmentos que unen el centro  $E$ , del círculo de radio  $\rho$ , con los centros de los tres semicírculos de la configuración del árbol, se obtienen dos triángulos con la particularidad de tener la misma altura.

Demostraremos, primero, un teorema y tres propiedades que utilizaremos para probar la existencia del círculo trillizo del árbol.

**(5. 1) 1. Propiedad:** “Las áreas de dos triángulos de igual altura son proporcionales a sus bases”.

Sean el triángulo  $ABC$  con la altura del vértice  $B$  igual a  $h$  y el triángulo  $EDT$  con la altura del vértice  $T$  igual a  $h$ . (Ver figura).



$$\text{El área del triángulo } ABC \text{ es: } \Delta(ABC) = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2}$$

$$\text{El área del triángulo } DET \text{ es: } \Delta(DET) = \frac{\overline{DE} \cdot h}{2}$$

$$\text{Dividiendo miembro a miembro: } \frac{\Delta(ABC)}{\Delta(DET)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$$

**(5. 1) 2. Teorema:** *En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de uno de ellos, por la proyección de otro sobre él.*

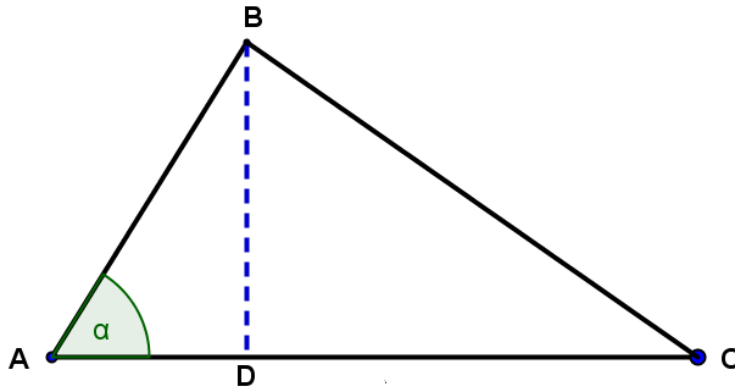


Figura de análisis

Sea el triángulo  $ABC$ , donde el ángulo de vértice  $A$  es agudo. Trazando la perpendicular  $BD$ , sobre  $AC$ , se tiene los triángulos  $ABD$  y  $BDC$ , rectángulos.

Por el teorema de Pitágoras, se obtiene a partir de los dos triángulos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \quad (1)$$

$$\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 \quad (2)$$

Sabemos, según la ubicación del punto  $D$ , que:

$$DC = AC - AD$$

$$\text{o bien } DC = AD - AC.$$

Si elevamos al cuadrado, miembro a miembro, cualquiera de las dos expresiones, obtenemos:

$$\overline{DC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AD})^2$$

$$\text{o bien } \overline{DC}^2 = (\overline{AD} - \overline{AC})^2$$

Resolviendo el cuadrado de la diferencia de dos magnitudes, obtenemos:

$$\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2AC \cdot AD \quad (3)$$

Sumando, ordenadamente, las igualdades (1), (2) y (3), se obtiene:

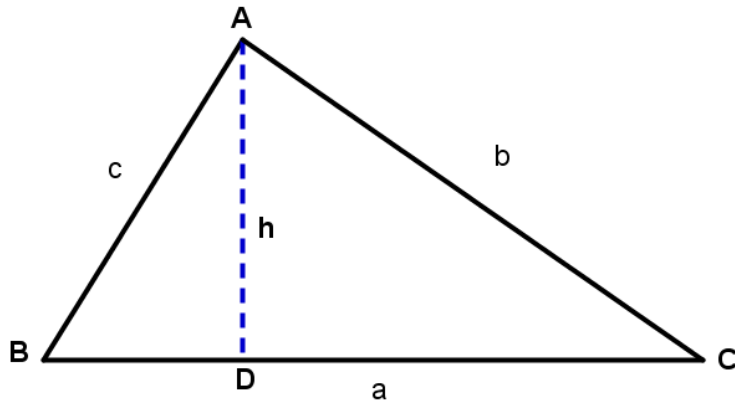
$$\overline{BC}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2AC \cdot AD$$

Operando algebraicamente, se obtiene lo que queríamos demostrar.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \cdot AD \quad (5. 1) 2$$

**(5. 1) 3. Propiedad:** La altura de un triángulo en función de su perímetro.

Sea  $AD$  la altura  $h$  del triángulo  $ABC$ , y designemos por  $a$ ,  $b$  y  $c$  los lados opuestos a los ángulos de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente.



Por el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = h^2 + \overline{BD}^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - \overline{BD}^2$$

Pero, por el Teorema (5. 1) 2, sabemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot BD$$

De donde:

$$BD = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2a}$$

Elevando al cuadrado, miembro a miembro:

$$\overline{BD}^2 = \frac{(c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2} \quad (4)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo  $ADC$ :

$$b^2 = h^2 + \overline{DC}^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - \overline{DC}^2$$

Pero, por el teorema (5. 1) 2, sabemos que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BD \quad (5)$$

También sabemos que:

$$DC = BC - BD$$

Elevando al cuadrado, miembro a miembro y desarrollando la diferencia de cuadrados:

$$\overline{DC}^2 = (BC - BD)^2 = (a - BD)^2$$

$$\overline{DC}^2 = a^2 + BD^2 - 2a \cdot BD \quad (6)$$

Volviendo a la igualdad:

$$h^2 = b^2 - \overline{DC}^2$$

Reemplazamos por (5) y (6):

$$h^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BD - (a^2 + BD^2 - 2a \cdot BD)$$

$$h^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BD - a^2 - BD^2 + 2a \cdot BD$$

Operando algebraicamente, obtenemos:

$$h^2 = c^2 - BD^2$$

Sustituyendo por (4) y resolviendo:

$$h^2 = c^2 - \frac{(c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(2ac)^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

Luego, aplicando factorización:

$$h^2 = \frac{(2ac + c^2 - a^2 - b^2) \cdot (2ac - c^2 + a^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(c^2 - (2ac - a^2 - b^2)) \cdot ((2ac + a^2 + b^2) - c^2)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(c^2 - (a^2 - b^2)^2) \cdot ((a^2 + b^2)^2 - c^2)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(c + a - b) \cdot (c - a + b) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b - c)}{4a^2}$$

Ahora, hallemos la expresión de cada uno de los factores, en función del semiperímetro del triángulo  $ABC$ .

Si designamos con "s" al semiperímetro:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Entonces:

$$\frac{a + b + c}{2} = s \Rightarrow a + b + c = 2s$$

Restando miembro a miembro  $2b$ :

$$a + b + c - 2b = 2s - 2b$$

$$a + c - b = 2(s - b) \quad (7)$$

Análogamente, hallamos (8), (9) y (10), respectivamente:

$$c - a + b = 2(s - a)$$

$$a + b - c = 2(s - c)$$

$$a + b + c = 2s$$

Volviendo a:

$$h^2 = \frac{(c + a - b) \cdot (c - a + b) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b - c)}{4a^2}$$

Sustituimos por (7), (8), (9) y (10):

$$h^2 = \frac{2s \cdot 2(s - a) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - c)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{4s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{a^2}$$

Aplicando raíz cuadrada miembro a miembro, obtenemos lo que queríamos demostrar:

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \quad (5.1) \ 3$$

**(5.1) 4. Propiedad:** Área de un triángulo en función de su semiperímetro.

Sea  $a, b, c$ , los tres lados de un triángulo  $ABC$  y  $h$  la altura llevada sobre el lado  $a$ . Designando el área del triángulo por  $\Delta(ABC)$ , podemos escribir:

$$\Delta(ABC) = \frac{a}{2} \cdot h$$

Sustituyendo a la altura  $h$  por su valor, encontrado en (5.1) 3, se obtiene:

$$\Delta(ABC) = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Simplificando, se obtiene lo que queríamos demostrar:

$$\Delta(ABC) = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \quad (5.1) \ 4$$

Esta fórmula es conocida como la "Fórmula de Herón"<sup>11</sup>.

<sup>11</sup> Herón de Alejandría: Ingeniero y matemático (10 d. c. y 70 d. c). Su mayor logro, la primera máquina de vapor, llamada "Eolípila". Autor de numerosos tratados de mecánica como *La neumática* donde estudia la hidráulica.

## 5. 2 Áreas de los triángulos de igual altura, del árbelos, cuando $r_1 \neq r_2$

En la gráfica de la figura 15, se presentan dos árbelos incluidos en la misma configuración de círculos tangentes entre sí, dos a dos. Estos árbelos simétricos, facilitan la visualización de los círculos mellizos, juntamente con el tercero, de igual radio, inscripto en el triángulo que se forma al unir los centros de los semicírculos interiores de la configuración, cualquiera sea su ubicación.

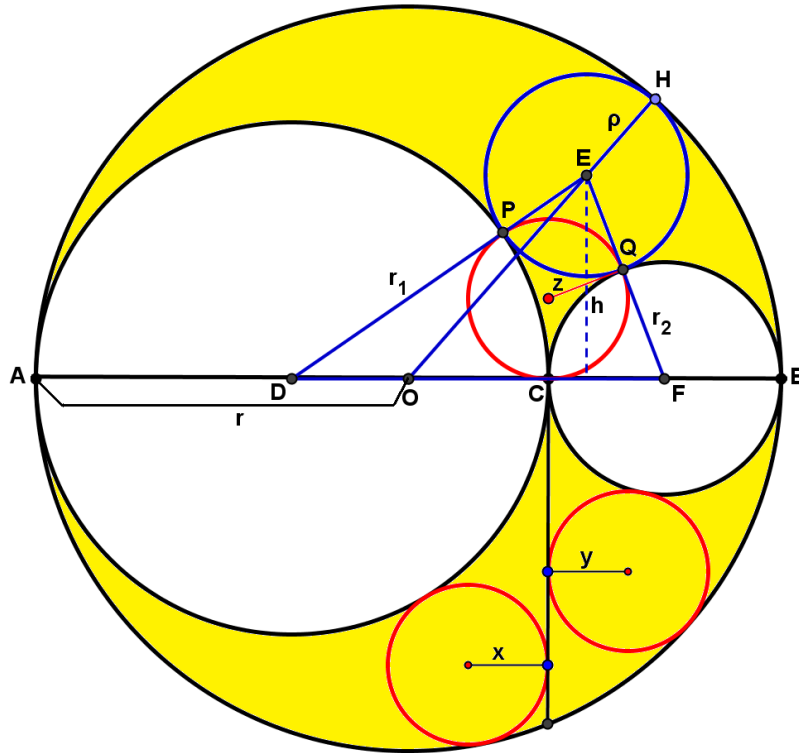


Figura 16. Los círculos mellizos y su trillizo, con los triángulos  $DOE$  y  $FOE$  cuando  $r_1 \neq r_2$ .

- (a) Triángulo  $DOE$  cuando  $r_1 \neq r_2$
- (b) Triángulo  $FOE$ , cuando  $r_1 \neq r_2$

### (a) Triángulo $DOE$ , cuando $r_1 \neq r_2$

Consideremos el triángulo  $DOE$  y su perímetro, teniendo en cuenta las longitudes de sus lados en función de los radios  $r$ ,  $r_1$  y  $\rho$ :

$$\overline{DE} = r_1 + \rho ; \overline{EO} = r - \rho ; \overline{DO} = r - r_1$$

Luego, el perímetro del triángulo  $DOE$  es:  $r_1 + \rho + r - \rho + r - r_1 = 2r$

Si el perímetro es igual a  $2r$ , entonces el semiperímetro, es igual a  $r$ :

$$\boxed{s = r}$$

Este semiperímetro nos resulta conveniente para hallar el área del triángulo,  $DOE$ , utilizando la Fórmula de Herón:

Área del triángulo  $DOE$ :

$$\Delta(DOE) = \sqrt{s(s - \overline{DE})(s - \overline{EO})(s - \overline{DO})}$$

Sustituyendo, en primer lugar, el valor del semiperímetro hallado,  $s = r$ , juntamente con los valores de cada lado, en función de los radios:

$$\Delta(DOE) = \sqrt{r(r - (r_1 + \rho))(r - (r - \rho))(r - (r - r_1))}$$

$$\Delta(DOE) = \sqrt{r(r - r_1 - \rho)(r - r + \rho)(r - r + r_1)}$$

Cancelando lo que corresponda y recordando que  $r - r_1 = r_2$  por [8]:

$$\Delta(DOE) = \sqrt{r(r - r_1 - \rho)r_1\rho}$$

$$\Delta(DOE) = \sqrt{r(r_2 - \rho)r_1\rho} \quad [11]$$

Con lo cual, obtenemos el área del triángulo  $DOE$ , que estábamos buscando.

### (b) Triángulo $DEF$ , cuando $r_1 \neq r_2$

Consideremos, ahora, el triángulo  $FOE$  y su perímetro, teniendo en cuenta las longitudes de sus lados en función de los radios  $r$ ,  $r_2$  y  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \overline{EO} &= r - \rho \\ \overline{EF} &= r_2 + \rho \\ \overline{OF} &= r - r_2 \end{aligned}$$

#### (i) Perímetro del triángulo $DEF$ .

El perímetro del triángulo  $FOE$  es:

$$\overline{EO} + \overline{EF} + \overline{OF} = r_2 + \rho + r - \rho + r - r_2 = 2r$$

#### (ii) Semiperímetro del triángulo $DEF$ .

El semiperímetro, es otra vez, igual a  $r$ , es decir:

$$\boxed{s = r}$$

**(iii) Fórmula de Herón.**

Entonces, utilizando nuevamente, la fórmula de Herón, podemos calcular el área del triángulo  $FOE$ :

$$\Delta(FOE) = \sqrt{s(s - \overline{EO})(s - \overline{EF})(s - \overline{OF})}$$

Operando análogamente:

$$\Delta(FOE) = \sqrt{r(r - (r - \rho))(r - (r_2 + \rho))(r - (r - r_2))}$$

$$\Delta(FOE) = \sqrt{r(r - r + \rho)(r - r_2 - \rho)(r - r + r_2)}$$

Cancelando lo que corresponda.

$$\Delta(FOE) = \sqrt{r(r - r_2 - \rho)r_2\rho}$$

Sustituyendo y teniendo en cuenta que  $r - r_2 = r_1$ , el área del triángulo  $FOE$ , que estábamos buscando, es:

$$\Delta(FOE) = \sqrt{r(r_1 - \rho)r_2\rho} \quad [12]$$

**(c) Valor de  $\rho$ , cuando  $r_1 \neq r_2$**

Como sabemos que ambos triángulos,  $DOE$  y  $FOE$  tienen la misma altura, por propiedad, (5. 1. 1), la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.

Luego, se cumple la siguiente proporción:

$$\frac{\Delta(DOE)}{\Delta(FOE)} = \frac{\overline{DO}}{\overline{OF}}$$

Reemplazamos por los valores hallados en (5. 1) (a) y (b) y sustituimos los segmentos por su expresión en función de los radios de los semicírculos de la configuración.

$$\frac{\sqrt{r(r_2 - \rho)r_1\rho}}{\sqrt{r(r_1 - \rho)r_2\rho}} = \frac{r - r_1}{r - r_2}$$

Por (5. 1) (a) y (b):

$$\frac{\sqrt{r(r_2 - \rho)r_1\rho}}{\sqrt{r(r_1 - \rho)r_2\rho}} = \frac{r_2}{r_1}$$

Elevando al cuadrado, miembro a miembro, tenemos:

$$\left( \frac{\sqrt{r(r_2 - \rho)r_1\rho}}{\sqrt{r(r_1 - \rho)r_1\rho}} \right)^2 = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2$$

$$\left| \frac{r(r_2 - \rho)r_1\rho}{r(r_1 - \rho)r_1\rho} \right| = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Tomamos el valor positivo:  $\frac{r(r_2 - \rho)r_1\rho}{r(r_1 - \rho)r_1\rho} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$

Realizamos operaciones con el objetivo de despejar  $\rho$ :

- Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones.
- Dividimos miembro a miembro por  $r\rho$ .
- Agrupamos convenientemente los términos.
- Aplicamos factorización: diferencia de cuadrados y diferencias de potencias de igual exponente, impar.
- Simplificamos por  $r_1 - r_2$ .

$$r(r_2 - \rho)r_1\rho \cdot r_1^2 = r(r_1 - \rho)r_1\rho \cdot r_2^2$$

$$(r_2 - \rho)r_1 \cdot r_1^2 = (r_1 - \rho)r_1 \cdot r_2^2$$

$$(r_2 - \rho)r_1^3 = (r_1 - \rho)r_2^3$$

$$r_2r_1^3 - \rho r_1^3 = r_1r_2^3 - \rho r_2^3$$

$$r_2r_1^3 - r_1r_2^3 = \rho r_1^3 - \rho r_2^3$$

$$r_2r_1^3 - r_1r_2^3 = \rho(r_1^3 - r_2^3)$$

$$\rho = \frac{r_2r_1^3 - r_1r_2^3}{(r_1^3 - r_2^3)}$$

$$\rho = \frac{r_1r_2(r_1^2 - r_2^2)}{(r_1^3 - r_2^3)}$$

$$\rho = \frac{r_1r_2(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{(r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)}$$

$$\rho = \frac{r_1r_2(r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2}$$

Llamemos, a este valor:  $\rho_1$ , (5. 2) (c)

### 5. 3 Triángulo $DEF$ , cuando $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$ .

Cuando  $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$ , la demostración anterior no es útil porque  $r_1 - r_2 = 0$ .

