

Universidad Nacional
de La Matanza



ESCUELA DE FORMACIÓN CONTINUA

Licenciatura en Matemática Aplicada

PAGERANK.

EL PRIMER ALGORITMO DE BÚSQUEDA DE GOOGLE

Presentada por : **Mercedes Marchesín**

Dirigida por: **Dra. Diana Rubio**

Junio 2018

Resumen

En este trabajo se analizan las herramientas matemáticas implicadas en el primer algoritmo desarrollado por Google (hoy ya de dominio público), el PageRank, que le permitió ordenar y cualificar los sitios web en Internet. Se explica el modo en que, luego de una búsqueda de un usuario, aparecen las 10 primeras páginas con información relevante para dicha búsqueda y se mencionan otras aplicaciones del algoritmo en diferentes ramas de estudio.

Palabras Clave: Google, Grafos, Teorema de Perron-Frobenius, Matrices estocásticas, Autovalores.

Abstract

In this paper we analyze the mathematical tools involved in the first algorithm developed by Google (now public domain), the PageRank, which allowed it to order and qualify websites on the Internet. The way in which, after a search of a user, the first 10 pages with relevant information for that search are shown and other applications of the algorithm in different branches of study are mentioned.

Keywords: Google, Graphs, Theorem of Perron-Frobenius, Stochastic Matrices, Eigenvalues.

Índice general

1. Introducción	1
2. Grafos y su representación matricial	5
2.1. Grafos	6
2.2. Grafos conexos	7
2.3. Matrices y Grafos	9
3. Teorema de Perron-Frobenius	12
4. El modelo PageRank	34
4.1. Cálculo del vector Page Rank	43
5. Otras aplicaciones del algoritmo PageRank	46
6. Apéndice	50
6.1. Matrices	50

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
6.2. Multiplicidad de un Autovalor	51
6.3. Matriz Estocástica	51
6.4. Matriz de permutación	52
6.5. Matrices no negativas o positivas	53
6.6. Homeomorfismo	57

Capítulo 1

Introducción

El buscador Google fue diseñado en 1998 por Sergey Brin y Lawrence Page, graduados en matemática y en informática respectivamente, quienes en ese momento eran estudiantes de doctorado en Informática de la Universidad de Stanford.

El nombre del buscador es una variante del término *googol* que Edward Kasner¹ creó para referirse al número 10^{100} . Uno de esos números que los matemáticos manejan con comodidad pero que, quizás, sea mayor que el número de partículas en el Universo. Con él querían reflejar la misión de la compañía de organizar la inmensa cantidad de información disponible en la web y en el mundo.

A fines de los 90 ya existían motores de búsqueda como Yahoo!, Ex-

¹(1878-1955) Matemático norteamericano. Creó este término con el objeto de explicar la enormidad del infinito a través de un número tan grande que es inimaginable pero que, sin embargo, no se acerca siquiera al infinito.

cite o Altavista². Eran los llamados Test Based Ranking Systems y pese a ligeras diferencias, compartían el mismo criterio a la hora de ordenar las páginas web que surgían como resultado de una búsqueda, priorizando aquellas que condensaban mayor número de palabras clave; es decir, cuantas más veces figuraba una determinada palabra en una web, mejor era la posición que ocuparían en los resultados de búsqueda. Este criterio contextual no ofrecía resultados óptimos ya que empresas que conseguían situar sus webs en lo más alto no necesariamente eran las más importantes o relevantes, dando como resultado que un buen número de compañías modestas pudiesen ocupar el "top ten". Al observar, Brin y Page, esta situación, desarrollaron un nuevo algoritmo de búsqueda que evitaba ese problema, es el denominado PageRank, algoritmo que comparte nombre con el vector que resulta de su aplicación. Es un algoritmo con gran aceptación y ha sido ampliamente analizado por varios investigadores. Para describirlo muy sintéticamente podemos decir que dicho algoritmo es una aplicación de autovectores y autovalores que atraviesa algunas herramientas de la matemática que van desde la teoría de grafos y el álgebra lineal hasta la teoría de probabilidades y el cálculo numérico.

En 1997, cuando Brin y Page empezaban a trabajar en el diseño de Google, había censadas alrededor de 100 millones de páginas web. Al-

²Nacido en 1995, fue uno de los mejores buscadores. Comprado por Yahoo en el 2003 quien lo termina cerrando definitivamente en el año 2011. Se convirtió en el primer motor de búsqueda multimedia de la web tras haber desarrollado más de 60 patentes de motores de búsqueda y haber ofrecido en 1995 el primer índice de Internet.

tavista atendía 20 millones de consultas diarias. Hoy, esas cifras se han multiplicado, el propio buscador Google atiende 200 millones de consultas diarias e indexa varios miles de millones de páginas web. Por lo que el diseño de un buscador debía resolver con eficacia ciertas cuestiones computacionales, como la manera en que se almacena toda esa información, cómo se actualiza, cómo se pueden gestionar las peticiones, cómo buscar en las gigantescas bases de datos, etc.

Pero ese no fue el único objetivo para Brin y Page, había que considerar también que el buscador fuera resistente a intentos de manipulación, a estrategias que, por ejemplo, por intereses comerciales, pretendieran situar ciertas páginas en los primeros puestos de la lista.

¿En qué consiste el algoritmo? Se trata de un criterio de ordenación que asigna a cada página un número entre 0 y 1 para determinar su importancia.

El objetivo de este trabajo es analizar el algoritmo que plantearon Brin y Page en aquel momento para determinar en qué orden mostrar los resultados de la búsqueda de modo tal que, al menos una de las diez primeras páginas que se muestren contenga información útil para el que realiza dicha búsqueda.

El contenido de este trabajo consiste de cinco capítulos.

Con el objetivo de presentar un trabajo autocontenido, en el capítulo 2 se incluyen definiciones y herramientas necesarias para el desarrollo del algoritmo como ser definiciones de grafos y su clasificación, matrices y la

relación con grafos y matrices estocásticas.

En el capítulo 3 se presenta la demostración de la herramienta fundamental para el algoritmo PageRank, el Teorema de Perron-Frobenius y el Teorema del Punto Fijo.

En el capítulo 4 se muestra cómo se construye la lista de páginas en orden de importancia, es decir se explica el modelo PageRank.

En el último capítulo se mencionan algunas de tantas aplicaciones del algoritmo en otras áreas de conocimiento.

Además incluimos un apéndice con conocimientos básicos generales a modo de recordatorio o para que quienes no posean los conceptos necesarios los tenga disponible.

Capítulo 2

Grafos y su representación matricial

En el modelo PageRank, el universo de las páginas web indexadas es un gran *grafo dirigido*, donde cada página web censada es un *nodo*, y hay una "flecha" (*arista orientada*) desde la página p_i hacia la página p_j si hay un enlace desde la primera página hacia la segunda. La asignación del valor de importancia de cada página en el algoritmo PageRank utiliza, básicamente, la teoría de grafos y su representación matricial. Por todo esto en este capítulo se incluyen las definiciones básicas y las herramientas que serán utilizadas en el algoritmo. Estas definiciones y más información sobre grafos pueden encontrarse en [4] y [14].

2.1. Grafos

Definición 2.1 *Un grafo o multigrafo G es un par (V, E) donde $V \neq \emptyset$, $V = \{u, v, \dots\}$ es un conjunto finito de elementos que llamamos vértices, puntos o nodos y E es un conjunto de pares no ordenados de vértices que llamamos ramas o aristas.*

- *Los vértices los representamos por puntos y las ramas por segmentos.*
- *Si $(u, v) \in E$ decimos que u y v son adyacentes.*

Si dos nodos son unidos por más de una arista entonces el diagrama se llama multigrafo. La definición formal de grafo no permite aristas múltiples ni lazos. Por tanto, un grafo se define como un multigrafo sin aristas múltiples ni lazos (arista que tiene por extremos a un mismo vértice).

Observación: En algunos textos el término grafo se usa para incluir multigrafos y el término grafo simple para indicar un grafo sin aristas múltiples ni lazos.

Definición 2.2 *Los grafos dirigidos o digrafos G son grafos con aristas orientadas en una dirección y se representan mediante una flecha. Si (u, v) es una arista en un grafo dirigido G entonces la rama empieza en u y termina en v , u es el origen o punto inicial de la rama, y v es el destino o punto terminal.*

Si u es un vértice de un grafo o digrafo, llamamos grado de u al número de ramas que inciden en él y lo indicamos $gr(u)$.

Definición 2.3 Un grafo $G' = (V', E')$ se llama un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$ si $V' \subset V$ y $e \in E'$ implica que $e \in E$.

Si E' contiene todos las ramas de E cuyos extremos están en V' , entonces $G' = (V', E')$ se llama subgrafo generado o inducido por V' .

2.2. Grafos conexos

Definición 2.4 Un camino en un multigrafo queda determinado por una secuencia de vértices $\{u_0, \dots, u_n\}$ tales que $(u_i, u_{i+1}) \in E$. Cuando $u_0 = u_n$ decimos que es un camino cerrado. En otro caso diremos que el camino va de u_0 a u_n o que conecta u_0 con u_n .

Definición 2.5 Un camino donde todas sus ramas sean distintas se llama camino simple o sendero. Cuando todos los vértices son diferentes se dice que es una trayectoria. Por lo que toda trayectoria es un sendero. Un ciclo es un camino cerrado en que todos sus vértices son distintos excepto $u_0 = u_n$.

Definición 2.6 Un grafo se dice que es conexo si existe una trayectoria entre cualquier par de vértices.

Definición 2.7 Un subgrafo conexo de un grafo $G = (V, E)$ se dice que es una componente conexa si no está contenido en un subgrafo conexo mayor.

Ejemplo 1 Observar el grafo de la figura 2.1.

$\{u_3, u_0, u_1, u_4, u_0, u_1, u_2, u_5\}$ es un camino de u_3 a u_5 . No es un sendero dado

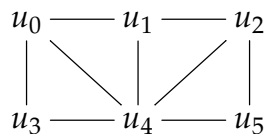


Figura 2.1: Ejemplo de grafo conexo.

que la rama (u_0, u_1) se usa dos veces. La sucesión $\{u_3, u_0, u_4, u_1, u_5\}$ no es un camino porque (u_1, u_5) no es una rama. La sucesión $\{u_3, u_0, u_4, u_1, u_2, u_4, u_5\}$ es un sendero ya que no repite ninguna rama pero no es una trayectoria porque se repite el vértice u_4 . La sucesión $\{u_3, u_0, u_4, u_2, u_5\}$ es una trayectoria de u_3 a u_5 . La sucesión $\{u_3, u_0, u_4, u_2, u_5, u_4, u_3\}$ es un camino cerrado pero no es un ciclo ya que repite el nodo u_4 , en cambio la sucesión $\{u_3, u_0, u_4, u_3\}$ sí es un ciclo.

El del ejemplo anterior se trata de un grafo conexo, en cambio el de la figura 2.2 no lo es, ya que no existe un camino entre u_3 y u_4 .

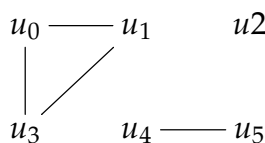


Figura 2.2: Ejemplo de grafo no conexo.

La figura 2.2 corresponde a un grafo no conexo que tiene tres componentes conexas.

Definición 2.8 Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Se dice que es fuertemente conexo si existe camino entre todo par de vértices en ambos sentidos.

Una componente fuertemente conexa de G es un subgrafo fuertemente conexo inducido de G , $G' = (V', E')$, tal que ningún otro subgrafo fuertemente conexo inducido de G contiene a G' .

Definición 2.9 Un digrafo ponderado es una terna (V, E, p) en la que $G = (V, E)$ es un digrafo y $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación de E en un anillo conmutativo $\mathbb{R}$, que asocia a cada rama $(u, v) \in E$ su peso $p((u, v))$.

2.3. Matrices y Grafos

Una representación matricial de un digrafo G de vértices $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ es la *matriz de conectividad* y se define como

$M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (u_i, u_j) \text{ es una flecha, es decir, si } u_i \text{ es el punto de inicio y } u_j \text{ el punto final} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia de un multigrafo se define de forma análoga, siendo m_{ij} el número de ramas (u_i, u_j) .

Ejemplo 2 La matriz de incidencia para un grafo como el de la figura 2.3 es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

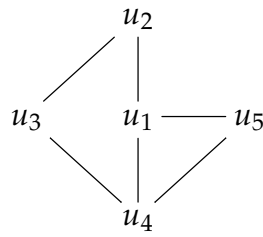


Figura 2.3: Ejemplo de grafo no dirigido.

Ejemplo 3 La matriz de incidencia para un digrafo como el de la figura 2.4 es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

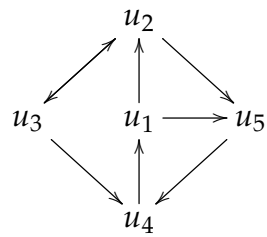


Figura 2.4: Ejemplo de grafo dirigido.

Capítulo 3

Teorema de Perron-Frobenius

El teorema de Perron-Frobenius plantea que una matriz no negativa e irreducible siempre tiene un autovalor positivo de módulo máximo que lleva asociado un autovector positivo. La demostración del teorema la podemos encontrar en [17] y [19]. Este autovector tendrá suma importancia en el algoritmo de ordenación de Google.

Oskar Perron (1880–1975), en 1909, dió un resultado sobre matrices no negativas en el que concluía que siempre existía un autovalor de módulo máximo que llevaba asociado un autovector positivo. En 1912, Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) generalizó este resultado a matrices irreducibles, la consecuencia fue el denominado Teorema de Perron-Frobenius, que hoy en día es utilizado en diversas aplicaciones en diferentes ramas de la ciencia, como ser aplicaciones económicas, análisis de las características demográficas de una población, estudio de la distribución de poder

de una red social o en el ejemplo que nos convoca y que se convirtió en su aplicación más famosa, el motor de búsqueda de Google.