En este caso, específico, el punto de tangencia de los semicírculos de diámetros  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$ , coincide con el centro del semicírculo de diámetro  $\overline{AB}$  de la configuración que forma el árbelos. (Ver figura 17).

La altura de este triángulo  $DEF$ , desde el vértice  $E$ , (ver figura 17), es igual a la diferencia entre el radio  $r$ , del semicírculo de diámetro mayor, y el radio  $\rho$ , del círculo inscripto en el árbelos.

Recordemos que este círculo tiene tres puntos de tangencias, uno con cada semicírculo de la configuración que describe el árbelos.

Primeramente, presentaremos la nueva configuración de círculos en la siguiente gráfica, observando el triángulo  $DEF$  y el círculo trillizo de Bankoff, inscripto en él.

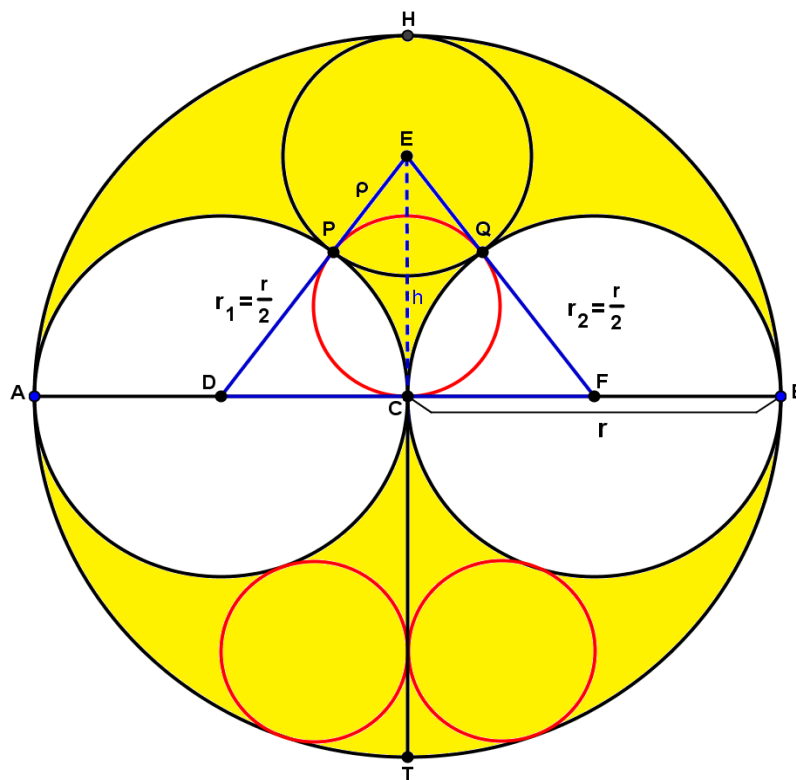


Figura 17. El círculo trillizo cuando  $r_1 + r_2 = r$

En este caso particular, el triángulo  $DEF$  es isósceles, algo sencillo de observar, ya que sabemos que los lados  $\overline{DE}$  y  $\overline{EF}$ , del mismo, son iguales a  $\frac{r}{2} + \rho$ .

Tanto sus lados, como la altura desde el vértice  $E$ , se pueden expresar, en función de los radios, como se indica a continuación:

- $\overline{DE} = r_1 + \rho = \frac{r}{2} + \rho$
- $\overline{EF} = r_2 + \rho = \frac{r}{2} + \rho$
- $\overline{DF} = r_1 + r_2 = r$
- $\overline{EC} = r - \rho$

Con estos valores, hallaremos el radio del círculo inscripto en el árbelos, al que llamamos  $\rho$ , para utilizarlo en la demostración para comprobar que el círculo inscripto en el triángulo  $DEF$ , también es el trillizo de Bancoff.

El procedimiento que utilizaremos es, hallar el área del triángulo  $DEF$ , de dos maneras diferentes y luego igualar las mismas para operar y despejar el radio  $\rho$ .

**(a) Valor de  $\rho$ , cuando  $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$**

Sabemos que el área de un triángulo es igual al semiproducto entre su base y su altura.

Luego, el  $\text{Área}_1$  del triángulo  $DEF$ , lo podemos expresar, primeramente, teniendo en cuenta su semiproducto:

$$\Delta_1(DEF) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(r_1 + r_2) \cdot (r - \rho)}{2} = \frac{r}{2} (r - \rho)$$

Entonces:

$$\Delta_1(DEF) = \frac{r}{2} (r - \rho)$$

Una segunda manera de hallar el área del triángulo  $DEF$  es utilizando la fórmula de Herón. Para ello, primero debemos hallar el perímetro del triángulo para trabajar con su semiperímetro, como lo requiere la fórmula mencionada.

**(i) Perímetro del triángulo  $DEF$ .**

$$\begin{aligned} \text{Perímetro del triángulo } DEF &= \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{DF} \\ &= \frac{r}{2} + \rho + \frac{r}{2} + \rho + r \\ &= 2\frac{r}{2} + 2\rho + r \\ &= 2r + 2\rho \end{aligned}$$

**(ii) Semiperímetro del triángulo  $DEF$ .**

$$s = r + \rho$$

**(iii) Fórmula de Herón.**

$$\text{Área}_2 \text{ del triángulo } DEF = \Delta_2(DEF) = \sqrt{s(s - \overline{DE})(s - \overline{EF})(s - \overline{DF})}$$

$$\Delta_2(DEF) = \sqrt{(r + \rho) \left( (r + \rho) - \left( \frac{r}{2} + \rho \right) \right) \left( (r + \rho) - \left( \frac{r}{2} + \rho \right) \right) (r + \rho - (r_1 + r_2))}$$

$$\Delta_2(DEF) = \sqrt{(r + \rho) \left( r + \rho - \frac{r}{2} - \rho \right) \left( r + \rho - \frac{r}{2} - \rho \right) (r + \rho - r)}$$

$$\Delta_2(DEF) = \sqrt{(r + \rho) \left( r - \frac{r}{2} \right) \left( r - \frac{r}{2} \right) \rho}$$

$$\Delta_2(DEF) = \sqrt{(r + \rho) \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \rho}$$

Sabiendo que las dos áreas, halladas, son del mismo triángulo, entonces es válida la siguiente igualdad:

$$\text{Área}_1 = \text{Área}_2$$

$$\Delta_1(DEF) = \Delta_2(DEF)$$

$$\frac{r}{2} (r - \rho) = \sqrt{(r + \rho) \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \rho}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$\left( \frac{r}{2} (r - \rho) \right)^2 = \left( \sqrt{(r + \rho) \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \rho} \right)^2$$

$$\left| \frac{r^2}{4} (r - \rho)^2 \right| = \left| (r + \rho) \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \rho \right|$$

Tomando los valores positivos, desarrollando el cuadrado y simplificando:

$$\frac{r^2}{4} (r - \rho)^2 = (r + \rho) \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \rho$$

$$r^2 - 2r\rho + \rho^2 = (r + \rho) \rho$$

$$r^2 - 2r\rho + \rho^2 = r\rho + \rho^2$$

$$r^2 - 2r\rho = r\rho$$

$$r^2 = r\rho + 2r\rho$$

$$r^2 = 3r\rho$$

$$\frac{r^2}{3r} = \rho \Rightarrow \rho = \frac{r}{3}$$

Llamaremos a este valor:  $\rho_2$ , (5.3)

Además, este es el máximo valor que alcanza  $\rho$ , como radio del círculo inscripto en el árbelos, cuando éste es tangente a los tres semicírculos de la configuración. Con los dos valores obtenidos de  $\rho$ , por último, hallaremos el radio del círculo trillizo de Bankoff, separadamente. Para ello, los identificaremos como  $\rho_1$  (5. 2) (c), y  $\rho_2$  (5. 3) (a), con sus respectivas expresiones algebraicas.

$$\rho_1 = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{r}{3}$$

#### 5. 4. Radio z del círculo trillizo de Bankoff.

El círculo cuyo radio, denominaremos  $z$ , es el círculo inscripto<sup>12</sup> en el triángulo  $DEF$ , cuando los radios de los semicírculos de diámetros  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$  de la configuración del árbelos, son distintos entre sí, es decir,  $r_1 \neq r_2$  y  $r_1 + r_2 = r$ .

Sabiendo, por propiedad, que el área del triángulo  $DEF$ , es igual al producto entre su semiperímetro, y el radio del círculo inscripto en él<sup>13</sup>, hallemos en primer lugar, el área del triángulo  $DEF$ .

Utilizando, nuevamente, la fórmula de Herón, hallaremos el perímetro y el semiperímetro del triángulo  $DEF$ .

##### (i) Perímetro del triángulo $DEF$ .

Sabemos que el perímetro del triángulo  $DEF$  es igual a la suma de sus lados, luego:

$$\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{DF} = r_1 + \rho + r_2 + \rho + r_1 + r_2 = 2r_1 + 2r_2 + 2\rho$$

##### (ii) Semiperímetro del triángulo $DEF$ .

Dividiendo miembro a miembro por dos, obtenemos el semiperímetro del triángulo  $DEF$ :

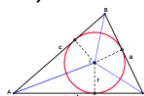
$$s = r_1 + r_2 + \rho$$

##### (iii) Fórmula de Herón.

Nos faltaría hallar el área de este triángulo para poder utilizar la propiedad mencionada.

<sup>12</sup> Llamamos circunferencia inscripta en un triángulo, a la circunferencia tangente a cada uno de los lados del triángulo.

<sup>13</sup> Fórmula del área en función del *inradio* (radio del círculo inscripto en una circunferencia): "El área de un triángulo es igual al producto resultante entre el semiperímetro y él".



Sea el triángulo  $ABC$  y el círculo inscripto de centro  $I$  y radio  $r$ . Designando con  $a$ ,  $b$  y  $c$ , a cada lado, luego, el semiperímetro es:  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ . Trazando los segmentos que unen cada vértice con el centro  $I$ , se obtienen tres triángulos  $AIB$ ,  $BIC$ ,  $AIC$ , cuyas áreas son:  $\Delta(AIC) = \frac{1}{2}b \cdot r$ ;  $\Delta(AIB) = \frac{1}{2}c \cdot r$ ;  $\Delta(BIC) = \frac{1}{2}a \cdot r$ . Sumando miembro a miembro, obtenemos:  $\Delta(AIC) + \Delta(AIB) + \Delta(BIC) = \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r \Rightarrow \Delta(ABC) = \frac{1}{2}r(a + b + c) \Rightarrow \Delta(ABC) = r \cdot s$

$$\text{Área de triángulo } DEF = \Delta (DEF) = \sqrt{s(s - \overline{DE})(s - \overline{EF})(s - \overline{DF})}$$

$$\Delta (DEF) = \sqrt{(r_1 + r_2 + \rho)((r_1 + r_2 + \rho) - (r_1 + \rho))((r_1 + r_2 + \rho) - (r_2 + \rho))((r_1 + r_2 + \rho) - (r_1 + r_2))}$$

$$\Delta (DEF) = \sqrt{(r_1 + r_2 + \rho)(r_1 + r_2 + \rho - r_1 - \rho)(r_1 + r_2 + \rho - r_2 - \rho)(r_1 + r_2 + \rho - r_1 + r_2)}$$

$$\Delta (DEF) = \sqrt{(r_1 + r_2 + \rho)r_1 r_2 \rho}$$

Sabiendo que: Área del triángulo  $DEF$  es igual al semiperímetro del triángulo  $DEF$ , multiplicado por el radio  $z$ :

$$\Delta (DEF) = s \cdot z$$

$$\sqrt{(r_1 + r_2 + \rho)r_1 r_2 \rho} = (r_1 + r_2 + \rho) z$$

$$(\sqrt{(r_1 + r_2 + \rho)r_1 r_2 \rho})^2 = ((r_1 + r_2 + \rho) z)^2$$

$$(r_1 + r_2 + \rho) r_1 r_2 \rho = (r_1 + r_2 + \rho)^2 z^2$$

Dividiendo miembro a miembro y simplificando:

$$z^2 = \frac{(r_1 + r_2 + \rho) r_1 r_2 \rho}{(r_1 + r_2 + \rho)^2}$$

$$z^2 = \frac{r_1 r_2 \rho}{r_1 + r_2 + \rho}$$

Sustituyendo por el valor de  $\rho_1$ , cuando  $r_1 \neq r_2$ , (5. 2) (c), podemos despejar  $z$ . Operando algebraicamente, simplificando, aplicando factor común, cuadrado de un binomio y raíz cuadrada, miembro a miembro:

$$z^2 = \frac{\frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot r_1 r_2}{r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}}$$

$$z^2 = \frac{\frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot r_1 r_2}{r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}}$$

$$z^2 = \frac{\frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot r_1 r_2}{\frac{r_1(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + r_2(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}}$$

$$z^2 = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2) r_1 r_2}{r_1(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + r_2(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$$

Factorizamos, utilizando factor común y binomio al cuadrado:

$$z^2 = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2) r_1 r_2}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) (r_1 + r_2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$$

$$z^2 = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2) r_1 r_2}{(r_1 + r_2) ((r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + r_1 r_2)}$$

$$z^2 = \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 + r_1 r_2)}$$

$$z^2 = \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2)}$$

$$z^2 = \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2}} \Rightarrow z = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

Recordando los valores hallados para los radios “x” e “y” de los círculos mellizos, (4. 1). (a) y (b), estamos en condiciones de afirmar que el radio, “z”, es el radio de un tercer círculo del árbelos, que posee el mismo radio que los anteriores.

Por lo tanto:

$$x = y = z = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (5. 4)$$

Pronto, Leon Bankoff, descubre el cuatrillizo. La familia de círculos de Arquímedes ha aumentado espectacularmente durante el siglo XX.

## 6. Un círculo especial: Particularidades del círculo trillizo.

### (6. 1) Cevianas particulares del círculo trillizo de Bankoff.

Es interesante mencionar algunas características, observadas, en este tercer círculo de igual radio, del árbelos:

- Las *cevianas*<sup>14</sup>, del círculo trillizo, que contienen a los *segmentos cevianos*, determinadas por los puntos de tangencia, del mismo círculo, con el triángulo *DEF*, son concurrentes y se cortan en un punto notable de dicho triángulo, denominado, *punto de Gergonne*.

---

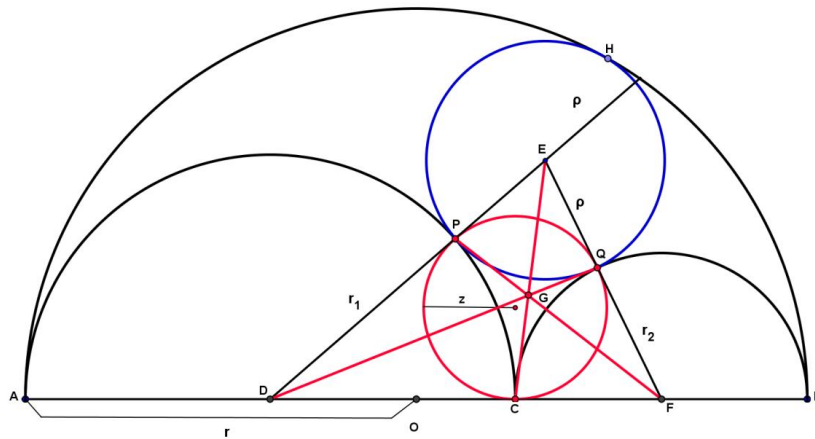
<sup>14</sup> Definición: Se denomina *ceviana* a la recta que contiene al *segmento ceviano*. Este segmento es el que une el vértice de un triángulo con cualquier punto del lado opuesto, distinto de los vértices.

- El centro, del círculo trillizo, es el punto de concurrencia de las bisectrices del triángulo  $DEF$ , por lo tanto, es otro de los puntos notables del mismo triángulo, llamado *Incentro*.
- Como el centro del círculo trillizo es el *incentro* del triángulo  $DEF$ , entonces, su radio recibe el nombre de *inradio*.

En las siguientes gráficas, se pueden apreciar estas características del círculo trillizo de Bankoff, es decir, la concurrencia de cevianas particulares en los puntos notables denominado de *Gergonne*, (figura 16), e *incentro*, (figura 17).

**(6. 1). (a) Cevianas que concurren en el punto notable de Gergonne.**

**Círculo trillizo, del árbelos, inscripto en el triángulo  $FED$ .**



**Figura 18.** Círculo trillizo: El punto notable de Gergonne: concurrencia de las cevianas que pasan por el punto de tangencia del círculo inscripto y el triángulo  $DEF$ .

Demostraremos la concurrencia de los tres segmentos cevianos  $\overline{DQ}$ ,  $\overline{EC}$  y  $\overline{FP}$ , del triángulo  $DEF$ , correspondiente a cada vértice del mismo y determinadas por los puntos de tangencias,  $C$ ,  $P$  y  $Q$  del círculo trillizo de Bankoff con el mismos triángulos.

Para esta demostración, utilizaremos el Teorema de Ceva<sup>15</sup>, probando que, si el producto ceviano, asociado con estas tres cevianas, es igual a uno, entonces las cevianas son concurrentes en el punto “G” de la gráfica de la figura 16.