Uno de los elementos fundamentales de la prueba del Teorema de Perron-Frobenius es el Teorema del punto fijo de Brouwer. Este teorema, que data también de 1910, nos asegura la existencia de un punto fijo para una aplicación continua definida en un conjunto compacto. La idea del teorema le surge a Brouwer cuando removía una taza de café en la que aparentemente siempre había un punto sin movimiento. Este teorema ha sido la pieza fundamental de la prueba de diferentes resultados, a parte del Teorema de Perron-Frobenius. Una de las aplicaciones más famosas del Teorema del punto fijo de Brouwer es la que encontró el célebre matemático John Nash, fallecido en el año 2015 y que desarrolló en su tesis doctoral en 1951. En ella define los equilibrios que hoy llevan su nombre y trata de manera general las estrategias mixtas, demostrando que cualquier juego con un número finito de estrategias tiene al menos un equilibrio de Nash¹. La prueba de la existencia de dicho equilibrio es consecuencia del Teorema del punto fijo de Brouwer. Los resultados de su tesis doctoral le valieron más tarde el Premio Nobel de Economía por la amplia gama de aplicaciones que tuvo este concepto en diversas ramas de la ciencia.

¹En Teoría de juegos, se define el equilibrio de Nash como un modo de obtener una estrategia óptima para juegos que involucren a dos o más jugadores. Es decir, si hay un conjunto de estrategias tal que ningún jugador se beneficia cambiando su estrategia mientras los otros no cambien la suya, entonces ese conjunto de estrategias y las ganancias correspondientes constituyen un equilibrio de Nash.

Antes de presentar el Teorema de Perron-Frobenius y su demostración, que fue extraída de [2], [3], [5] y [13], vamos a presentar una definición necesaria para establecer el enunciado del mismo.

Definición 3.1 Una matriz A de orden $n \times n$ se dice reducible en unos de los siguientes casos:

- i) A es la matriz cero de orden 1×1 .
- ii) Si $n \geq 2$ y existe una matriz de permutación² P tal que

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde B y D son matrices cuadradas y 0 es la matriz cero.

Una matriz A se dice irreducible si no es reducible.

Teorema 3.1 (Teorema de Perron-Frobenius). Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas no negativas ($A \geq 0$). Si A es irreducible entonces:

i) Existe un autovalor $\lambda > 0$ tal que $Av = \lambda v$, donde el autovector correspondiente es $v > 0$. Además:

- a) $\lambda \geq |\mu|$ para cualquier otro autovalor μ de A .
- b) El autovalor λ tiene multiplicidad algebraica y geométrica uno.
- c) Cualquier autovector $\omega \geq 0$ no nulo de A es múltiplo de v .

ii) Si hay k autovalores de módulo máximo, entonces son las soluciones de la ecuación $x^k - \lambda^k = 0$.

²Una matriz P de orden $n \times n$ se dice matriz de permutación de orden n si puede obtenerse de la matriz identidad de orden n permitiendo sus filas y columnas.

Antes de comenzar con la demostración del primer apartado del Teorema de Perron-Frobenius, se presentan dos lemas relacionados con el concepto de matriz irreducible. El primero de ellos nos permite identificar una matriz reducible y en el segundo se dan varias caracterizaciones para matrices irreducibles.

Lema 1 Sean A una matriz cuadrada de orden n , con $n \geq 2$, S un subconjunto no vacío de $\{1, 2, \dots, n\}$ y T su complementario. Si $a_{ij} = 0$ cuando $i \in S$ y $j \in T$, entonces A es reducible.

Demostración. Sean $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, donde sin pérdida de generalidad, podemos considerar $i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k$, y $T = \{j_1, j_2, \dots, j_{n-k}\}$, con $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}$, el complementario de S . Consideramos la permutación σ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ dada por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix}$$

Notar que σ puede ser representado por la matriz de permutación $P = (p_{ij})$, donde $p_{rs} = 1$ si $\sigma(r) = s$. Veamos que

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz $k \times k$, D una matriz $(n-k) \times (n-k)$ y 0 es la matriz cero de orden $k \times (n-k)$. Consideremos la columna α y la fila β , donde $1 \leq \alpha \leq k$ y $k+1 \leq \beta \leq n$. Con lo cual

$$(PAP^T)_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{\alpha i} a_{ij} p_{\beta j}.$$

Veamos entonces que cada término de la sumatoria es nulo. Supongamos que $p_{\alpha i} = p_{\beta j} = 1$, por definición de σ tenemos que $\sigma(\alpha) = i$ y $\sigma(\beta) = j$. Ahora bien, como hemos tomado $1 \leq \alpha \leq k$ y $k+1 \leq \beta \leq n$, entonces $i \in S$ y $j \in T$. Así, aplicando la hipótesis del lema, tenemos que $a_{ij} = 0$.

□

Lema 2 Sea $A \geq 0$ una matriz $n \times n$. Entonces son equivalentes:

- i) A es irreducible.
- ii) $(I + A)^{n-1} > 0$.
- iii) Para cualquier (i, j) , $1 \leq i, j \leq n$, existe un entero $m = m(i, j) \leq n$ para el que $(A^m)_{ij} = a_{ij}^{(m)} > 0$, donde A^m es la potencia m -ésima de A .

Demostración. Para demostrar este lema vamos a demostrar las equivalencias:

$$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i).$$

$i) \Rightarrow ii)$: Sea $y \geq 0$ un vector no nulo en $\mathbb{R}^n$ y A una matriz irreducible. Por ser y un vector no nulo tendrá al menos una coordenada no nula, que seguirá siendo no nula para el vector $(I + A)y = y + Ay$. De esta forma podemos afirmar que $(I + A)y$ tiene menos coordenadas nulas que y (siempre que y tenga al menos una coordenada nula).

Veamos con un poco más de detalle esta afirmación. Supongamos que es falsa, entonces $(I + A)y$ tendrá las mismas coordenadas nulas que y .

Notar que no puede tener más coordenadas nulas, ya que A es una matriz no negativa. Con lo cual si $y_j = 0$, $((I + A)y)_j = 0$ y también $(Ay)_j = 0$.

Sea $J = \{j : y_j > 0\}$. Entonces para cada $j \in J^c$, por la observación anterior, $(Ay)_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}y_k = 0$. Como para cada $r \in J$ se tiene que los $y_r > 0$, la identidad anterior implica que $a_{jr} = 0$ si $j \in J^c$ y $r \in J$, lo que nos lleva a una contradicción con el lema anterior, pues A es irreducible. De esta forma queda claro que $(I + A)y$ tiene menos coordenadas nulas que y .

Por definición y tendrá como máximo $n - 1$ coordenadas nulas y por la afirmación anterior $(I + A)y$ tendrá como máximo $n - 2$ coordenadas nulas. Siguiendo con este razonamiento $(I + A)^2y$ tendrá a lo sumo $n - 3$ coordenadas nulas. Por inducción podemos concluir que $(I + A)^{n-1}y$ tendrá todas sus coordenadas positivas.