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{EQ}}{\overline{QF}} = 1 \Rightarrow \overline{DQ}, \overline{EC}, \overline{FP} \text{ son concurrentes}$$

<sup>15</sup> Teorema de Ceva: Tres cevianas  $AY$ ,  $BZ$  y  $CX$ , una correspondiente a cada vértice de un triángulo  $ABC$ , son concurrentes, si y sólo si

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = 1$$

Supongamos, que los segmentos cevianos  $\overline{DQ}$ ,  $\overline{EC}$  y  $\overline{FP}$  son concurrentes en el punto G, como lo indica la figura 18.

Los segmentos  $DC$  y  $CF$ , son las bases del triángulo  $DGC$  y  $CGF$ , respectivamente, con la particularidad de tener, los dos, la misma altura. Entonces, podemos utilizar la propiedad demostrada en (5. 1). 1, sobre la proporcionalidad directa entre las áreas, de los triángulos de igual altura y sus bases.

Luego:

$$\frac{\Delta(DGC)}{\Delta(CGF)} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}}$$

$\overline{DC}$  y  $\overline{CF}$  son también bases de los triángulos  $DEC$  y  $CEF$  respectivamente, y ambos triángulos tienen la misma altura. Utilizando (5. 1). 1, obtenemos:

$$\frac{\Delta(DEC)}{\Delta(CEF)} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}}$$

Luego:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} = \frac{\Delta(DEC)}{\Delta(CEF)} = \frac{\Delta(DGC)}{\Delta(CGF)}$$

Como:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} = \frac{\Delta(DEC)}{\Delta(CEF)} = \frac{\Delta(DGC)}{\Delta(CGF)} = \lambda \Rightarrow \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} = \lambda \wedge \frac{\Delta(DEC)}{\Delta(CEF)} = \lambda \wedge \frac{\Delta(DGC)}{\Delta(CGF)} = \lambda$$

Siendo  $\lambda$ , la razón de proporcionalidad.

Luego, por propiedad de las proporciones<sup>16</sup>:

$$\Delta(DEC) = \lambda \Delta(CEF) \wedge \Delta(DGC) = \lambda \Delta(CGF)$$

$$\Rightarrow \Delta(DEC) - \Delta(DGC) = \lambda \Delta(CEF) - \lambda \Delta(CGF)$$

$$\Delta(DEC) - \Delta(DGC) = \lambda(\Delta(CEF) - \Delta(CGF))$$

$$\frac{\Delta(DEC) - \Delta(DGC)}{\Delta(CEF) - \Delta(CGF)} = \lambda$$

Luego, como  $\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} = \lambda$

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} = \frac{\Delta(DEC) - \Delta(DGC)}{\Delta(CEF) - \Delta(CGF)} = \frac{\Delta(DGE)}{\Delta(EGF)} \Rightarrow \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} = \frac{\Delta(DGE)}{\Delta(EGF)} \quad (a).1$$

<sup>16</sup> Propiedad de las proporciones:

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} &\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} = \lambda \Rightarrow p = \lambda q \wedge p' = \lambda q' \Rightarrow p - p' = \lambda(q - q') \Rightarrow \lambda = \frac{p - p'}{q - q'} \\ &\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{p - p'}{q - q'} \end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga, obtenemos:

$$\frac{\overline{FQ}}{\overline{QE}} = \frac{\Delta(DGF)}{\Delta(DGE)} \quad (a).2$$

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{PD}} = \frac{\Delta(EGF)}{\Delta(DGF)} \quad (a).3$$

Multiplicando miembro a miembro, (a). 1, (a). 2 y (a). 3:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FQ}}{\overline{QE}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{PD}} = \frac{\Delta(DGE)}{\Delta(EGF)} \cdot \frac{\Delta(DGF)}{\Delta(DGE)} \cdot \frac{\Delta(EGF)}{\Delta(DGF)} = 1$$

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FQ}}{\overline{QE}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{PD}} = 1$$

Que es lo que queríamos demostrado: “Las cevianas que determinan los puntos de tangencia del círculo trillizo, del árbelos, con el triángulo  $DEF$ , son concurrentes en el punto  $G$ . El punto notable del triángulo  $DEF$ , que cumple con esta condición, es denominado punto de *Gergonne*.”

**(6. 1). (b) Cevianas que concurren en el punto notable, *Incentro*: bisectrices.**

El centro del círculo trillizo, del árbelos, es el punto de concurrencia de las cevianas que contienen las bisectrices del triángulo  $DEF$ .

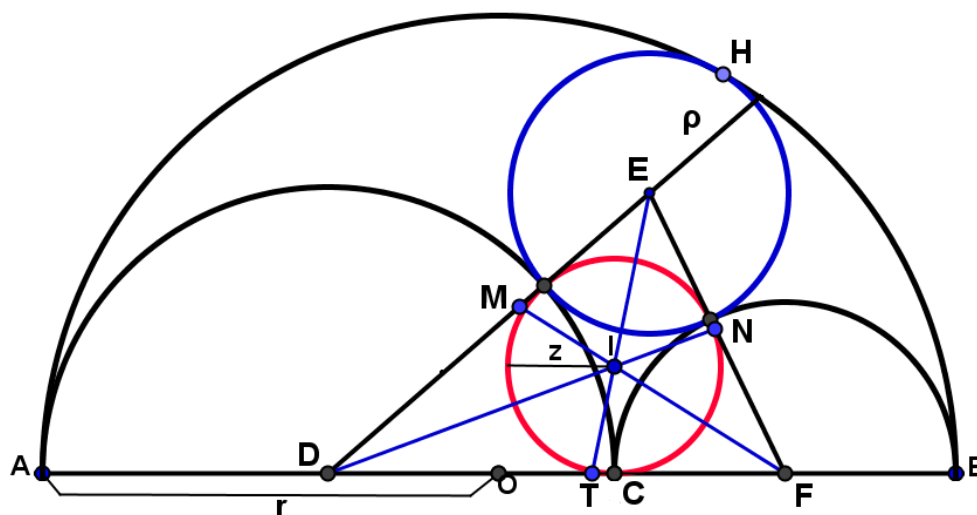


Figura 19. Círculo trillizo. El punto notable “*Incentro*”: concurrencia de las bisectrices del triángulo  $DEF$ .

Demostraremos, que:

(i) Los segmentos cevianos,  $\overline{DQ}$ ,  $\overline{EC}$  y  $\overline{FP}$  que contienen a las bisectrices del triángulo  $DEF$ , concurren en el punto  $I$ , de la figura 19.

(ii) El punto  $I$ , de concurrencia de las bisectrices del triángulo  $DEF$ , es el centro del círculo trillizo del ábelos.

Supongamos que el punto  $I$ , es el punto de concurrencia de las bisectrices del triángulo  $DEF$ , como se observa en la gráfica de la figura 19.

(i) Para demostrar la concurrencia de las bisectrices  $\overline{DQ}$ ,  $\overline{EC}$  y  $\overline{FP}$ , recurriremos, a un Teorema<sup>17</sup> que relaciona el Teorema de Ceva, con los ángulos de los triángulos que forman las cevianas. Por este teorema, sabemos que el producto ceviano es igual al producto angular ceviano<sup>18</sup>.

En nuestro caso, particular, las tres cevianas bisectrices,  $\overline{DQ}$ ,  $\overline{EC}$  y  $\overline{FP}$ , serán concurrentes, si el producto ceviano, asociado a las mismas, es igual al producto angular ceviano y, ambos, igual a 1.

En primer lugar, probaremos la primera igualdad:

$$\frac{\overline{DT}}{\overline{TF}} \cdot \frac{\overline{FN}}{\overline{NE}} \cdot \frac{\overline{EM}}{\overline{MD}} = \frac{\text{sen } \widehat{DET}}{\text{sen } \widehat{TEF}} \cdot \frac{\text{sen } \widehat{FDN}}{\text{sen } \widehat{NDE}} \cdot \frac{\text{sen } \widehat{EFM}}{\text{sen } \widehat{MFD}} = 1$$

Sea  $\overline{ET}$ , un segmento ceviano del triángulo  $DEF$ . (Ver figura 17).

Si aplicamos el teorema de los senos, en el triángulo  $DTE$ , obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\overline{DT}}{\text{sen } \widehat{DET}} = \frac{\overline{ET}}{\text{sen } \widehat{D}} \Rightarrow \overline{DT} = \frac{\text{sen } \widehat{DET}}{\text{sen } \widehat{D}} \cdot \overline{ET} \quad (b).1$$

Usamos el mismo análisis con el triángulo  $FTE$ , obtenemos:

$$\frac{\overline{TF}}{\text{sen } \widehat{TEF}} = \frac{\overline{ET}}{\text{sen } \widehat{F}} \Rightarrow \overline{TF} = \frac{\text{sen } \widehat{TEF}}{\text{sen } \widehat{F}} \cdot \overline{ET} \quad (b).2$$

Dividiendo miembro a miembro (b). 1 y (b). 2:

$$\frac{\overline{DT}}{\overline{TF}} = \frac{\frac{\text{sen } \widehat{DET}}{\text{sen } \widehat{D}} \cdot \overline{ET}}{\frac{\text{sen } \widehat{TEF}}{\text{sen } \widehat{F}} \cdot \overline{ET}} = \frac{\text{sen } \widehat{DET}}{\text{sen } \widehat{TEF}} \cdot \frac{\text{sen } \widehat{F}}{\text{sen } \widehat{D}}$$

$$\frac{\overline{DT}}{\overline{TF}} = \frac{\text{sen } \widehat{DET}}{\text{sen } \widehat{TEF}} \cdot \frac{\text{sen } \widehat{F}}{\text{sen } \widehat{D}} \quad (b).3$$

<sup>17</sup> Teorema: Sean  $AY$ ,  $BZ$  y  $CX$  cevianas en un triángulo  $ABC$ . Entonces el producto ceviano correspondiente es igual al producto angular ceviano:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{\text{sen } \widehat{ACX}}{\text{sen } \widehat{XCB}} \cdot \frac{\text{sen } \widehat{BAY}}{\text{sen } \widehat{YAC}} \cdot \frac{\text{sen } \widehat{CBZ}}{\text{sen } \widehat{ZBA}}$$

<sup>18</sup> El producto angular ceviano, es el producto que se obtiene al aplicar el teorema de los senos a los ángulos de los triángulos que se forman con cada una de las cevianas, asociadas a los mismos.

Procediendo de manera análoga, obtenemos las otras igualdades:

$$\frac{\overline{FN}}{\overline{NE}} = \frac{\widehat{\text{sen FDN}}}{\widehat{\text{sen NDE}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen E}}}{\widehat{\text{sen F}}} \quad (b).4$$

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{MD}} = \frac{\widehat{\text{sen EFM}}}{\widehat{\text{sen MFD}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen D}}}{\widehat{\text{sen E}}} \quad (b).5$$

Multiplicando miembro a miembro, (b). 3, (b). 4, (b). 5 y simplificando, obtenemos el producto ceviano igual al producto angular ceviano.

$$\frac{\overline{DT}}{\overline{TF}} \cdot \frac{\overline{FN}}{\overline{NE}} \cdot \frac{\overline{EM}}{\overline{MD}} = \frac{\widehat{\text{sen DET}}}{\widehat{\text{sen TEF}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen F}}}{\widehat{\text{sen D}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen FDN}}}{\widehat{\text{sen NDE}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen E}}}{\widehat{\text{sen F}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen EFM}}}{\widehat{\text{sen MFD}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen D}}}{\widehat{\text{sen E}}}$$

$$\frac{\overline{DT}}{\overline{TF}} \cdot \frac{\overline{FN}}{\overline{NE}} \cdot \frac{\overline{EM}}{\overline{MD}} = \frac{\widehat{\text{sen DET}}}{\widehat{\text{sen TEF}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen FDN}}}{\widehat{\text{sen NDE}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen EFM}}}{\widehat{\text{sen MFD}}}$$

De esta manera queda demostrada la primera igualdad.

Para probar que, las cevianas, que contienen a las bisectrices asociadas al triángulo DEF, son concurrentes en el punto I, debemos demostrar la segunda igualdad.

$$\frac{\widehat{\text{sen DET}}}{\widehat{\text{sen TEF}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen FDN}}}{\widehat{\text{sen NDE}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen EFM}}}{\widehat{\text{sen MFD}}} = 1$$

Tenemos las bisectrices  $\overline{DN}$ ,  $\overline{ET}$  y  $\overline{FM}$ .

Tenemos el producto angular ceviano:

$$\frac{\widehat{\text{sen DET}}}{\widehat{\text{sen TEF}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen FDN}}}{\widehat{\text{sen NDE}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen EFM}}}{\widehat{\text{sen MFD}}}$$

Si  $\overline{DN}$  es bisectriz del  $\widehat{D}$ , entonces:

$$\widehat{\text{F DN}} = \widehat{\text{N DE}} \Rightarrow \frac{\widehat{\text{sen FDN}}}{\widehat{\text{sen NDE}}} = 1$$

Si  $\overline{ET}$  es bisectriz del  $\widehat{E}$ , entonces:

$$\widehat{\text{D ET}} = \widehat{\text{T EF}} \Rightarrow \frac{\widehat{\text{sen DET}}}{\widehat{\text{sen TEF}}} = 1$$

Si  $\overline{FM}$  es bisectriz del  $\widehat{F}$ , entonces:

$$\widehat{\text{E FM}} = \widehat{\text{M FD}} \Rightarrow \frac{\widehat{\text{sen EFM}}}{\widehat{\text{sen MFD}}} = 1$$

Luego:

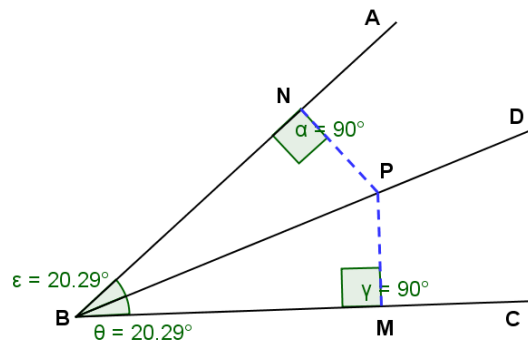
$$\frac{\widehat{\text{sen DET}}}{\widehat{\text{sen TEF}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen FDN}}}{\widehat{\text{sen NDE}}} \cdot \frac{\widehat{\text{sen EFM}}}{\widehat{\text{sen MFD}}} = 1$$

$\Rightarrow$  las bisectrices  $\overline{DN}$ ,  $\overline{ET}$ ,  $\overline{FM}$ , del triángulo  $DEF$ , son concurrentes

**(ii)** El punto  $I$ , de concurrencia de las bisectrices del triángulo  $DEF$ , llamado incentro, es el centro del círculo trillizo, del árbelos.

Para demostrar que el punto de concurrencia de las bisectrices es el centro del círculo mellizo, primero vamos a demostrar que:

**(6. 1). (c)** “La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de todos los puntos interiores equidistantes de sus lados”.



Sea  $BD$ , bisectriz de triángulo  $ABC$ .

Todo punto de la bisectriz  $BD$  equidistan de los lados  $BA$  y  $BC$ .

Sea  $P$  un punto cualquiera de la bisectriz  $BD$ , distinto de  $B$ .

Trazamos  $\overline{PM} \perp BC$  y  $\overline{PN} \perp BA$

Comparamos los triángulos rectángulos en  $M$  y en  $N$ , respectivamente:

Los triángulos  $PMB$  y  $PNB$  son iguales, por tener la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente iguales.

Si son iguales, tienen todos sus elementos respectivamente iguales, luego.

$$\overline{PM} = \overline{PN} \Rightarrow P \text{ equidista de } BA \text{ y } BC$$

Todo punto interior del triángulo  $ABC$ , equidistante de los lados  $BC$  y  $BA$ , pertenece a la bisectriz  $BD$ .

Sea  $P$  un punto interior del triángulo  $ABC$  equidistante de  $BC$  y  $BA$ , es decir:

$$\overline{PM} = \overline{PN}$$

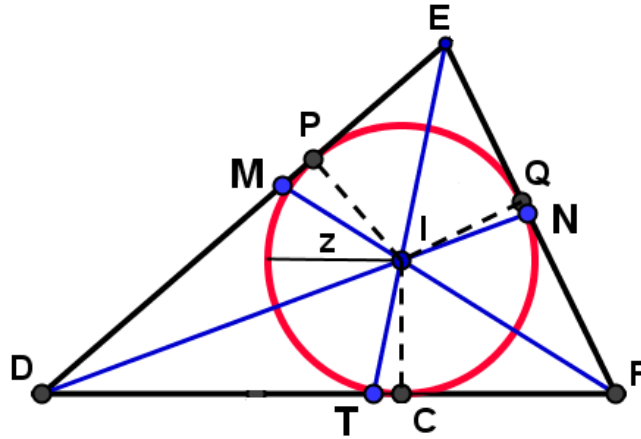
Comparando los triángulos rectángulos en  $M$  y  $N$ , respectivamente:

Los triángulos  $PMB$  y  $PNB$ , son iguales por tener la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales.

Si son iguales, tienen todos sus elementos iguales, luego:

$$\widehat{CBP} = \widehat{ABP} \Rightarrow BP \text{ es la bisectriz del } \widehat{ABC} \text{ y } P \text{ pertenece a ella.}$$

Ahora nos falta demostrar que: “El punto I, llamado *incentro*, es el centro de círculo trillizo del árbelos”.



**Figura 20.** Círculo trillizo del árbelos, y las bisectrices del triángulo DEF, concurrentes su centro, punto I.

Ya probamos que las bisectrices  $\overline{DN}$ ,  $\overline{ET}$ ,  $\overline{FM}$ , son concurrentes en un punto. Ese punto se denomina incentro.

Demostramos, también, que los puntos pertenecientes a las bisectrices, equidistan de los lados del triángulo.

Nos falta demostrar que el incentro del triángulo DEF, es decir el punto I de la gráfica, es el centro del círculo trillizo del árbelos, de radio “z”.

Sabemos que los puntos P, Q y C, son puntos de tangencia entre el triángulo DEF y el círculo de radio “z”.(5. 1). Entonces, podemos afirmar que:

$$IP \perp DE$$

$$IC \perp DF$$

$$IQ \perp EF$$

Comparando los triángulos DPI y DCI, sabemos que son iguales, por tener un lado en común, la hipotenusa, y dos ángulos con la misma amplitud:

$$\widehat{DPI} = \widehat{DCI} \quad \text{Por ser rectos.}$$

$$\widehat{PDI} = \widehat{CDI} \quad \text{Por ser } \overline{DN} \text{ bisectriz del } \widehat{EDF}$$

Por lo tanto,  $\overline{IP} = \overline{IC}$  Por ser un elemento homólogo.

$$\text{Luego: } I \in \overline{DN} \Rightarrow d(I, \overline{DE}) = d(I, \overline{DF}) \Rightarrow \overline{IP} = \overline{IC} \quad (6. 1). (c)$$

Como  $I$ , también pertenece a la bisectriz  $FM$ , y  $ET$ , procediendo de la misma manera:

$$I \in \overline{FM} \Rightarrow d(I, \overline{DF}) = d(I, \overline{EF}) \Rightarrow \overline{IC} = \overline{IQ}$$

$$I \in \overline{ET} \Rightarrow d(I, \overline{DE}) = d(I, \overline{EF}) \Rightarrow \overline{IP} = \overline{IQ}$$

Obtuvimos:

$$\overline{IP} = \overline{IC} \quad , \quad \overline{IC} = \overline{IQ} \quad , \quad \overline{IP} = \overline{IQ}$$

Entonces:

$$\overline{IP} = \overline{IC} = \overline{IQ} = z \Rightarrow I, \text{ es el centro del círculo trillizo.}$$

## 7. La familia de círculos de Arquímedes aumenta espectacularmente.

Leon Bankoff, también demostró la existencia del círculo cuatrillizo del árbelos.

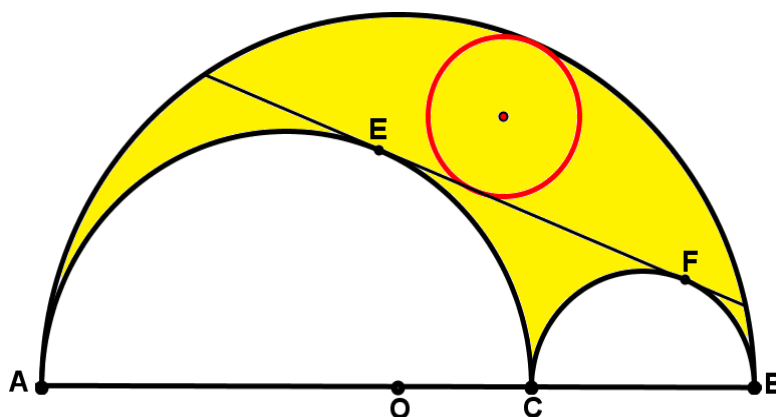


Figura 21. El círculo cuatrillizo de Bankoff: igual radio que los círculos de Arquímedes.

Para la demostración de la existencia del cuarto círculo de igual radio del árbelos, primero analizaremos una transformación del plano en sí mismo, conocida como "Inversión respecto de una circunferencia".

### 7. 1. Inversiones.

Comenzaremos por definir la inversión de un punto en el plano, es decir, cómo obtener la imagen de un punto dado, con respecto a una circunferencia, llamada "circunferencia de inversión" y luego veremos cómo transformar figuras más generales.

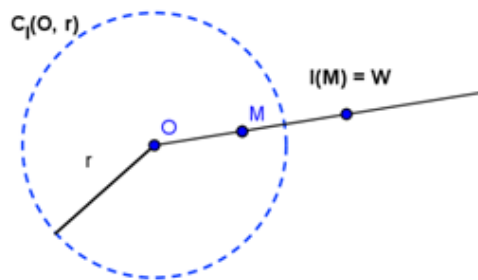
Como, básicamente, trabajaremos con circunferencias, es convenientes mencionar:

- Los puntos son considerados circunferencias de radio nulo.
- Las rectas son, eventualmente, consideradas como casos límite de circunferencias, más precisamente, como circunferencias de radio infinito.

## 7. 2. Inversión de un punto.

La inversión de un punto  $M$ , con respecto a una circunferencia dada en el plano, es el punto  $W$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

- Los puntos  $M$  y  $W$ , están alineados sobre la misma recta que pasa por el centro de la circunferencia de inversión.
- El producto de las distancias de  $M$  y  $W$ , desde el centro de la circunferencia, es igual al cuadrado del radio de la misma circunferencia.



Sea  $C_I = C(O, r)$  la circunferencia de inversión, cuyo centro es  $O$  y cuyo radio es  $r$ .  
Sea, además,  $M \neq O$ .

Notaremos con  $I(M)$  a la inversión  $I$ , del punto  $M$ .

Llamaremos  $W$  al punto inversión, del punto  $M$ , entonces  $I(M) = W$ .

$I(M) = W$  es un punto, tal que:

- Los segmentos  $OM$  y  $OI(M)$ , son paralelos coincidentes y de igual sentido.
- Las longitudes satisfacen la relación:

$$(\overline{OW}) \cdot (\overline{OM}) = r^2$$

**Demostración gráfica y analítica:**

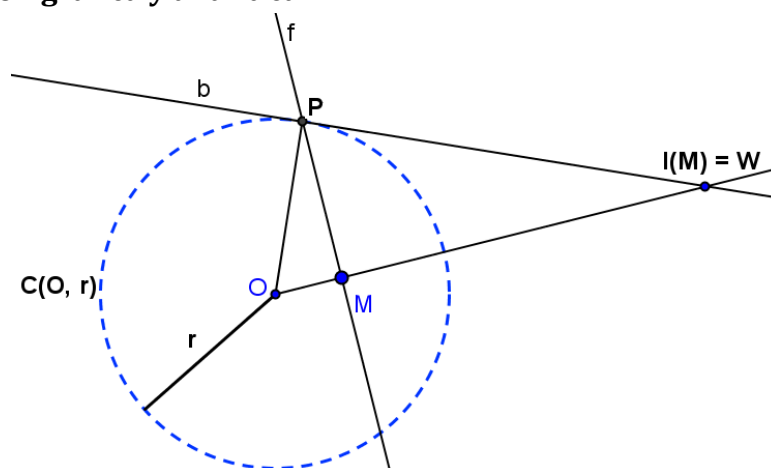


Figura 22. Inversión de un punto gráficamente.

Trazamos la recta  $b$ , tangente a la circunferencia de inversión de centro  $O$  y radio  $r$ , desde el punto de inversión de  $M$ , es decir,  $I(M) = W$ .

Obtenemos el punto de tangencia  $P$  y el triángulo rectángulo  $OPI(M)$ . Tracemos, por el punto de tangencia  $P$ , la recta  $f$ , perpendicular a la recta  $OW$ , que pase por el punto  $M$ .

Obtenemos el triángulo  $OMP$ , rectángulo en  $P$ .

De ahora en adelante, llamaremos  $W$  al punto de inversión  $I(M)$ .

Sabemos que los triángulos  $OPW$  y  $OMP$  son rectángulos.

$\widehat{OPW} = \frac{\pi}{2}$  Porque toda tangente a una circunferencia, en uno de sus puntos, es perpendicular al radio que corresponde a ese punto.

$\widehat{OMP} = \frac{\pi}{2}$  Por definición de la recta  $f \perp OW$ .

$\overline{OP}$  es un lado en común.

$\widehat{POM} = \widehat{POW}$  Porque los puntos  $M$  y  $W$  son puntos alineados.

Luego, los triángulos  $OPW$  y  $OMP$  son semejantes y sus lados homólogos proporcionales. Por lo tanto:

$$\frac{\overline{OW}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} \Rightarrow (\overline{OW}) \cdot (\overline{OM}) = (\overline{OP})^2$$

Como el segmento  $OP$  es el radio de la circunferencia de inversión, substituyendo, obtenemos lo que queríamos demostrar:

$$(\overline{OW}) \cdot (\overline{OM}) = r^2 \quad (7.2)$$

Teniendo en cuenta la definición de "inversión de un punto", podemos deducir las siguientes observaciones:

- 1) Si el punto  $M$ , es interior a la circunferencia de inversión, entonces  $I(M)$  es un punto exterior de la misma.
- 2) Análogamente, si el punto  $M$  es exterior, entonces  $I(M)$  es un punto interior de la circunferencia de inversión.
- 3) Si  $M$  está en la circunferencia de inversión, entonces, el punto  $I(M)$  está en la circunferencia de inversión. Más aun, si  $M$  está en la circunferencia de inversión, entonces  $I(M)=M$ .

### 7. 3. Inversión de un conjunto de puntos.

Analizaremos, ahora, cómo se transforman algunos conjuntos de puntos. Básicamente, la intención es dar la transformación de una recta y de una circunferencia.

#### 1. Inversión de una recta.

De acuerdo a las observaciones realizadas con respecto a la inversión de un punto interior o exterior a la circunferencia de transformación, podemos concluir que los conjuntos de puntos que estén incluidos en una semirrecta que pase por el centro de la circunferencia de inversión, se transforman en sí mismas.

Esto significa: *lo que queda fijo, es el conjunto, los puntos no tienen por qué quedar fijos.*

De hecho, a partir de la observación (7.2). 3), sabemos que los únicos puntos que quedan fijos, son los que están sobre la circunferencia de inversión.

Luego, la inversión de una recta que pasa por el centro de una circunferencia de transformación, es ella misma.

*Si  $b$  es una recta tal que el centro de inversión  $C \in b \Rightarrow I(b) = b$  (7.3) 1*

Sea:

$b$  una recta.

$C \in b$

$C_I = C(C, r)$ , la circunferencia de inversión, de centro  $C$  y radio  $r$

Luego:

$C \in b \wedge C \in C(C, r)$

Sabiendo que los puntos de la recta  $b$ , son puntos alineados, al unir cualquiera de ellos con el centro  $C$  de la circunferencia de transformación, se obtiene una semirecta incluida en la misma recta  $b$ , por ser  $C \in b$ , por hipótesis.

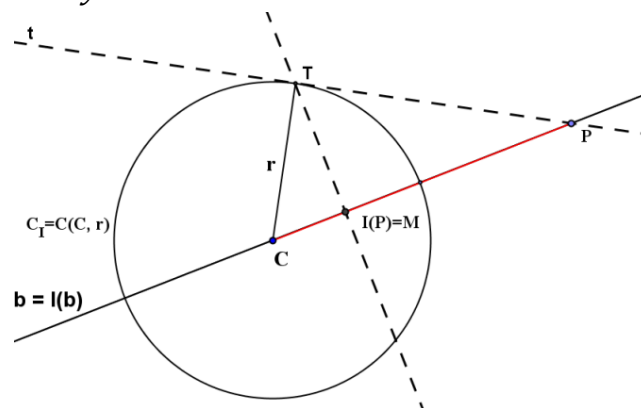
Supongamos que  $P$  representa un punto genérico, perteneciente a nuestra recta  $b$ . Este punto  $P$ , cumple las siguientes condiciones:

$$P \neq C$$

$P \notin C_I(C, r)$  de inversión.

Como:

$P \in b \wedge C \in b \Rightarrow P$  y  $C$  están alineados  $\Rightarrow \overline{CP}$  está incluido en la recta  $b$ .



**Figura 23.** Inversión del punto  $P$ , con respecto a la circunferencia de inversión,  $C_I$ .

Supongamos que  $M$  al punto de inversión de  $P$ , entonces  $I(P) = M$ .

Sabiendo que los triángulos rectángulos  $CMT$  y  $CTP$ , son semejantes, entonces:

$$\frac{\overline{CM}}{r} = \frac{r}{\overline{CP}} \Rightarrow \overline{CM} \cdot \overline{CP} = r^2$$

Luego, por (7.2),  $I(P)$ , es el punto de inversión de  $P$ .

Como el punto de inversión de  $P$ , llamado  $I(P)$ , pertenece por definición de inversión de un punto, a la misma semirrecta  $CP$  que une, el punto a invertir, con el centro de la circunferencia de transformación; entonces, podemos afirmar que  $I(P)$  también pertenece a la recta  $b$ .

$$I(P) \in \overline{CP} \wedge \overline{CP} \in b \Rightarrow I(P) \in b$$

De esta manera, queda probado que la inversión de cualquier punto perteneciente a la recta  $b$ , distinto del punto  $C$ , también pertenece a la recta  $b$ . Luego:

$$I(b) = b$$

Que es lo que queríamos demostrar.

### (7.3) 2. Inversión de una recta que no pasa por el centro de inversión.

- (i) Recta secante a la circunferencia de inversión.
- (ii) Recta exterior a la circunferencia de inversión.
- (iii) Recta tangente a la circunferencia de inversión.

(i) Analizaremos, en primer lugar, la inversión de una recta que no pasa por el centro de la circunferencia de inversión y que es secante a la misma. Esta inversión, transforma la recta en una circunferencia, como se ve en la figura 24.

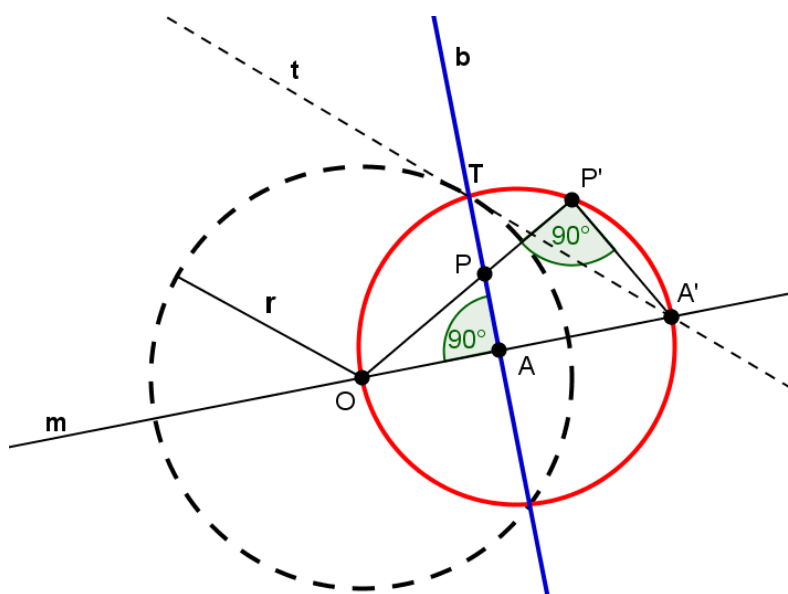


Figura 24. Transformación de una recta, en circunferencia.

Sean,  $O$ , el centro de la circunferencia de inversión y  $b$ , una recta cualquiera, secante a la circunferencia de transformación.

Luego, la circunferencia de diámetro  $OA'$  es la transformación, por inversión, de la recta  $b$ , sí y solo si, el centro de inversión no pertenece a la recta  $b$ .

$$I(b) = C_{(OA')} \Leftrightarrow O \notin b$$

Demostraremos primero que, el hecho de que el centro de inversión no pertenezca a la recta, es condición suficiente para la transformación de una recta en circunferencia.

$$O \notin b \Rightarrow I(b) = C_{(OA')}$$

Supongamos, entonces, que tenemos el punto  $O \notin b$ , como en la figura 24.

Tracemos la recta  $m$ , perpendicular a la recta  $b$ , que pase por el centro,  $O$ , de inversión. Obtenemos el punto  $A = m \perp b$ .

Sabemos que  $A \neq O$  porque  $O \notin b$  por hipótesis.

Hallamos el punto inverso de  $A$ , que llamaremos  $A'$ .

Luego, por definición de inversión de un punto, (7. 2), sabemos que se cumple:

$$\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = r^2$$

Elegimos un punto arbitrario,  $P$ , perteneciente a la recta  $b$ , y hallamos su inverso con respecto a la circunferencia de inversión de centro  $O$ .

Luego, por definición de inversión de un punto, (7. 2), sabemos que, también se cumple:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

Por relación de igualdad y propiedad fundamental de las proporciones:

$$\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} \Rightarrow \frac{\overline{OA'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OA}}$$

Esta proporción, permite verificar que dos pares de lados de los triángulos  $OAP$  y  $OP'A'$  son respectivamente proporcionales.

Los ángulos  $P'OA'$  y  $POA$ , comprendidos entre los lados proporcionales, son ángulos iguales, por ser un ángulo en común. Luego, por semejanza de triángulos<sup>19</sup>, se puede afirmar que los siguientes triángulos son semejantes.

$$P'OA' \sim POA$$

De ello se deduce que el ángulo  $OP'A'$ , homólogo del ángulo  $OAP$ , es un ángulo recto y el triángulo  $OP'A'$ , rectángulo.