Tomamos ahora $y = e_i$, donde e_i representa el i -ésimo vector canónico de R^n . Así $(I + A)^{n-1}e_i$, con $i = 1, 2, \dots, n$, que da como resultado la i -ésima columna de $(I + A)^{n-1}$, tendrá todas sus componentes positivas y concluimos que $(I + A)^{n-1} > 0$ como queríamos ver.

$ii) \Rightarrow iii)$: Supongamos $(I + A)^{n-1} > 0$ y $A \geq 0$, entonces es claro que A no es la matriz nula. Además como $(I + A)^{n-1} > 0$, se cumple que $A(I + A)^{n-1} > 0$. Si desarrollamos ahora $(I + A)^{n-1}$ mediante el binomio de Newton obtenemos

$$A(I + A)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} A^k > 0.$$

Con lo que podemos concluir que para cada i, j existe al menos una matriz $A, A^2, \dots, A^n$ que tiene su (i, j) -ésima coordenada positiva.

iii) $\Rightarrow$ i) : Supongamos A reducible, entonces por definición existe una matriz de permutación P tal que

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix},$$

donde B_1 y D_1 son matrices cuadradas. De esta forma $(PAP^T)^2 = PAP^T PAP^T = {}^3PA^2P^T$, donde

$$PA^2P^T = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix},$$

por ser B_1 y D_1 matrices cuadradas y mediante inducción tenemos

$$PA^mP^T = \begin{pmatrix} B_m & 0 \\ C_m & D_m \end{pmatrix},$$

para cualquier m natural.

De esta forma $(PA^mP^T)_{\alpha\beta} = 0$ para cualquier $m = 1, 2, \dots$, donde α, β corresponden a las entradas de la submatriz cero de PAP^T . Entonces

$$0 = (PA^mP^T)_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{\alpha k} a_{kl}^{(m)} p_{\beta l},$$

para cualquier m y más concretamente para $m = 1, 2, \dots, n$. Ahora tomando una pareja k, l para la que $p_{\alpha k} = 1 = p_{\beta l}$, tenemos que $a_{kl}^{(m)} = 0$ para

³La transpuesta de una matriz de permutación P es su inversa.

todo m , lo que entra en contradicción con la hipótesis. De esta forma concluimos que la matriz A es irreducible.

□

Veamos ahora una expresión para la derivada del determinante de una matriz que emplearemos en la prueba de la simplicidad del autovalor máximo del Teorema de Perron-Frobenius.

Lema 3 *Sea $X(t)$ una matriz cuadrada $n \times n$ cuyas entradas son funciones diferenciables con respecto a t , entonces*

$$|X(t)|' = \sum_{i,j=1}^n (-1)^{(i+j)} |X(t)(i|j)| x'_{ij}(t),$$

donde $X(t)(i|j)$ es la matriz obtenida al eliminar la fila i -ésima y la columna j -ésima de la matriz $X(t)$, y $|\cdot|$ denota determinante.

Demostración. Para realizar la demostración de este lema comenzamos recordando la definición de determinante de una matriz utilizando permutaciones.

Sea σ_n el conjunto de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ y $p \in \sigma_n$ una de estas permutaciones. Si $\epsilon(p)$ denota -1 elevado al número de inversiones de una permutación p , se sabe que

$$|X(t)| = \sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p) x_{1p(1)}(t) x_{2p(2)}(t) \dots x_{np(n)}(t).$$

Con esta definición de determinante, derivamos con respecto a t y obtenemos

$$\begin{aligned}
(\det X(t))' &= \sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p) x'_{1p(1)}(t) x_{2p(2)}(t) \dots x_{np(n)}(t) + \\
&\quad \sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p) x_{1p(1)}(t) x'_{2p(2)}(t) \dots x_{np(n)}(t) + \dots + \\
\sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p) x_{1p(1)}(t) x_{2p(2)}(t) \dots x'_{np(n)}(t) &= \begin{vmatrix} x'_{11}(t) & x'_{12}(t) & \dots & x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \\
&\quad \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x'_{21}(t) & x'_{22}(t) & \dots & x'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1}(t) & x'_{n2}(t) & \dots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Miremos el primer determinante de la suma anterior

$$\begin{vmatrix} x'_{11}(t) & x'_{12}(t) & \dots & x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

desarrollando por la primer fila obtenemos

$$\begin{vmatrix} x'_{11}(t) & x'_{12}(t) & \dots & x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x'_{1j}(t) \det(X(t)(1|j)).$$

Si realizamos el mismo proceso con los demás determinantes llegamos a

$$(\det X(t))' = \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} x'_{ij}(t) \det(X(t)(i|j)),$$

como queríamos demostrar. $\square$

Una vez vistos todos los lemas anteriores, podemos comenzar con la prueba del primer apartado del Teorema de Perron-Frobenius, pero antes presentaremos el enunciado del Teorema del punto fijo de Brouwer, que es una de las piezas básicas de la demostración [15].

Teorema 3.2 (*Teorema del punto fijo de Brouwer*) Sea $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ el disco unidad cerrado de $\mathbb{R}^n$ y $f : D^n \rightarrow D^n$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo; es decir, existe $x \in D^n$ tal que $f(x) = x$.

Cabe destacar que la propiedad del punto fijo es una propiedad topológica⁴, por lo que si X es homeomorfo a Y y X tiene la propiedad del punto fijo, entonces Y también.

Demostración del apartado i) del Teorema de Perron-Frobenius. Tomamos el siguiente conjunto

$$S = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T : \|x\| = 1, x_i \geq 0; i = 1, \dots, n\}.$$

Definimos ahora la aplicación $f : S \rightarrow S$ como

$$f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}.$$

Veamos que $Ax \neq 0$ para cada $x \in S$, así la aplicación f está bien definida ya que en ese caso $\|Ax\| \neq 0$.

⁴Una propiedad de espacio es una propiedad topológica, si cada vez que un espacio X posee esa propiedad, cada espacio homeomorfo a X la posee también.

Supongamos $Ax = 0$ para algún $x \neq 0$ y $x \in S$. Entonces $x \in \text{Ker}(A)$ y

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Como $a_{ij}x_j \geq 0$ para $i, j = 1, \dots, n$, ya que $a_{ij} \geq 0$, para que se satisfaga (3.1) se debe cumplir $a_{ij}x_j = 0$ para $i = 1, \dots, n$ lo que implica $a_{ik} = 0$; es decir, A tiene una columna de ceros. Pero esto no es posible por ser A una matriz irreducible. En efecto, si A tiene una columna entera de ceros

$$A + I = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & 0 & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & 1 & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow (A + I)^{n-1} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & 0 & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & 1 & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

lo que, por *ii*) del Lema 2, contradice el hecho de que A es irreducible.

Además es claro que f es una aplicación continua y envía S en S , ya

que $Ax \geq 0$, y

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| = 1.$$

Con lo cual, por ser S homeomorfo a D^{n-1} , aplicando el Teorema del punto fijo de Brouwer podemos asegurar que existe $v \in S$ tal que $f(v) = v$; es decir,

$$\frac{Av}{\|Av\|} = v \iff Av = \|Av\|v.$$

Si denotamos $\lambda := \|Av\|$ tenemos el autovalor buscado en $i)$ y, además, $\lambda > 0$.