Si el triángulo  $OP'A'$  es rectángulo, entonces, los puntos  $O$ ,  $P'$  y  $A'$  determinan una semicircunferencia, cuyo diámetro es la hipotenusa del mismo, determinada por el segmento  $\overline{OA'}$ .

Luego, la circunferencia de diámetro  $OA'$ , es la transformación de la recta  $b$ , que es lo que queríamos demostrar:

$$I(b) = C_{(OA')}$$

---

<sup>19</sup> Teorema de semejanza de triángulos: "Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido igual, son semejantes".

Demostremos, ahora, la condición necesaria para la transformación de una recta en una circunferencia.

$$I(b) = C_{(OA')} \Rightarrow O \notin b$$

Supongamos que tenemos la inversión de la recta  $b$ , en una circunferencia de diámetro  $OA'$ , con respecto al centro  $O$  de inversión.

Tomemos un punto arbitrario,  $P'$ , sobre la circunferencia de inversión. El ángulo  $P'$ , está inscripto en dicha circunferencia, entonces, sus lados pasan por los extremos del diámetro de la circunferencia,  $O$  y  $A'$ , determinando el triángulo rectángulo  $OP'A'$ . Sabemos que es un triángulo rectángulo, por definición de ángulo inscripto en una circunferencia.

Sabemos, por hipótesis, que el inverso del punto  $A \in b$ , es  $A'$ , y el inverso del punto  $P \in b$  es  $P'$ . estos puntos forman, con el centro de inversión, el  $P'OA'$ .

Por hipótesis, sabemos que la recta  $b$ , que pasa por los puntos  $A$  y  $P$ , es perpendicular al diámetro  $OA'$  porque contiene al segmento  $AT$ , perpendicular al diámetro  $OA'$ , por definición de inversión, (ver figura 24). Esta recta es la recta cuya inversión es igual a la circunferencia de diámetro  $OA'$ .

Si tenemos en cuenta otra recta, la que contiene al segmento  $A'P'$ , podemos observar que forma el  $\widehat{OP'A'} = \frac{\pi}{2}$ , con uno de los lados del ángulo  $A'OP'$ . De la misma manera, la recta  $b$  determina el  $\widehat{OAP} = \frac{\pi}{2}$ , con el otro lado del mismo ángulo. Por la propiedad que dice: *Dos rectas trazadas entre los lados de un ángulo son antiparalelas cuando la primera, forma con uno de los lados, un ángulo igual al que forma la segunda, con el otro lado*, podemos concluir que las recta  $b$  y  $A'P'$  son antiparalelas. (Ver figura 25).

Entonces sabemos que la recta  $b$  está trazada entre los lados del ángulo que tiene como vértice al punto  $O$ , por lo tanto  $O \notin b$ .

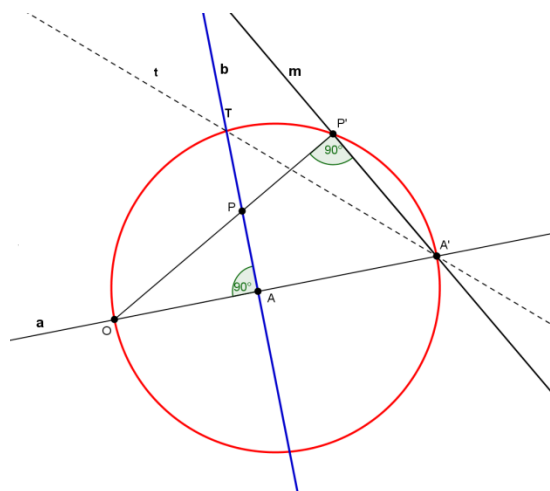
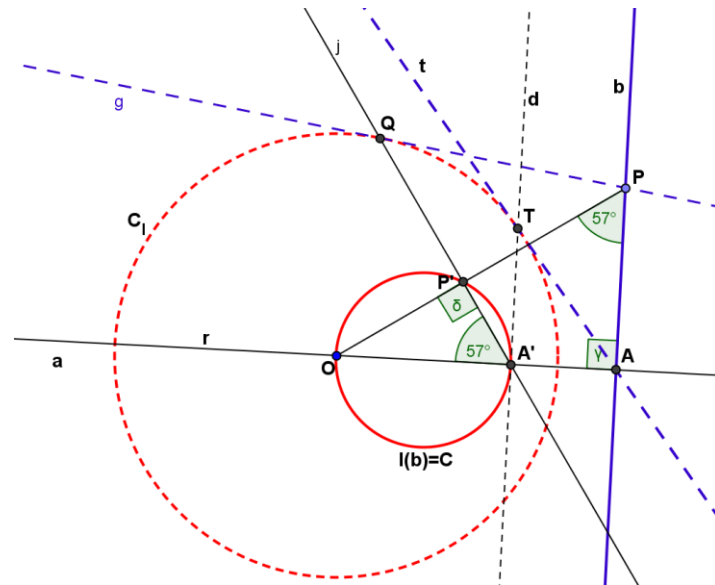


Figura 25. Las recta antiparalelas,  $b$  y  $m$ .

**(ii); (iii).** La inversión de una recta exterior o tangente a la circunferencia de inversión, se demuestra de forma análoga. Los razonamientos son idénticos al caso, tratado, cuando la recta es secante.

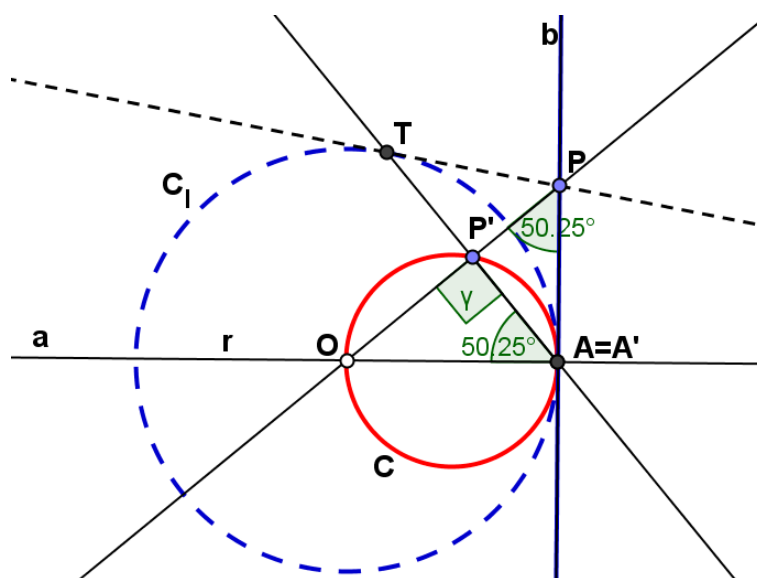
En la siguiente figura se puede observar gráficamente la transformación de una recta cualquiera  $b$ , en una circunferencia de diámetro  $OA'$ , interior a la circunferencia de inversión de centro  $O$ .



**Figura 26.** Transformación de una recta exterior a la circunferencia de inversión.

A modo de resumen, podemos decir que *la inversa de cualquier recta  $b$ , que no pase por el centro  $O$ , de inversión, es una circunferencia que sí pasa por  $O$  (menos el mismo punto  $O$ ), y que el diámetro de esta circunferencia que pasa por  $O$ , es perpendicular a la recta  $b$ .*

La gráfica siguiente, completa las posibilidades de transformación de una recta.



**Figura 27.** Inversa de una recta tangente a la circunferencia de inversión.

**(7.3) 3. Inversión de una circunferencia.**

- (i) Circunferencia secante a la circunferencia de inversión.**
- (ii) Circunferencia interior a la circunferencia de inversión.**
- (iii) Circunferencia tangente a la circunferencia de inversión.**

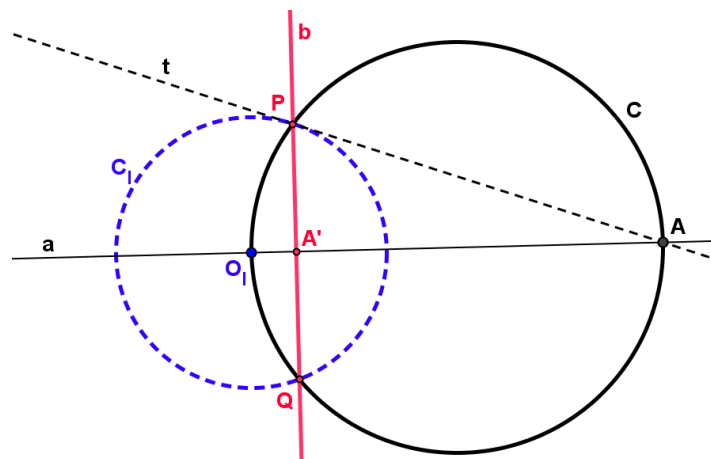
**(i)** Analizaremos, en primer lugar, la transformación de una circunferencia,  $C$ , que pasa por el centro de la circunferencia de inversión y es secante a la misma. Esta inversión, transforma la circunferencia, en una recta que pasa por los puntos de intersección de las dos circunferencias.

Sean,  $O$ , el centro de la circunferencia de inversión y  $C$ , una Circunferencia cualquiera, secante a la circunferencia de transformación  $C_I$ .

Luego, la recta  $b$  es la transformación, por inversión, de la circunferencia  $C$ , sí y solo si, el centro de inversión pertenece a la circunferencia  $C$ . Simbólicamente:

$$I(C) = b \Leftrightarrow O_I \in C$$

Demostraremos primero que, el hecho de que el centro de inversión  $O_I$ , pertenezca a la circunferencia  $C$ , es condición suficiente para la transformación de una circunferencia en una recta.



**Figura 28.** Transformación de una circunferencia que pasa por el centro de inversión

Demostraremos:

$$O_I \in C \Rightarrow I(C) = b$$

Por hipótesis, tenemos que el punto  $O_I \in C$ , como se puede ver en la figura 28.

Tracemos la recta  $a$ , que contenga a un diámetro de la circunferencia  $C$  y que pase por el centro  $O_I$ , de la circunferencia de inversión. Obtenemos el diámetro  $O_I A$ , por lo tanto, sabemos que  $A \neq O_I$ .

Si trazamos la recta  $t$ , que pase por el punto  $A$  y sea tangente a la circunferencia de inversión, obtenemos el punto  $P = t \cap C_I$ . Como los únicos puntos que se invierten en sí mismos son los que pertenecen a una circunferencia de inversión. (7.2) 3), entonces, el inverso de  $P$  es el mismo punto  $P$ :  $I(P) = P$ .

Por el punto de tangencia  $P$ , tracemos una recta perpendicular a la recta,  $a$ , que contiene al diámetro  $O_I A$ . La intersección de estas dos recta es el punto  $A'$ .

Como los triángulos  $O_I P A$  y  $O_I A' P$ , son semejantes, por tener:

- El  $\widehat{O_I P A} = \frac{\pi}{2}$  por ser ángulo semiinscrita en la circunferencia  $C_I$ .
- El  $\widehat{O_I A' P} = \frac{\pi}{2}$  por ser un ángulo entre rectas perpendiculares:  $a \perp AP$ .
- El lado  $OP$ , es un lado en común.

Luego, sus lados homólogos son proporcionales, verificándose:

$$\frac{O_I A'}{O_I P} = \frac{O_I P}{O_I A} \Rightarrow O_I A' \cdot O_I A = O_I P^2$$

Por definición de inversión (7. 2), sabemos que se cumple:  $I(A) = A'$ . (1)

Elegimos un punto genérico y arbitrario,  $B$ , perteneciente a la circunferencia  $C$  y unimos  $B$  con  $O_I$ .

Tracemos, desde el punto  $B$ , la recta  $m$ , tangente a la circunferencia de inversión de centro  $O_I$ , obteniendo el punto de tangencia  $M$ .

Por este punto  $M$ , tracemos una recta perpendicular a la recta que contiene a la cuerda  $BO_I$  de la circunferencia  $C$ . La intersección de estas dos recta es el punto  $B'$ .

Como los triángulos  $OB'M$  y  $OMB$ , son semejantes, por tener:

- El  $\widehat{O_I M B} = \frac{\pi}{2}$  por ser ángulo semiinscrita en la circunferencia  $C_I$ .
- El  $\widehat{O_I B' M} = \frac{\pi}{2}$  por ser un ángulo entre rectas perpendiculares:  $m \perp BO_I$ .
- El lado  $OM$ , es un lado en común.

Luego, sus lados homólogos son proporcionales, verificándose:

$$\frac{O_I B'}{O_I M} = \frac{O_I M}{O_I B} \Rightarrow O_I B' \cdot O_I B = O_I M^2$$

Por definición de inversión de un punto (7. 2), sabemos que se cumple:  $I(B) = B'$ .

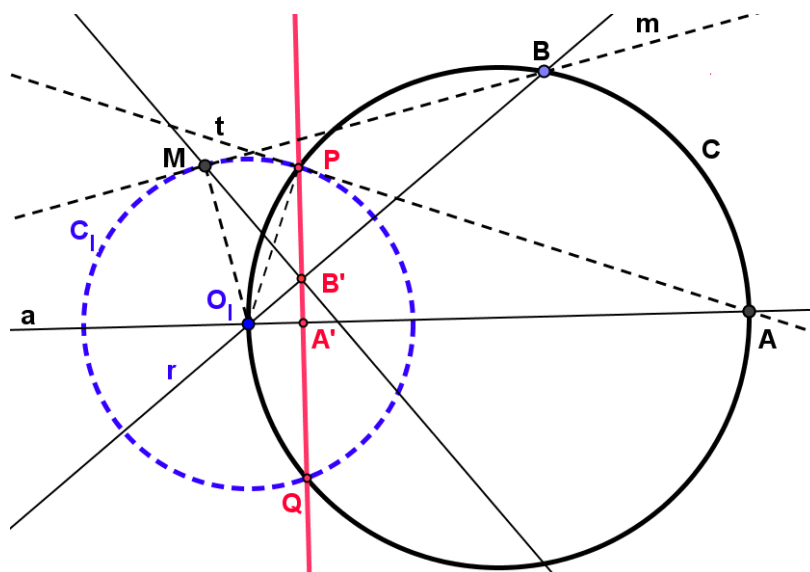


Figura 29. Pasos para la inversión de la circunferencia  $C$ , que pasa por el centro de inversión.

Si unimos los puntos  $A'$  y  $B'$ , inversos de  $A$  y  $B$ , respectivamente, obtenemos la recta  $A'B'$ . (Ver figura 29).

Sabemos, por construcción, que:  $PA' \perp O_I A$  en el punto  $A'$ .

Si demostramos que la recta  $A'B'$  es perpendicular a la recta  $O_I A$ , en el punto  $A'$ , entonces demostraremos que  $B'$  pertenece a la recta  $PA'$ . Simbólicamente:

$$\text{Si } A'P \perp O_I A \text{ en } A' \wedge A'B' \perp O_I A \text{ en } A' \Rightarrow B' \in A'P$$

Para demostrar que la recta  $A'B'$  es perpendicular a la recta  $O_I A$ , recordaremos que, dos rectas son perpendiculares, cuando su intersección forma ángulos adyacentes iguales, es decir, ángulos iguales a  $1 \text{ R}$ .

Los ángulos,  $O_I A'B'$  y  $AA'B'$ , son adyacentes por tener un lado en común y los otros dos son semirrectas opuestas.

Si tenemos en cuenta el otro punto de tangencia  $Q$ , formado por el cono de tangencia desde el punto  $A$ , a la circunferencia de inversión, podemos afirmar que la recta  $QA'$  es perpendicular a la recta  $O_I A'$  en el punto  $A'$ , porque  $A'$  es el inverso de  $A$ , (1). Luego, su intersección forma ángulos iguales a un recto. Por lo tanto:

$$\widehat{O_I A'Q} = \frac{\pi}{2}.$$

Como los ángulos,  $O_I A'Q$  y  $O_I A'B'$  tienen un lado  $O_I A'$ , en común y los lados  $A'Q$  y  $A'B'$ , son semirrectas opuestas, entonces, son adyacentes. Si  $\widehat{O_I A'Q} = \frac{\pi}{2}$ , entonces, su suplemento es un recto, por lo tanto  $\widehat{O_I A'B'} = \frac{\pi}{2}$ . Luego, la recta  $A'B'$  es perpendicular a la recta  $O_I A$ .

Puesto que, el  $\widehat{O_I A'P} = \frac{\pi}{2}$  por ser  $A'P \perp O_I A$  en  $A'$  por construcción, entonces  $B' \in A'P$ .