Usando que $Av = \lambda v$, veamos que $v > 0$. Es claro que

$$(I + A)v = v + Av = v + \lambda v = (1 + \lambda)v$$

y, mediante inducción,

$$(I + A)^{n-1}v = (1 + \lambda)^{n-1}v. \quad (3.2)$$

Por ser A irreducible, $(I + A)^{n-1} > 0$, lo que implica $(I + A)^{n-1}v > 0$ y por (3.2) $v > 0$.

Antes de probar $a)$; es decir, $\lambda > |\mu|$ para cualquier autovalor μ de A , vamos a ver que la matriz traspuesta de A tiene como autovalor máximo a λ .

$A^T \geq 0$ e irreducible, por serlo A . De esta forma, por lo visto anteriormente existe $\lambda_1 > 0$ tal que $A^T z = \lambda_1 z$, con $z > 0$. Multiplicamos a

izquierda esta última igualdad por v^T , donde $v > 0$ es el autovector de A asociado con λ ,

$$\lambda_1 v^T z = v^T A^T z = (Av)^T z = \lambda v^T z.$$

Con lo que acabamos de demostrar que $\lambda_1 = \lambda$ ya que $v^T z > 0$.

Veamos ahora que $\lambda > |\mu|$ para cualquier autovalor μ de A . Sea μ un autovalor real o complejo de A . Dado $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ un autovector de A asociado a μ , definimos $|u| := (|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|)^T$. Sin pérdida de generalidad consideramos $|u| \in S$. De esta forma

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} |u_j| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right| = |\mu u_i| = |\mu| |u_i|.$$

Con lo que $A|u| \geq |\mu| |u|$. Si z es el autovector de A^T asociado con λ , multiplicamos a izquierda por z^T la anterior desigualdad y obtenemos

$$\lambda z^T |u| = (A^T z)^T |u| = z^T A |u| \geq z^T |\mu| |u| = |\mu| z^T |u|,$$

y como $z^T |u| > 0$, obtenemos $\lambda \geq |\mu|$.

Continuamos la demostración con la prueba del apartado b), λ tiene multiplicidad geométrica y algebraica uno.

Comenzamos con la multiplicidad geométrica. Para verificar que es uno debemos ver que cualesquiera dos autovectores asociados a λ son linealmente dependientes.

Tomemos un vector w no nulo y real tal que $Aw = \lambda w$; es decir, w es un autovector asociado a λ . Comprobemos entonces que w y v son linealmente dependientes. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos

que v y w son linealmente independientes, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(v - \alpha w)$ es un vector no nulo y no negativo, que tiene al menos una componente nula. En efecto, si w tiene alguna componente positiva podemos tomar $\alpha = \min\{\frac{v_i}{w_i} : w_i > 0\}$, en otro caso tomamos $\alpha = \max\{\frac{v_i}{w_i} : w_i < 0\}$. Pero observamos que $(v - \alpha w)$ es un autovector de A asociado a λ , ya que

$$A(v - \alpha w) = Av - \alpha Aw = \lambda v - \alpha \lambda w = \lambda(v - \alpha w),$$

y como los vectores no negativos asociados a λ son estrictamente positivos⁵, llegamos a un absurdo, puesto que $(v - \alpha w)$ tenía al menos una componente nula. Podemos proceder de la misma forma si consideramos w complejo. En este caso, separamos la parte real y la parte compleja y seguimos el procedimiento anterior, obteniendo que tanto la parte real como la parte compleja son un múltiplo complejo de v , con lo cual w es un múltiplo complejo de v . Así acabamos de probar que λ tiene multiplicidad geométrica uno.

Veamos ahora que λ tiene multiplicidad algebraica uno (λ es simple); es decir, tenemos que ver que es una raíz simple del polinomio característico de A .

⁵En la demostración del Lema 2 se vió que si A es una matriz irreducible e $y \geq 0$, con alguna coordenada nula, el vector $(I + A)y$ tiene menos coordenadas nulas que y . Entonces si $x \geq 0, x \neq 0$, es un autovector de la matriz irreducible A asociado al autovalor λ con alguna coordenada nula se tiene que

$$(I + A)x = (1 + \lambda)x,$$

luego $(I + A)x$ y x tienen el mismo número de coordenadas nulas, lo que no es posible y, por tanto, $x \geq 0$.

Si $\Delta(\beta) = \det(\beta I_n - A)$, basta comprobar que $\Delta'(\lambda) \neq 0$. Aplicando el Lema 3 y usando la identidad $\frac{d}{d\beta}(\beta I_n - A)_{ij} = \delta_{ij}$ tenemos

$$\Delta'(\beta) = \frac{d}{d\beta}(\det(\beta I_n - A)) = \sum_{i=1}^n \det((\beta I_n - A)(i|j)) = \text{tr}(\text{adj}(\beta I_n - A)),$$

donde tr denota la traza de una matriz y adj su matriz adjunta. De este modo

$$\Delta'(\lambda) = \text{tr}(\text{adj}(\lambda I_n - A)). \quad (3.3)$$

Denotamos ahora $B(\lambda) = (\text{adj}(\lambda I_n - A))^T = \text{adj}(\lambda I_n - A^T)$. Usando que el producto de una matriz por la traspuesta de su adjunta es la matriz identidad por el determinante de la matriz ⁶

$$(\lambda I_n - A)B(\lambda) = I_n \det(\lambda I_n - A) = 0, \quad (3.4)$$

ya que λ es raíz del polinomio característico.

Además acabamos de ver que λ tiene multiplicidad geométrica uno, de este modo el rango de la matriz $\lambda I_n - A$ es $n - 1$, de forma que $B(\lambda) \neq 0$. Supongamos ahora que la columna j -ésima de la matriz $B(\lambda)$ es diferente de cero. Entonces aplicando 3.4

$$(\lambda I_n - A)B(\lambda)^{(j)} = 0 \iff \lambda B(\lambda)^{(j)} = AB(\lambda)^{(j)},$$

⁶Lo que se deduce de la expresión inversa de una matriz, que dice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{adj} A)^T.$$

lo que significa que $B(\lambda)^{(j)}$ es un autovector asociado al autovalor λ y $B(\lambda)^{(j)}$ es un múltiplo escalar del vector $v > 0$. Así $B(\lambda)^{(j)} > 0$ o $B(\lambda)^{(j)} < 0$. Esto significa que toda columna de $B(\lambda)$ es estrictamente positiva, estrictamente negativa o cero y al menos una de ellas es distinta de cero.

Ahora aplicando el mismo razonamiento a $(B(\lambda))^T = \text{adj}(\lambda I_n - A)$ tenemos que las columnas de $(B(\lambda))^T$, que son las filas de $B(\lambda)$, son estrictamente positivas, estrictamente negativas o cero y con al menos una de ellas distinta de cero. De esta forma es fácil ver que

$$B(\lambda) > 0 \text{ o } B(\lambda) < 0,$$

luego por 3.3

$$\Delta'(\lambda) = \text{tr}(B(\lambda)) \neq 0.$$

Con lo que queda probado que λ es simple; es decir, que tiene multiplicidad algebraica uno.

Concluimos la demostración del apartado *i)* del teorema con la prueba de *c)*, viendo que cualquier autovector $w \geq 0$ no nulo es múltiplo de v . Para ello nos vamos a apoyar en el hecho de que la multiplicidad geométrica del autovalor máximo λ es uno, como hemos visto en el punto *b)*.

Suponemos $Aw = \mu w$ para un cierto vector $w \neq 0$ no nulo. Multiplicamos a izquierda por v^T , con v el autovector positivo asociado al autovalor $\lambda > 0$, y tendremos

$$\mu v^T w = v^T A w = \lambda v^T w$$

y, puesto que $v^T w > 0$ (ya que $w \neq 0$ y $v^T > 0$), obtenemos que $\mu = \lambda$. De esta forma tenemos que w es un autovector de A asociado a λ y como acabamos de ver que λ tiene multiplicidad geométrica uno, entonces podemos concluir que w es un múltiplo escalar de v , con lo que queda probado c).

□

Planteemos un lema necesario para la demostración del apartado ii) del teorema:

Lema 4 *Si una matriz compleja C de orden $n \times n$ está dominada por una matriz irreducible $A \geq 0$ ($|C| \leq A$) cuyo máximo autovalor es r , entonces para cada autovalor s de C tenemos*

$$|s| \leq r.$$

Además la igualdad $|s| = r$ se cumple si y sólo si

$$C = e^{i\varphi} D A D^{-1},$$

donde $s = r e^{i\varphi}$ y $|D| = I_n$.

Demostración. Sea $Cy = sy$ para algún autovalor s con $y \neq 0$. Tomamos el vector $|y|$ y aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| |y_j| = \sum_{j=1}^n |c_{ij} y_j| \geq |\sum_{j=1}^n c_{ij} y_j| = |s y_i| = |s| |y_i|,$$

lo que quiere decir $|C||y| \geq |s||y|$. Ahora bien, como $A \geq |C|$ deducimos que

$$A|y| \geq |C||y| \geq |s||y|. \quad (3.5)$$

Sea ahora z el autovector correspondiente al autovalor máximo de A^T , que existe por la parte *i*) del Teorema de Perron-Frobenius, entonces de 3.5 se tiene

$$rz^T|y| = (A^T z)^T|y| = z^T A|y| \geq z^T |s||y| = |s|z^T|y|, \quad (3.6)$$

con lo que obtenemos $|s| \leq r$, por ser $z^T|y| > 0$.

Probemos la afirmación sobre la igualdad. Sea $C = e^{i\varphi} D A D^{-1}$, con $|D| = I_n$. Entonces las matrices C y $e^{i\varphi} A$ son semejantes⁷, con lo cual si r es el autovalor máximo de A , $re^{i\varphi}$ lo es de $e^{i\varphi} A$ y, por consiguiente, de C . De este modo obtenemos que $|s| = r$.

Probemos ahora la implicación en el otro sentido. Supongamos $s = re^{i\varphi}$; es decir, $|s| = r$. Este hecho implica que la desigualdad en 3.6 se convierte en una igualdad, con lo que

$$A|y| = |s||y| = r|y|$$

y, por 3.5,

$$A|y| = |C||y| = r|y| \Rightarrow (A - |C|)|y| = 0.$$

⁷Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A y B son matrices semejantes $\iff \exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible tal que $B = P^{-1}AP$

Definimos

$$D = \text{diag}\left(\frac{y_1}{|y_1|}, \frac{y_2}{|y_2|}, \dots, \frac{y_n}{|y_n|}\right),$$

y

$$G = e^{-i\varphi} D^{-1} C D. \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta que $D|y| = y$, $Cy = sy$ y $s = re^{i\varphi}$ obtenemos

$$CD|y| = Cy = sy = sD|y| = re^{i\varphi} D|y|.$$

De este modo

$$G|y| = e^{-i\varphi} D^{-1} CD|y| = e^{-i\varphi} D^{-1} re^{i\varphi} D|y| = r|y| A|y|. \quad (3.8)$$

Si tomamos valores absolutos en 3.7

$$|G| = |e^{-i\varphi} D^{-1} CD| = I_n |C| I_n = |C|,$$

y como $|C| = A$ tenemos $|G| = A$. Por lo tanto $|G||y| = A|y| = G|y|$, donde hemos usado 3.8. Así

$$\sum_{j=1}^n (|g_{ij}| - g_{ij}) |y_j| = 0,$$

y como $|y_j| > 0$, entonces

$$|g_{ij}| - g_{ij} = 0.$$

De esta forma $G = |G| = A$, con lo cual $A = e^{-i\varphi} D^{-1} C D$ o, lo que es lo mismo $C = e^{i\varphi} D A D^{-1}$ $\square$

Demostración del apartado ii) del Teorema de Perron-Frobenius. Sean r el autovalor positivo de módulo máximo de A y $\lambda_j = r e^{i\varphi_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, los k autovalores de módulo máximo. Si aplicamos ahora el Lema 4 con $C = A$ y $s = \lambda_j$ tenemos

$$A = e^{i\varphi_j} D_j A D_j^{-1}, j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.9)$$

con lo cual A y $e^{i\varphi_j} A$ son matrices semejantes. Por este motivo, como r es un autovalor simple de A , entonces $e^{i\varphi_j} r$ es un autovalor simple de $e^{i\varphi_j} A$ y por semejanza también de A .

Así aplicando dos veces 3.9 podemos obtener la siguiente igualdad,

$$A = e^{i\varphi_l} D_l (e^{i\varphi_j} D_j A D_j^{-1}) D_l^{-1} = e^{i(\varphi_l + \varphi_j)} (D_l D_j) A (D_l D_j)^{-1}.$$

De este modo A y $e^{i(\varphi_l + \varphi_j)} A$ son semejantes para cualesquiera l y j . Con lo cual $r e^{i(\varphi_l + \varphi_j)}$ es un autovalor de $e^{i(\varphi_l + \varphi_j)} A$ y por semejanza de matrices también de A .

Ahora bien, como A sólo tiene k autovalores simples de módulo r ($r e^{i\varphi_j}$ para $j = 1, 2, \dots, k$) entonces $r e^{i(\varphi_l + \varphi_j)}$ tiene que ser uno de estos autovalores; es decir

$$e^{i(\varphi_l + \varphi_j)} = e^{i\varphi_m}, \quad \text{para algún } m \in 1, \dots, k \quad (3.10)$$

Por 3.10 hemos probado que el conjunto $G = e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_k}$ es cerrado por multiplicación. Veamos ahora que tiene elemento neutro y que cada elemento de G tiene inverso.