Si llamamos  $b$  a la recta  $A'B'$ , podemos concluir que  $b$  es la recta de inversión de la circunferencia  $C$ . Es decir:

$$I(C) = b$$

Demostremos, ahora, la condición necesaria para la transformación de una recta en una circunferencia.

$$I(C) = b \Rightarrow O_I \in C$$

Por hipótesis, tenemos la inversión de la circunferencia  $C$ , en una recta  $b$  que contiene a los puntos  $A'$  y  $B'$ , inversos de los puntos  $A$  y  $B$ , pertenecientes a la circunferencia  $C$ . Sea  $C_I$ , la circunferencia de inversión de centro  $O_I$  y radio  $r$ . Entonces, por definición de inversión de un punto, (7. 2), podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} O_I A' \cdot O_I A &= O_I P^2 = r^2 \\ O_I B' \cdot O_I B &= O_I M^2 = r^2 \end{aligned}$$

Sabiendo que:

$$O_I P^2 = O_I M^2 = r^2 \Rightarrow O_I \text{ es el centro de inversión.}$$

Como  $\overline{O_I A}$  y  $\overline{O_I B}$ , son dos cuerdas de la circunferencia  $C$ , entonces  $O_I$  es un punto de la circunferencia  $C$ . Luego:

$$O_I \in C$$

**(ii); (iii).** La inversión de una circunferencia interior o tangente a la circunferencia de inversión, se demuestra de forma análoga. Los razonamientos son idénticos al caso, tratado en (i), cuando las circunferencias son secantes. Ver figuras 26 y 27.

#### 7.4 Circunferencias ortogonales.

Dos circunferencias se llaman *ortogonales* cuando se cortan en ángulo recto, es decir, cuando sus tangentes, son perpendiculares en el punto de intersección.

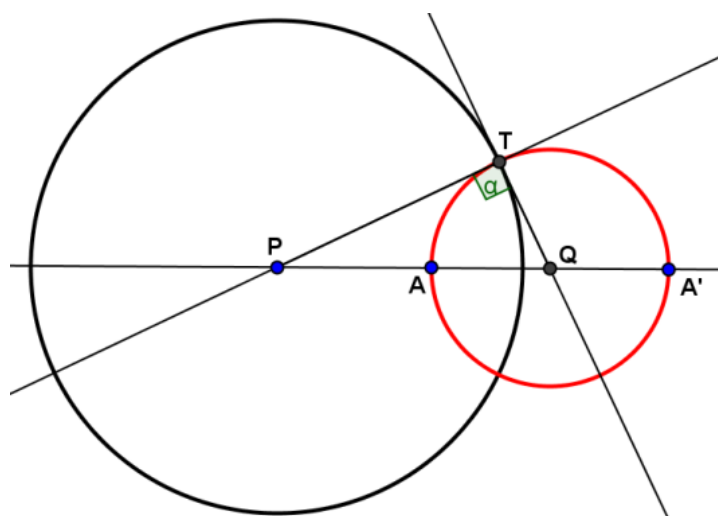


Figura 30. Circunferencias ortogonales. Agregar nombres de los radios

En el caso de dos circunferencias ortogonales con centros  $P$  y  $Q$ , como en la figura 30, la recta tangente por  $T$ , a la circunferencia de centro  $P$ , pasa por  $Q$ . Sabiendo que toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, en el punto de tangencia, entonces el triángulo  $PQT$ , es un triángulo rectángulo.

Luego, aplicando el teorema de Pitágoras, al triángulo  $PQT$ , se cumple:

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

Si  $QT = R$  y  $PT = r$ , son los radios de las circunferencias de centro  $P$  y centro  $Q$ , respectivamente, y si llamamos  $d$  a la distancia entre las dos circunferencias, la condición de ortogonalidad, equivale a:

$$d^2 = r^2 + R^2 \quad (7.4)$$

Es decir, si dos circunferencias son ortogonales, el cuadrado de la distancia entre las mismas, es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.

##### (7.4) 1. Ortogonalidad e inversión.

##### **Inversión de una circunferencia ortogonal a la de transformación.**

Sea  $C$  una circunferencia y sea  $C_I$  la circunferencia de inversión. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a)  $C$  y  $C_I$  son ortogonales.

(b)  $C$  queda fija por la inversión, es decir,  $I(C) = C$ .

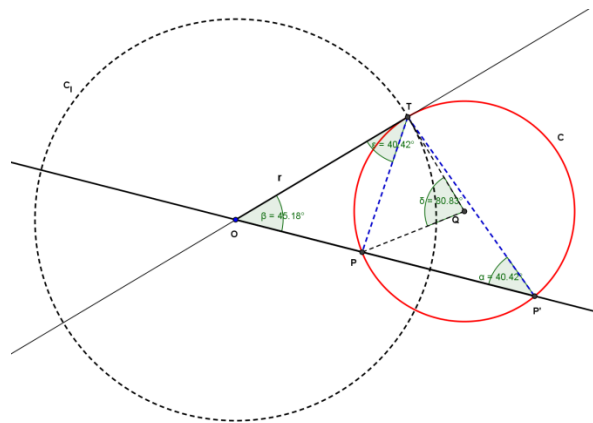
**(a)** Sean las circunferencias  $C$ , de centro  $Q$  y  $C_I$ , de centro  $O$ . La recta  $QT$ , tangente a la circunferencia  $C_I$  en el punto  $T$ , y la recta  $OT$ , tangente a la circunferencia  $C$  en el punto  $T$ . Como la recta  $QT$ , contiene al radio de la circunferencia  $C$ , y la recta  $OT$ , contiene al radio de la circunferencia  $C_I$ , luego, por el Teorema: "Toda tangente a una circunferencia, en uno de sus puntos, es perpendicular al radio que corresponde a ese punto", sabemos que:

$$OT \perp QT \Rightarrow C \text{ y } C_I \text{ son ortogonales.}$$

**(b)** Dadas las circunferencias  $C$  de centro  $Q$  y  $C_I$  de centro  $O$ , probaremos que  $C$  queda fija por la inversión. Esto significa que se transforma en sí misma. Resaltemos lo que quiere decir esto, *lo que queda fijo es el conjunto. Un punto, sólo queda fijo, cuando está sobre una circunferencia de inversión.*

$$C \text{ y } C_I \text{ son ortogonales} \Leftrightarrow I(C) = C$$

Tomemos un punto arbitrario y genérico,  $P$ , perteneciente a la circunferencia  $C$ . Tracemos la recta  $OP$ , secante a  $C$ , que determina el punto  $P'$ , como la intersección con la circunferencia  $C$ .



**Figura 31.** Circunferencia  $C$ , fija por inversión.

Si trazamos la tangente a la circunferencia  $C$ , desde el punto  $O$ , obtenemos el punto de tangencia, que llamaremos  $T$ .

Los triángulos  $OTP$  y  $OTP'$ , son semejantes, porque tienen:

- El  $\hat{O}$  es un ángulo en común.
- $\widehat{OP'T} = \widehat{OTP}$  Por tener, ambos, el mismo ángulo central, de arco  $TP$ .
- Por consiguiente,  $\widehat{OPT} = \widehat{OTP'}$

Luego, los lados homólogos (que se oponen a ángulos iguales), son proporcionales:

$$\frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP'} \Rightarrow OP \cdot OP' = OT^2$$

$$\text{Como, } OT = r \Rightarrow OP \cdot OP' = r^2$$

Entonces, por definición de *inversión de un punto*,  $P'$  es el punto inverso de  $P$ , respecto de la inversión definida por la circunferencia  $C_I$ .

Como  $P$  es un punto genérico, entonces, podemos concluir que los puntos de la circunferencia  $C$  se invierten en la misma circunferencia  $C$ . Luego:

$$I(C) = C$$

Recíprocamente, si una circunferencia  $C$ , de centro  $Q$ , y radio  $R$ , contiene a un punto, genérico,  $P$  y a su inverso  $P'$ , respecto de la circunferencia  $C_I$ , de centro  $O$  y radio  $r$ , tendremos, por definición de inversión de un punto, que:

$$r^2 = OP \cdot OP' \quad (1)$$

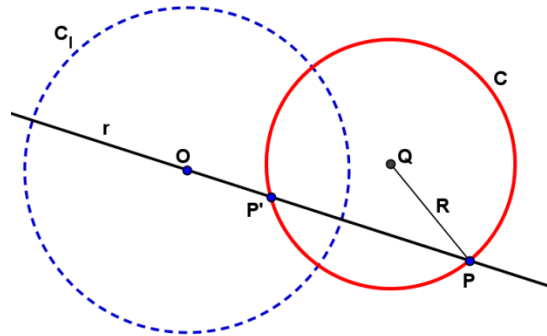


Figura 32. Inversión del punto  $P \in C$ .

Por otra parte, si trazamos una recta tangente a la circunferencia de inversión que pase por  $P$ , obtenemos el punto  $T$ .

Si unimos el punto  $T$  con el centro  $O$  de la circunferencia  $C_I$ , obtenemos el ángulo  $OTP$ , ángulo periférico o seminscripto, de la circunferencia  $C$ , por lo tanto, podemos afirmar que:

$$\widehat{OTP} = \frac{\pi}{2}$$

Si unimos los puntos  $O$  y  $Q$ , centros de las dos circunferencia, queda determinado el triángulo rectángulo  $OTP$ . Por el teorema de Pitágoras, se verifica:

$$OQ^2 = OT^2 + TQ^2 \quad (1)$$

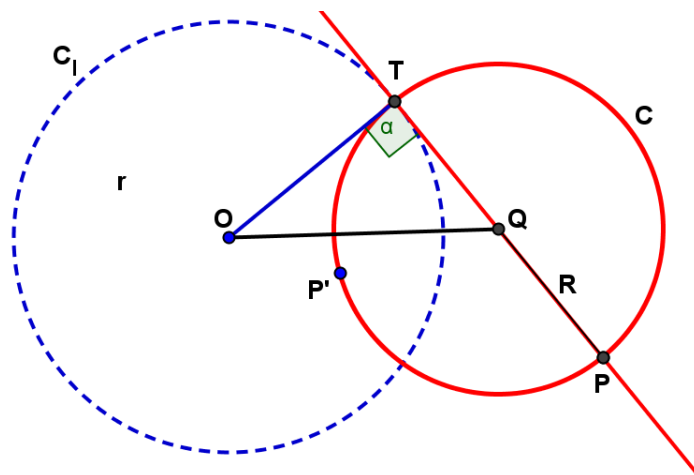


Figura 33. Distancia entre dos circunferencia

Como el radio  $TQ = R$  y el radio  $OT = r$ , sustituyendo en (1) y despejando  $r^2$ :

$$OQ^2 = r^2 + R^2 \Rightarrow r^2 = OQ^2 - R^2$$

Llamando,  $d$ , a la distancia entre las dos circunferencias, luego,  $OQ = d$ . Sustituyendo y despejando, obtenemos la condición de ortogonalidad, (7. 4).

$$r^2 = d^2 - R^2$$

$$d^2 = r^2 + R^2$$

## 8. Círculo cuatrillizo de Leon Bankoff.

Demostraremos, utilizando la transformación por inversión, la existencia del círculo cuatrillizo, de la familia de los círculos de Arquímedes. En primer lugar observaremos, gráficamente, la ubicación de los cuatro círculos de igual radio, utilizando un árbelos y su simétrico, para mejor apreciación.

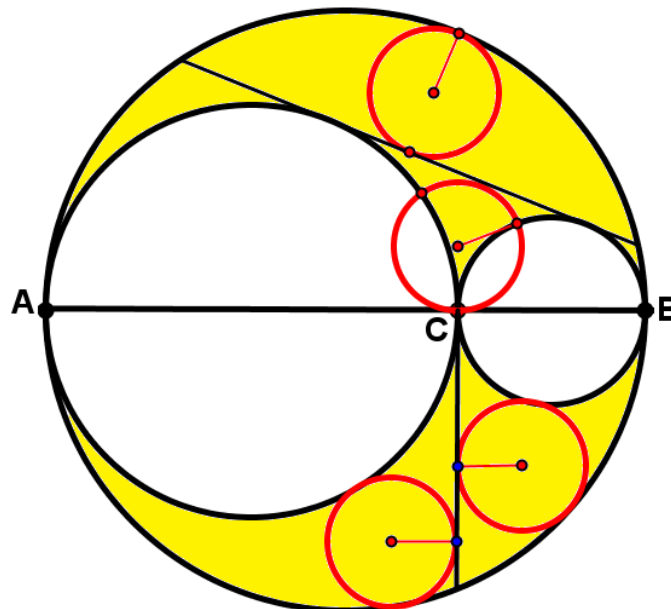


Figura 34. Los cuatro círculos del árbelos, que poseen igual radio

Leon Bankoff encontró un cuarto círculo inscrito en el segmento circular del semicírculo de diámetro  $AB$ , determinado por la tangente común a los dos semicírculos interiores, de diámetros,  $AC$  y  $CB$ , respectivamente.

### 8. 1. Demostración geométrica del círculo cuatrillizo, utilizando inversión.

Sea la configuración de círculos tangentes, dos a dos, del árbelos, compuesta por:

- Circunferencia de diámetro  $AB$ , que llamaremos  $D$ , con centro en el punto  $O$ .
- Semicircunferencias de diámetro  $AC$  y  $CB$ , respectivamente.
- $CP \perp AB$  por el punto  $C$ .
- $CP \cap D = P$

La transformación por inversión, se realizará con respecto a la circunferencia  $C_I$ , con centro en el punto  $P$  y radio  $CP$ .

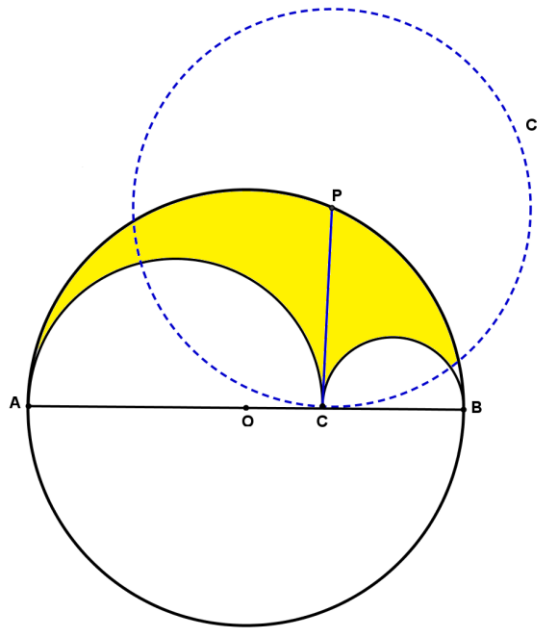


Figura 35. El árbel y la circunferencia de inversión  $C_I(P, \overline{CP})$ .

Para comenzar, tracemos la recta  $OP$ , obteniendo el punto  $T$ , como resultado de la intersección entre la circunferencia  $D$  y la recta  $PO$ .

Por este punto  $T$ , graficamos la recta  $t$ , tangente a la circunferencia  $D$ , entonces, se tiene  $TP \perp t$ .

Comenzaremos las inversiones en el siguiente orden:

- a) Recta  $CP$ .
- b) Circunferencia  $D$ , de diámetro  $AB$ .
- c) Punto  $T$ , perteneciente a la circunferencia de diámetro  $AB$ .
- d) Recta  $t$ , tangente a la circunferencia  $D$ , en el punto  $T$ .

a) La recta  $CP$  es una recta que pasa por el centro de la circunferencia de inversión, por lo tanto, se invierte en sí misma, es decir, permanece fija por inversión. (7. 3) 1.

$$I(CP) = CP$$

b) La circunferencia  $D$ , de diámetro  $AB$ , pasa por el centro,  $P$ , de la circunferencia de inversión,  $C_I$  y radio  $CP$ . Esta circunferencia,  $D$ , es secante a la circunferencia de transformación. Estas dos condiciones, permiten afirmar que se invierte en una recta perpendicular a la recta que contiene a su diámetro y pasa por el centro de inversión  $P_I$ . Ver (7. 3) 3. (i). Llamaremos  $b$ , a esta recta de inversión. Luego, se cumple:

$$I(D) = b$$

Analicemos estas dos condiciones, que son las que definen la transformación de la circunferencia de diámetro  $AB$ .

$$P_I \in D \Rightarrow I(D) = b$$

$$D, \text{ secante a } C_I \Rightarrow I(D) = b, \text{ pasa por } M = D \cap C_I \text{ y } N = D \cap C_I$$

Esta recta  $b$ , tiene la particularidad de ser tangente común a los dos círculos interiores del árbelos en los puntos  $A'$  y  $B'$ , inversos de  $A$  y  $B$ . Esta proposición fue demostrada en (3. 2) (ii).