Comprobemos primero que $1 \in G$. Denotamos ahora $z_i := e^{i\varphi_i}$. Para $z_i \in G$, consideramos el conjunto $\{z_i^n : n \in \mathbb{N}\}$; puesto que G es cerrado por multiplicación existirán n_1 y n_2 con $n_1 > n_2$ tal que $z_i^{n_1} = z_i^{n_2}$ y se deduce que $z_i^{n_1 - n_2} = 1$. En efecto, supongamos que no se cumple, así $z_i^{n_1 - n_2} \neq 1$ y entonces multiplicando por $z_i^{n_2}$ tenemos

$$z_i^{n_2} z_i^{n_1 - n_2} \neq z_i^{n_2} \iff z_i^{n_1} \neq z_i^{n_2},$$

lo que es absurdo. Así, como $z_i^{n_1 - n_2} \in G$ entonces $1 \in G$.

Probemos ahora que cada elemento de G tiene elemento inverso. Sea $z_i \in G$ entonces

$$z_i G = \{z_i z_1, \dots, z_i z_k\} = \{z_1, \dots, z_k\} = G.$$

Puesto que $1 \in G$, existe j tal que $z_i z_j = 1$; es decir, $z_j = z_i^{-1} \in G$. De este modo G es un grupo multiplicativo de orden k y, por tanto, $z_i^k = 1$. En efecto

$$z_i G = G \Rightarrow \{z_i z_1, \dots, z_i z_k\} = \{z_1, \dots, z_k\},$$

con lo cual

$$z_i^k z_1 \dots z_k = z_1 \dots z_k \Rightarrow z_i^k = 1.$$

De esta forma podemos concluir que G es el conjunto de raíces de $x^k - 1 = 0$ y así los k autovalores de módulo máximo (λ_i) son raíces de la ecuación $x^k - \lambda^k = 0$, concluyendo de este modo la prueba de *ii*) y del teorema.

□

Capítulo 4

El modelo PageRank

Supongamos que se realiza una consulta y que, tras el proceso de búsqueda en las bases de datos, hemos determinado que unas cien páginas contienen información que puede resultar relevante al usuario. Una vez censadas todas las páginas de la web, mediante la teoría de grafos, se modeliza la situación ordenando cada una de las páginas a las que referiremos p_i con $1 \leq i \leq n$ según su importancia x_i . Para esto último sólo se tendrán en cuenta los enlaces entre las páginas.

Luego de armado el grafo conviene trabajar con su matriz de incidencia (M) que será una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ donde n es la cantidad de nodos, las filas y columnas corresponden a las páginas $p_1, \dots, p_n$ y sus entradas son ceros y unos. Pondremos un uno en el lugar $(i; j)$ si hay un enlace desde p_i hasta p_j o cero en caso contrario (ver ejemplos 2 y 3 del capítulo 2).

Trabajaremos con la transpuesta de la matriz del grafo que hemos considerado y que por simplicidad seguiremos llamando M . Con lo que dicha matriz tendrá un 1 en la entrada m_{ij} si hay un enlace de la página p_j a la página p_i y un 0 en caso contrario. La idea más intuitiva es que cuanto más enlaces haya a una página ésta será más importante.

Observemos que la suma de las entradas correspondientes a la fila p_i coincide con el número de enlaces que hay a esa página mientras que la suma de los registros de una columna coincide con el número de enlaces que tiene la página p_i a los distintos sitios de la red. Veamos con un ejemplo cómo quedaría la matriz descrita para una web como la de la figura 2.4.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En realidad no vamos a utilizar exactamente esta matriz sino M^* que consiste en dividir a cada término de la columna i por el número de unos que haya en dicha columna; es decir

$$m_{ij}^* = \frac{m_{ij}}{N_j}$$

donde $m_{ij} = 1$ si hay un enlace de la página p_j a la página p_i y N_j representa la cantidad de unos de la columna j .

Así la matriz M^* del ejemplo anterior resulta ser

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observando M^* podemos notar que cada entrada es un número entre 0 y 1 y que cada columna suma 1, es decir M^* es una matriz estocástica.

Volvamos a nuestra idea intuitiva de pensar que una página será más importante cuanto más enlaces tenga.

Aquí nos encontramos con un primer problema porque uno podría crear varias páginas que tengan enlaces a una página web determinada aumentando así su importancia o podría haber páginas poco citadas pero desde sitios muy “importantes” que no aparecerían entre las más destacadas. Para evitar esto, se plantea una modificación y en vez de darle importancia a la cantidad de citas que tiene una página dada se tendrá en cuenta también si es citada por páginas importantes. Visualicemos esta situación con un ejemplo; supongamos que tenemos dos páginas web que tratan sobre didáctica de la matemática, cada una con un enlace hacia ella, una referenciada desde www.rdm.penseesauvage.com (Recherches en Didactique Des Mathématiques) y otra desde www.mipagina.com. Ambas páginas tendrían la misma valoración pero sin embargo la primera debe-

ría tener más importancia.

Así surge la idea que consiste en decidir que la importancia x_i de cada página p_i es directamente proporcional a la suma de las importancias de las páginas que enlazan con ella.

De este modo, para la web del ejemplo de la figura 2.4 tendríamos que las importancias seguirían las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha x_4 \\x_2 &= \alpha(x_1 + x_3) \\x_3 &= \alpha x_2 \\x_4 &= \alpha(x_3 + x_5) \\x_5 &= \alpha(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

donde α es una cierta constante de proporcionalidad que influye en el valor de importancia de las páginas y $x_1, \dots, x_5$ son las soluciones de un sistema de ecuaciones.

Escribamos el sistema anterior en su forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Si llamamos x al vector de importancia de las páginas web y λ a α^{-1} , tenemos que resolver la ecuación

$$M^*x = \lambda x$$

para encontrar la solución del sistema. Por lo tanto, el vector de importancia buscado es un autovector de la matriz M^* .

El Teorema de Perron - Frobenius visto en el capítulo 3 nos asegura la existencia del vector buscado. Necesitamos, entonces, comprobar que se cumplen sus dos hipótesis para poder aplicarlo.

La matriz M^* es no negativa por construcción, con lo que cumple con la primer hipótesis del teorema. Enfoquémonos ahora en comprobar si es una matriz irreducible. Para esto deberemos analizar diferentes situaciones.

Se puede comprobar que la primer matriz de esta sección es irreducible pero nos encontrábamos en una situación ideal. Vamos a mostrar, en lo que sigue, casos donde la matriz no es irreducible.

- Páginas no enlazadas: Consideremos una Web formada por cuatro páginas de las cuales una de ellas no tenga enlaces saliente ni entrantes como la que describe la figura de abajo.

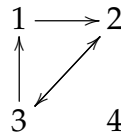


Figura 4.1: Web con una página no enlazada.

La matriz asociada a este ejemplo es

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dicha matriz es reducible por tener una fila (e incluso una columna) de ceros.

Debido a que este tipo de páginas (sin enlaces de entrada ni salida) no revisten interés en el modelo, no serán consideradas.

- Páginas web sin enlaces salientes: Esta situación es más habitual que se dé. Veamos un ejemplo ilustrativo.

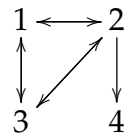


Figura 4.2: Página web sin enlace saliente.

Su matriz asociada es

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que al tener una columna de ceros no admite inversa.