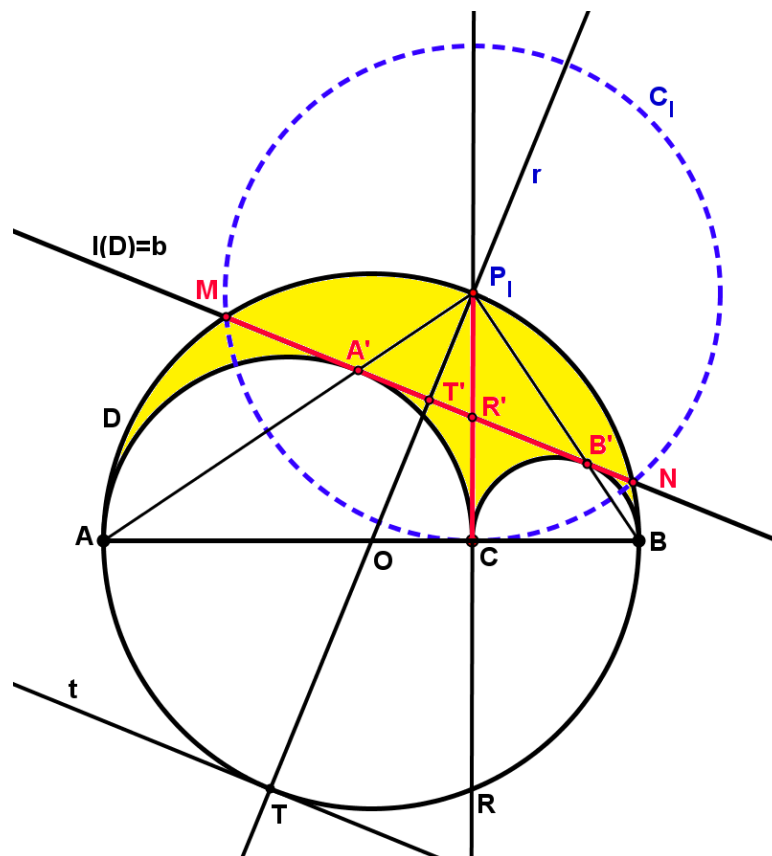


Figura 36. Inversión del punto  $T$ , de la recta  $CP_I$  y la circunferencia  $D$ .

c) La transformación del punto  $T$  perteneciente a la circunferencia  $D$ , de diámetro  $AB$ , con respecto a la inversión de centro  $P_I$ , es el punto  $T'$ , que se obtiene efectuando los pasos demostrados en (7. 2):

- Trazar la tangente a la circunferencia de inversión desde el punto  $T$ .
- Desde uno de los dos puntos de tangencia, obtenidos,  $M$  ó  $N$ , que en este caso coincide con los puntos secantes de ambas circunferencias, trazar una perpendicular al diámetro  $TP_I$ , de la circunferencia  $C$ , con pie en  $T'$ .
- Por definición de inversión de un punto, se verifica  $P_I T \cdot P_I T' = r^2$ .

Nos falta la última transformación y la más importante porque con ella se obtiene el círculo cuatrillizo de Bankoff:

d) La inversión de la recta  $t$ , tangente a la circunferencia de diámetro  $AB$ , de la configuración del árbelos.

Analicemos las condiciones de esta recta  $t$ :

- Es perpendicular a la recta  $TP_I$ .
- No pasa por el centro de inversión.
- Es exterior a la circunferencia de inversión.

Por estas condiciones sabemos que la recta  $t$ , se invierte en una circunferencia que pasa por el centro de inversión y está incluida en el disco de la misma. (7.3) 2. (ii).

Ver figura 26.

Pasos a seguir:

- Ya tenemos  $I(T) = T'$ .
- Tomamos un punto arbitrario, perteneciente a la recta  $t$ , que llamaremos  $Q$ .
- Unimos el punto  $Q$  con el centro de inversión, obteniendo la recta  $QP_I$ .
- Trazamos la recta  $m$ , tangente, desde  $Q$ , a la circunferencia de inversión.
- Obtenemos el punto de tangencia, que llamaremos  $E$ .
- Por el punto  $E$ , trazamos una recta  $n$ , perpendicular a la recta  $QP_I$ .
- Obtenemos:  $QP_I \cap n = Q'$ , inverso del punto  $Q \in t$ .

Como el ángulo  $T'Q'P_I$  es un ángulo recto, por ser un ángulo entre perpendiculares, el mismo, está inscrito en la circunferencia de diámetro  $T'P_I$ , como se puede apreciar en la figura 37.

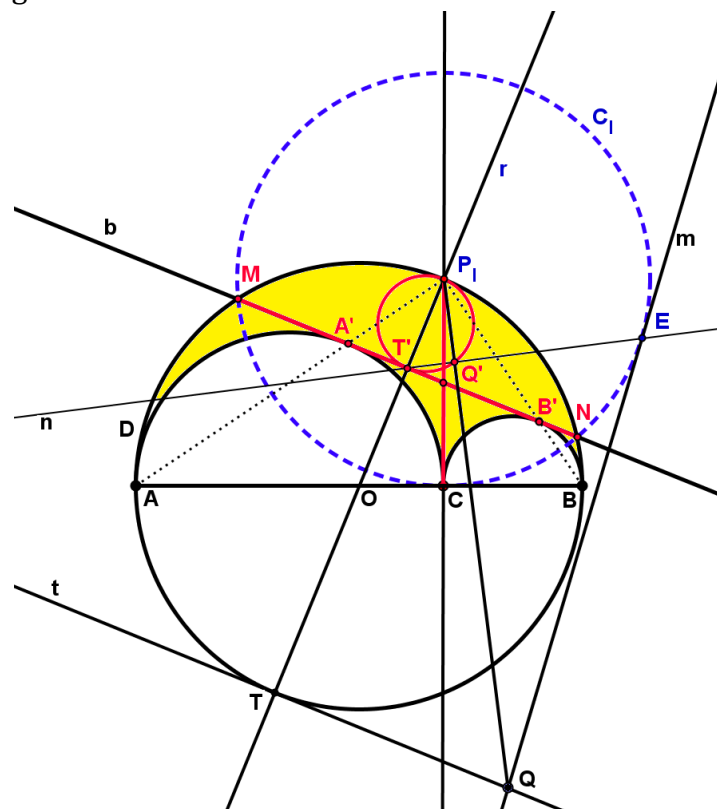


Figura 37. Círculo cuatrillizo: transformación por inversión.

## 8. 2. Demostración analítica del círculo cuatrillizo, utilizando inversión.

Demostraremos analíticamente, que este círculo de diámetro  $P_1T'$ , es el círculo cuatrillizo de Bankoff. El radio del mismo debe ser igual al radio de los círculos mellizos de Arquímedes y del trillizo de Bankoff. Es decir, igual al valor de  $x$  obtenido en (4. 1) (a).

$$\frac{P_1T'}{2} = \frac{r_1r_2}{r} = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}$$

Sea la configuración de círculos del árbelos.

Designaremos con  $r$  al radio del círculo de diámetro  $AB$ ; con  $r_1$  el radio del círculo de diámetro  $AC$  y con  $r_2$ , el radio del círculo de diámetro  $CB$ . Luego, los diámetros quedan expresados de la siguiente manera:

$$AB = 2r ; AC = 2r_1 ; CB = 2r_2 \quad (8. 2)$$

Sea la circunferencia  $D$ , de diámetro  $AB = 2r$

$C_I$ , la circunferencia de inversión de centro  $P_1$ .

La recta  $t$ , tangente a la circunferencia  $D$  en el punto  $T$ , por lo tanto, perpendicular al diámetro de la misma.

Sabiendo que el punto  $T'$  es la inversión del punto  $T$  con respecto a la circunferencia de inversión de centro  $P_1$ . (7. 2), entonces, por definición de inversión de un punto se cumple:

$$I(T) = T' \Rightarrow P_1T \cdot P_1T' = P_1C^2 \quad (8. 3)$$

Por otra parte, sabemos por propiedad<sup>20</sup> que, en el triángulo rectángulo,  $AP_1B$ , el segmento  $CP_1$ , es medio proporcional entre los segmentos  $AC$  y  $CB$ , entonces podemos escribir:

$$\frac{AC}{P_1C} = \frac{P_1C}{CB} \Rightarrow AC \cdot CB = P_1C^2 \quad (8. 4)$$

Sustituyendo  $AC$  y  $CB$  por (8. 2):

$$2r_1 \cdot 2r_2 = P_1C^2$$

Reemplazando  $P_1C^2$  en (8. 3):

$$P_1T \cdot P_1T' = 2r_1 \cdot 2r_2$$

Como  $P_1T$  es el diámetro de la circunferencia  $D$ , entonces:

$$P_1T = AB = 2r$$

---

<sup>20</sup> En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa, es medio proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre ella.

Sustituyendo, despejando y simplificando:

$$2r \cdot P_1T' = 4r_1r_2 \Rightarrow P_1T' = \frac{4r_1r_2}{2r} \Rightarrow P_1T' = \frac{2r_1r_2}{r}$$

Dividiendo por 2, miembro a miembro y sabiendo por (3. 2) (iii) [3], que  $r = r_1 + r_2$ , luego:

$$\frac{P_1T'}{2} = \frac{2r_1r_2}{2r} \Rightarrow \frac{P_1T'}{2} = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}$$

Que es lo que queríamos demostrar:

Por (5. 4), se verifica:  $x = y = z = \frac{P_1T'}{2} = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$

### 9. Los círculos mellizos de Arquímedes, son infinitos, utilizando inversión.

Si se utiliza la transformación por inversión, con respecto a una circunferencia, para uno de los círculos de Arquímedes, juntamente con la recta  $CP$  y uno de los círculos interiores del árbel, de diámetro  $AB$ , se logra construir infinitos círculos de igual radio.

Sea la configuración de los círculos del árbel y  $C_I$  la circunferencia de inversión de centro en el punto  $A$  y radio  $AC$ .

Sea, la recta que contiene al segmento  $PC$ , tangente a los dos círculos interiores de diámetros  $AC$  y  $CB$ , respectivamente, en el punto  $C$ .

Sea  $P$ , el punto de intersección de la circunferencia de diámetro  $AB$  con la recta  $CP$ .

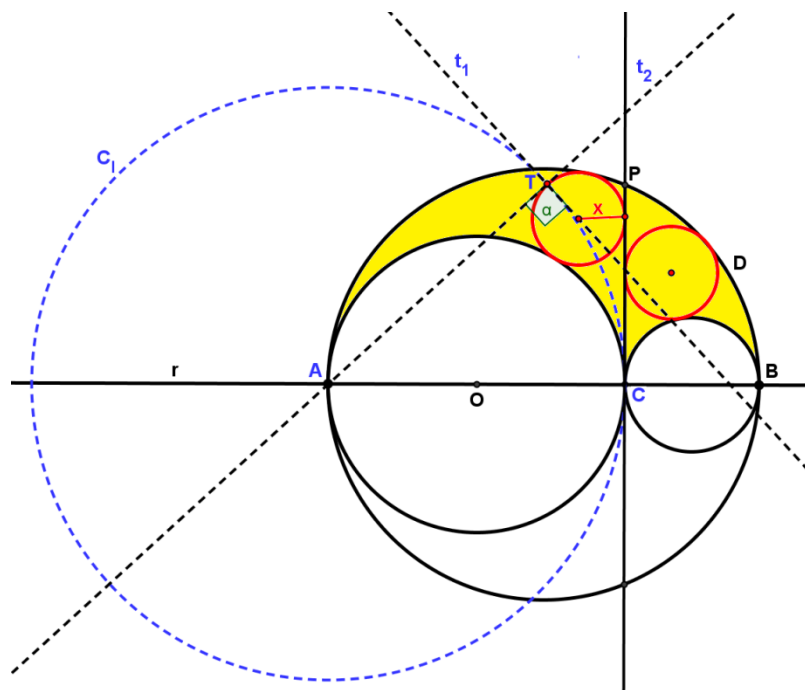


Figura 38. Tangentes  $t_1 \perp t_2$ , luego, las circunferencias  $C_I$  y  $D$ , ortogonales.

Primero observaremos que la circunferencia de inversión y el círculo de radio  $x$ , son ortogonales.

Si trazamos las dos rectas siguientes:

- La tangente a la circunferencia de inversión, en el punto  $T$ , desde el centro del círculo de radio  $x$ , obtenemos la recta  $t_1$  que contiene al radio de dicha círculo.
- La tangente al círculo de radio  $x$ , en el punto  $T$ , desde el centro de inversión, obtenemos la recta  $t_2$ , que contiene al radio  $AT$  de dicha circunferencia.

Sabiendo, por propiedad, que toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, entonces, la recta  $t_1$ , es perpendicular al radio  $AT$ , de la circunferencia de inversión  $C_I$ , contenida en la recta  $t_2$ . Luego, la recta  $t_1$  es perpendicular a la recta  $t_2$ .

Esto nos permite afirmar que las dos circunferencias son ortogonales, (7. 4). Simbólicamente:

$$Si \ t_1 \perp t_2 \Rightarrow C_I \perp C_{(AB)}$$

En segundo lugar, demostraremos, por la transformación de inversión, que existen infinitos círculos de radio  $x$ , pertenecientes a la familia de círculos de Arquímedes.

Sea el círculo de radio  $x$ , como uno de los dos círculos mellizos de Arquímedes, donde  $x = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$ , probado en (4. 1) (a), y la configuración de círculos del árbolos.

Comenzaremos las inversiones con respecto a  $C_I(A, AC)$ , en el siguiente orden:

- Recta,  $s$ , que contiene al segmento  $CP$ .
- Circunferencia  $D$ , de diámetro  $AB$ .
- Uno de los círculos mellizos de Arquímedes de radio  $x$ .

a) La recta  $s$ , que contiene al segmento  $CP$ , es tangente a la circunferencia de inversión en el punto  $C$  y perpendicular al diámetro  $AB$ , por definición de árbolos. Por cumplir con estas condiciones, permanece fija, (7. 3) (2) (ii), se invierte en sí misma.

Sabiendo que  $CP$  es tangente al círculo de radio  $x$ , entonces, la inversión del segmento  $CP$ , incluido en la recta  $s$ , es tangente al círculo de radio  $x$ . Luego, obtenemos:

$$I(s) = s \quad ; \quad I(\overline{CP}) = \overline{C'P'} \quad (\text{Ver figura 39})$$

b) La circunferencia  $D$ , de diámetro  $AB$  y la circunferencia de inversión  $C_I$ , son secantes. Además, la circunferencia  $D$ , pasa por el centro de inversión. Por estas dos condiciones,  $D$ , se invierte en una recta perpendicular a la recta que contiene su diámetro  $AB$ , con pie en el punto de inversión,  $B'$ , pasando por los puntos de intersección de las dos circunferencias, (7.3) 2. (iii).

Simbólicamente:

$$\begin{aligned}
 B \in D &\Rightarrow I(B) = B' \\
 I(D) = d, &\text{ recta que pasa por el punto } B' \\
 d &\perp AB \text{ diámetro de } D
 \end{aligned}$$

La particularidad de esta recta,  $I(D) = d$ , es el hecho de ser tangente al círculo de radio  $x$ .

Analicemos la relación entre las dos recta,  $I(s) = s$  y  $I(D) = d$ .

$$\text{Si } I(s) = s \perp AB \wedge I(D) = d \perp AB \Rightarrow I(s) = s \parallel I(D) = d$$

c) La inversión del círculo de radio  $x$ , ortogonal a la circunferencia de inversión, permanece fija por transformación, e.i. se invierte en sí mismo, (7. 4) 1.

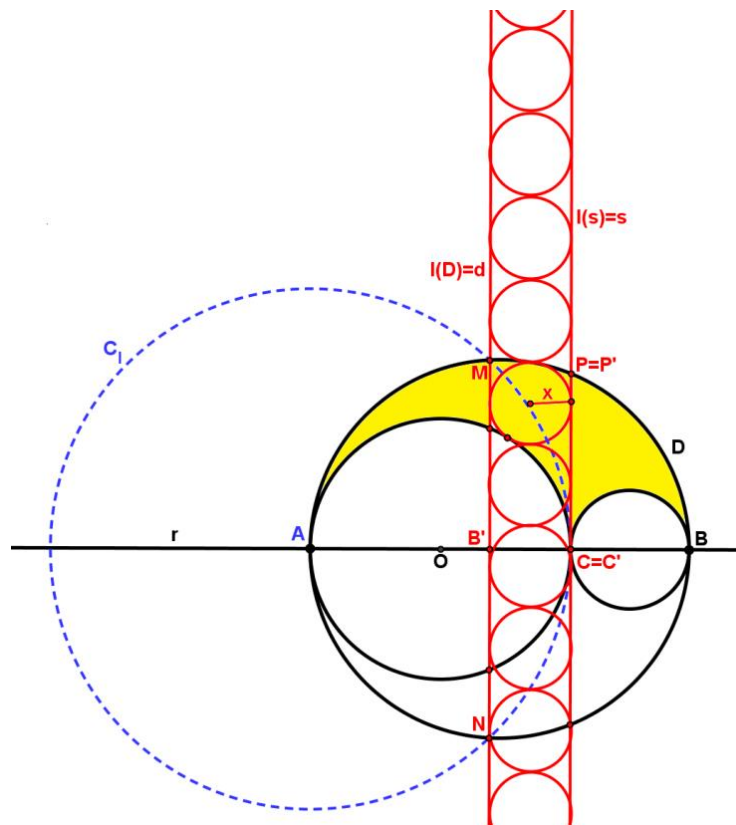


Figura 39. Gráfica de los infinitos círculos, de igual radio que los mellizos de Arquímedes.

### Analicemos la inversión del círculo de Arquímedes:

El círculo de radio  $x$  queda situado entre la recta  $d$ , inversión de la circunferencia  $D$ , de diámetro  $AB$ , y la recta  $I(s) = s$ , que contiene al segmento  $C'P'$ . El segmento  $B'C$ , o  $B'C'$ , es igual al diámetro del círculo de Arquímedes, por ser las dos rectas, tangentes al círculo y paralelas entre ellas. Luego, se puede afirmar que:

$$B'C' = 2x$$

Sustituyendo el valor de  $x$  por su equivalente, obtenido en (4. 1) (a) y dividiendo por 2, miembro a miembro, se obtiene el valor del radio del círculo encerrado entre las recta  $s$  y  $d$ .

$$B'C' = 2 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$$

$$\frac{B'C'}{2} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$$

Luego, entre estas dos rectas,  $s // d$ , se construye una secuencia infinita de círculos de igual radio, que es lo que queríamos demostrar. Ver figura 39.

## 10. Una serie de círculos tangentes, inscritos en el Árbelos.

### La serie de Pappus.

Esta serie de círculos inscritos en el Árbelos, comienza con el círculo de centro  $K_1$ , el cual es tangente a los tres círculos de la configuración que determina esta figura geométrica. Ya trabajamos con este círculo, en (5. 1), para demostrar la existencia del trillizo de Bankoff.

Seguidamente, los círculos de centro  $K_n$ , son tangentes a uno de los círculos interiores y, al mismo tiempo, al círculo de diámetro mayor de la configuración, y cada uno de ellos, a la vez, es tangente al círculo que lo precede.

Primeramente, observaremos la gráfica de esta serie en la figura 40. Los centros de cada uno de estos círculos inscritos, pertenecen a una circunferencia de diámetro  $AK_0$ .

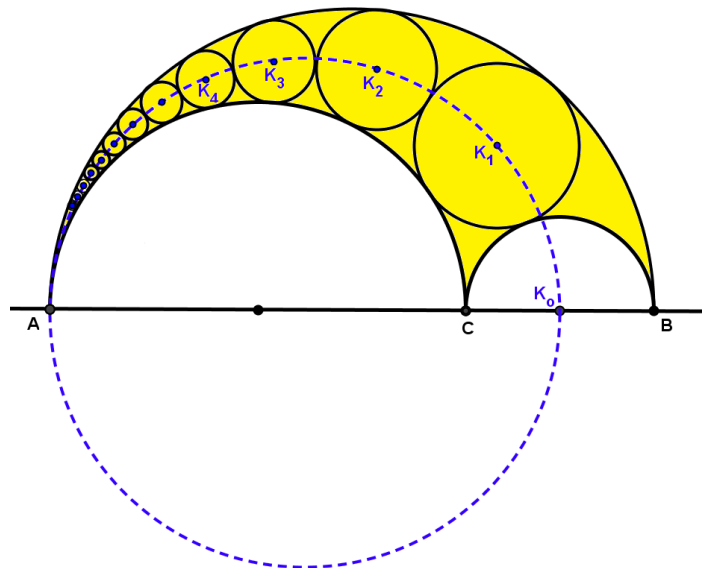


Figura 40. Serie de círculos tangentes de Pappus, inscritos en el Árbelos.

La altura, del centro de cada uno de los círculos de esta serie, con respecto a la recta que contiene el diámetro  $AB$ , (círculo mayor de la configuración) es dos veces la longitud del radio, multiplicado por el número del círculo correspondiente. Es decir, si tomamos el círculo  $k_3$ , (tercer círculo) y llamamos  $r_3$  a su radio, entonces, la altura con respecto a la recta  $AB$  es igual a  $2r_3 \cdot 3$ .

Generalizando:

$$d(k_n, AB) = h_n \Rightarrow h_n = 2nr_n$$

**Demostración, utilizando inversión:**

Sean:

La configuración del árbelos, con  $K_0$  como el centro del círculo interior, de diámetro menor.

Los círculos inscriptos en el árbelos, de centro  $K_1, K_2 \dots K_n$ .

El radio del círculo  $K_n$ , igual a  $r_n$  y la distancia  $d(k_n, AB) = h_n$ .

La circunferencia de inversión, de centro  $A$  y radio  $AT$ , ortogonal al círculo  $K_n$ . Luego, sus radios son perpendiculares, (7. 4), como se puede observar en la figura 41.

Tomaremos, al azar, uno de los círculos inscriptos en el Árbelos, por ejemplo  $K_n$ , con  $n = 3$ .

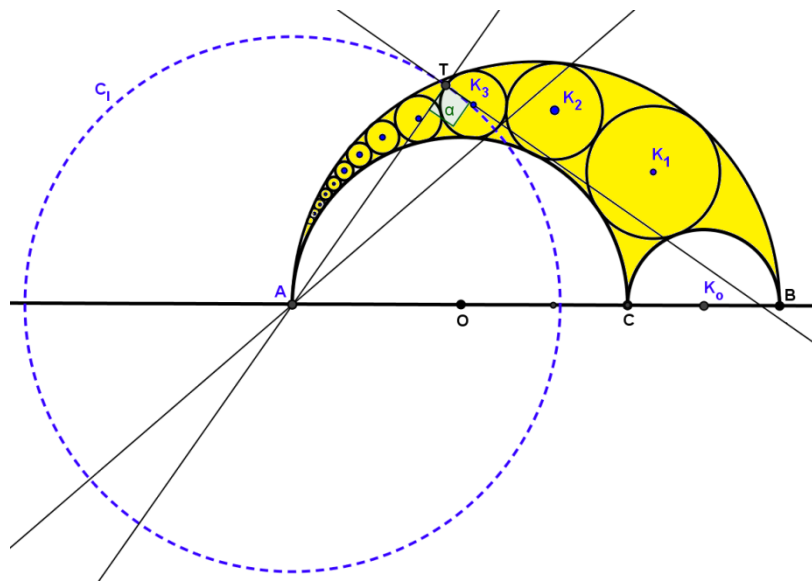


Figura 41. La circunferencia de inversión, ortogonal al círculo  $K_3$ .

Ahora, utilizando la transformación por inversión, demostraremos que  $h_n = 2nr_n$ .

Comenzaremos las inversiones con respecto a  $C_1(A, AT)$ , en el siguiente orden:

- a) Circunferencia de diámetro  $AC$ .
- b) Circunferencia de diámetro  $AB$ .
- c) Recta que contiene a los diámetros  $AB$  y  $AC$ .
- d) Círculo de centro  $K_n$ , donde  $n = 3$ .
- e) Los círculos  $K_0, K_1$  y  $K_2$ .

a) La circunferencia de diámetro  $AC$ , pasa por el centro de inversión, y es secante a la circunferencia de transformación.

Por estas dos condiciones, sabemos que:

- Se invierte en una recta, que llamaremos  $m$ , perpendicular a la recta que contiene al diámetro  $AC$ , con pie en el punto  $C'$ , inversión del punto  $C$  perteneciente a la circunferencia de diámetro  $AC$ . (7.3) 2. (iii).
- Pasa por los puntos de intersección de las dos circunferencias,  $M$  y  $N$ , que se invierten en sí mismos por pertenecer a la circunferencia de inversión.

En símbolos:

$$I(C) = C'$$

$$m \perp AC \text{ en } C'$$

b) La circunferencia de diámetro  $AB$ , tiene las mismas condiciones que la circunferencia de diámetro  $AC$ : pasa por el centro de inversión y es secante a la circunferencia de transformación. Por lo tanto:

- Se invierte en una recta, que llamaremos  $b$ , perpendicular a la recta que contiene al diámetro  $AB$ , con pie en el punto  $B'$ , inversión del punto  $B$ , perteneciente a la circunferencia de diámetro  $AB$ . (7.3) 2. (iii).
- Pasa por los puntos de intersección de las dos circunferencias,  $T$  y  $P$ , que se invierten en sí mismos por pertenecer a la circunferencia de inversión.

En símbolo:

$$I(B) = B'$$

$$b \perp AB \text{ en } B'$$

c) La recta que contiene a los diámetros  $AB$  y  $AC$ , es una recta que pasa por el centro de inversión, entonces, por (7. 3) 1, permanece fija por inversión.

$$I(AB) = AB$$

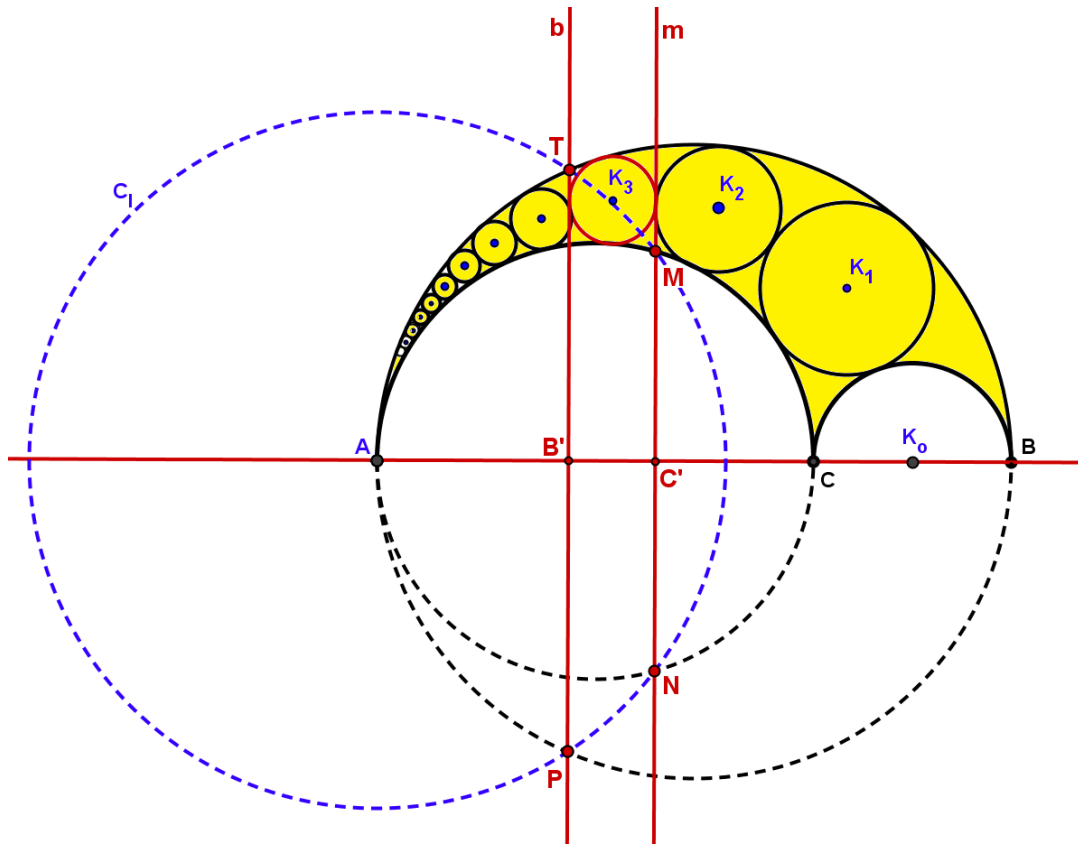
Por otra parte, las rectas  $b$  y  $m$ , son paralelas, ya que, cada una de ellas es perpendicular a la recta que contiene el diámetro  $AB$ , y la inversión de  $AB = AB$ . Luego:

$$b \perp AB \wedge m \perp AB \Rightarrow b // m$$

Nos faltaría demostrar que las recta  $b$  y  $m$  son tangentes al círculo  $K_n$  con  $n = 3$ .

d) El círculo de centro  $K_n$ , con  $n = 3$ , y la circunferencia de inversión  $C_I$ , de centro en el punto  $A$ , son ortogonales, como puede verse en la figura 41, por lo tanto el círculo de centro  $K_3$  permanece fijo por inversión, (7. 4) 1.

En la gráfica de la figura siguiente, podrá observarse las inversiones de los puntos (a) al (d).



**Figura 42.** Inversión de un círculo  $K_n$ , con  $n=3$ ; de las circunferencias de diámetro  $AB$  y  $AC$  y de la recta  $AB$ .

Ahora, probaremos que las rectas  $b$  y  $m$  son tangentes al círculo  $K_n$  donde  $n = 3$ . Para ello, recurriremos, primero, a la gráfica del trazado de rectas tangentes, comenzando con la recta  $I(AB) = b$ .

El punto  $P = C_1 \cap b$ , es exterior al círculo de centro  $K_3$ . Unimos este punto  $P$  con el centro de  $K_3$  y trazamos la circunferencia de centro  $P$  y radio  $PK_3$ . El punto de intersección entre esta circunferencia y el círculo de centro  $K_3$ , es el punto de tangencia que llamaremos  $L$ .

Como la recta que contiene al diámetro del círculo  $K_3$  es paralela a la recta  $AB$ , entonces, la recta tangente en punto  $L$ , es paralela coincidente con la recta  $b$ . Por lo tanto, la recta  $b$  es tangente al círculo  $K_3$  en el punto  $L$ . (Ver figura 43).

Seguidamente, probaremos en forma gráfica, que la recta  $I(AC) = m$ , también es tangente al círculo  $K_3$

Desde el punto,  $N = C_1 \cap m$ , exterior al círculo  $K_3$ , tracemos la circunferencia de radio  $NK_3$ . La intersección de esta circunferencia con el círculo de centro  $K_3$  es el punto de tangencia que llamaremos  $I$ .





En la inversión del círculo de centro  $K_1$ , se realizan los mismos pasos anteriores. Este círculo no pasa por el centro de inversión y es exterior a la circunferencia de transformación.

En la figura siguiente, se muestran los pasos y la inversión del círculo de centro  $K_1$ .

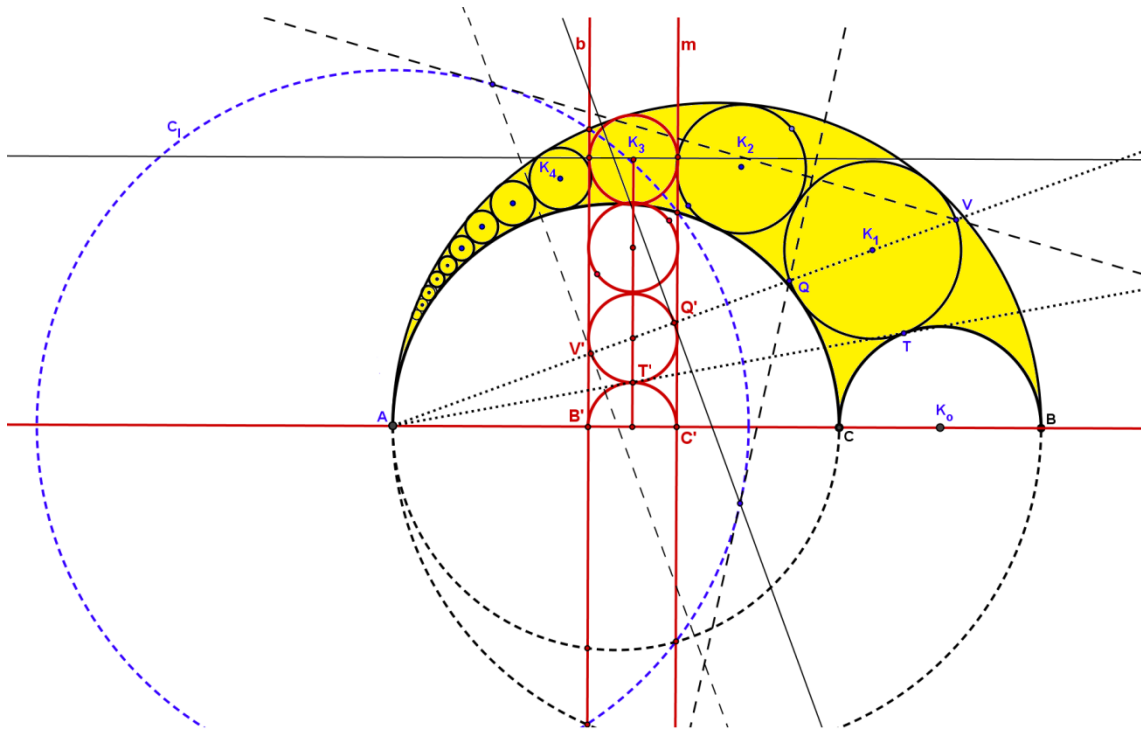


Figura 46. Inversión de los círculos  $K_1$  y  $K_0$

Volviendo a la  $d(K_n; AB)$ :

$$h_n = 2nr_n$$

Sabiendo que  $n = 3$ :

$$h_3 = 2 \cdot 3r_3$$

$$h_3 = 6r_3$$

Demostramos que la altura, desde el centro del círculo  $K_3$  al diámetro  $AB$ , es 6 veces el radio del mismo círculo.

Tomando cualquiera de los otros círculos de la cadena de círculos tangentes, inscrito en el árbelos, se cumple esta relación de igualdad.

## 10. Bibliografía

1. Clayton W. Dodge, Thomas Shoch, Peter Y.Woo, Paul Yiu. "Those Ubiquitous Archimedean Circles". Pp 202-213 Vol. 72 No 3 June 1999 *Mathematics Magazine*, Mathematical Association of America
2. Boas Harold P. "Reflections on the Arbelos". pp 236-249 March 2006 The American Mathematical Monthly. Mathematical Association of America.
3. Rike Tom. "Archimedes and Arbelos". Berkeley Math Circle. April 25, 2006.
4. Brian Mortimer. "The geometry of The Arbelos". Carleton University. April 1998.
5. H.S.M. Coxeter; S.L. Greitzer. "Retorno a la Geometría". DLS-EULER, Editores. Colección: "La Tortuga de Aquiles". Madrid, España. Enero 1994. pp. 108-109, pp. 112-117.
6. H.S.M. Coxeter. "Fundamentos de Geometría". Editorial Limusa-Wiley. México. 1971. pp. 105-112.
7. <http://www.pandd.demon.nl/arbelos.htm>
8. [www.mathcircle.berkeley.edu/arbelos.pdf](http://www.mathcircle.berkeley.edu/arbelos.pdf)