En la realidad esta situación tampoco nos interesa porque si nos encontramos con una página sin enlace saliente lo que hacemos es ir a cualquier otra página de la red. Para trasladarlo a nuestro modelo vamos a considerar que si nos encontramos con una página con esta característica, podremos desplazarnos a cualquier otra página de la red con la misma probabilidad. Para representar este hecho con matrices, sustituiremos la columna de ceros por una columna en la que cada elemento es $1/n$, donde n es el número de nodos de la red, obteniendo la siguiente matriz:

$$M' = M^* + v d^T$$

donde $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de probabilidad $v = \frac{1}{n}(1; \dots; 1)^T$ y $d^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ se define $d_i = 1$ si $N_i = 0$ y $d_i = 0$ en otro caso, siendo i la columna con sus entradas nulas.

- Caso reducible: Nos puede pasar que navegando en la Web nos

encontremos con la siguiente situación

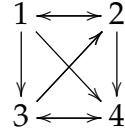


Figura 4.3: Caso reducible.

La matriz que obtendremos es

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

M^* es una matriz reducible (las dos primeras filas sumadas dan la cuarta fila).

Los diseñadores del modelo la modificaron creando una matriz irreducible M'' de la forma

$$M'' = \alpha M^* + (1 - \alpha)ve^T,$$

donde α es un valor comprendido entre 0 y 1¹, $e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ con $e^T =$

¹Al parámetro α se lo denomina damping (amortiguación) y se suele tomar $\alpha = 0,85$, que fue el valor asignado por Brin y Page. Este parámetro es objeto de estudio constante con el fin de mejorar el rendimiento del algoritmo.

$(1, \dots, 1)$ y v un vector de probabilidad que se suele tomar como en el caso anterior $v = \frac{1}{n}e$.

De este modo se consiguió una matriz irreducible para todos los casos a costa de hacerla densa.² El término $(1 - \alpha)ve^T$ se puede considerar como la probabilidad de que un usuario se canse de navegar siguiendo los enlaces y salte a una página cualquiera.

Al construir la matriz de forma tal que sea siempre irreducible, podemos aplicar el Teorema de Perron-Frobenius que nos asegura la existencia del vector de ordenación buscado. Pero como la demostración del teorema no es constructiva no podremos encontrarlo mediante el mismo, por lo cual habrá que recurrir a otros métodos para hallarlo. Otro obstáculo sería encontrar todos los autovectores asociados a la matriz (que resulta ser enorme) para quedarnos con aquel asociado al del autovalor máximo.

Para esto Google utiliza el *método de las potencias* que describiremos en la siguiente sección.

²A esta matriz se la denomina matriz de Google y podemos ver que es una matriz irreducible y estocástica lo que es fundamental al calcular el vector de importancias.

4.1. Cálculo del vector Page Rank

Supongamos que M es diagonalizable, entonces los autovectores de la matriz M forman una base de $\mathbb{R}^n$ ³. Ordenamos los autovectores de M de la forma $\{v_1, \dots, v_n\}$ de manera que los autovalores correspondientes estén ordenados como sigue

$$\lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Tomamos un vector $v \geq 0$ de $\mathbb{R}^n$ que puede escribirse como una combinación lineal de los autovectores v_i con $1 \leq i \leq n$ ya que éstos forman una base

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n,$$

donde los valores c_i son las coordenadas del vector v en la base considerada. No necesitaremos calcular explícitamente las coordenadas, sino que bastará con saber que existen. Multiplicamos a v por la matriz M a izquierda

$$Mv = M(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) = c_1 Mv_1 + c_2 Mv_2 + \dots + c_n Mv_n$$

y como los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ son autovectores de la matriz M obtenemos

$$Mv = c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_n \lambda_n v_n.$$

³En caso de que la matriz no sea diagonalizable se procede de modo análogo pero considerando una base de $\mathbb{R}^n$ obtenida mediante la descomposición asegurada por el Teorema de Cayley - Hamilton.

Observar que sólo es necesario calcular la parte de la izquierda de la igualdad y saber que la parte de la derecha existe. Repetimos la operación una vez más:

$$\begin{aligned}
 M(Mv) &= M^2v = M(c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \cdots + c_n\lambda_nv_n) = \\
 &= c_1\lambda_1Mv_1 + c_2\lambda_2Mv_2 + \cdots + c_n\lambda_nMv_n = \\
 &= c_1\lambda_1\lambda_1v_1 + \cdots + c_n\lambda_n\lambda_nv_n = \\
 &= c_1\lambda_1^2v_1 + \cdots + c_n\lambda_n^2v_n.
 \end{aligned}$$

Continuamos multiplicando el vector v por la matriz M hasta obtener:

$$M^k v = c_1\lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k v_n.$$

Supongamos que $c_1 \neq 0$. Dividiendo a ambos lados por la k -ésima potencia del autovalor de módulo máximo entonces

$$\frac{1}{\lambda_1^k} M^k v = c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n.$$

Pero como λ_1 es el autovalor de módulo máximo $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^k < 1 \forall i = 2, \dots, n$ y de esta forma

$$\frac{1}{\lambda_1^k} M^k v \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c_1 v_1.$$

De esta manera, al multiplicar reiteradamente por la matriz M vamos

determinando, cada vez con mayor precisión, el vector buscado, con una velocidad que depende del cociente entre los dos primeros autovalores.

El método descrito es conocido como Método de las potencias. Existen diferentes variantes que permiten un cálculo más eficiente del vector buscado, como los métodos de la potencia con extrapolación, el método adaptativo, el algoritmo del tipo Arnoldi, el método de agregación/desagregación, el método de la potencia particionado y en paralelo, el método PageRank asincrónico, métodos iterativos para la resolución de sistemas lineales.

Capítulo 5

Otras aplicaciones del algoritmo

PageRank

El algoritmo PageRank es ahora marca registrada de Google y está patentado en los Estados Unidos. Debido a temas legales, la patente está asignada a la Universidad de Stanford y no a Google. Sin embargo, la compañía de internet tiene derechos exclusivos sobre esa patente y Stanford recibió 1.800.000 acciones de Google por permitirle el uso exclusivo de la patente.

PageRank fue utilizado por Google hasta muy recientemente. En febrero de 2011 la compañía comenzó a hacer pruebas de un nuevo algoritmo de búsqueda bautizado "Google Panda", que esencialmente tiene la capacidad de modificar la importancia de secciones enteras de la lista, y no solamente páginas individuales. Google Panda reemplazó definitiva-

*CAPÍTULO 5. OTRAS APLICACIONES DEL ALGORITMO PAGERANK*₄₇

mente a PageRank en abril de 2011, y continúa liderando el mercado de buscadores de internet hasta el día de hoy.

Una versión modificada del PageRank [6] fue propuesta como alternativa al polémico factor de impacto ¹ elaborado por ISI (Institute for Scientific Information). Una implementación del mismo se puede encontrar en <http://www.eigenfactor.org>.

También se ha usado para predecir concentraciones humanas en calles o plazas [12], en análisis de redes de proteínas [11] o para la modelización de sistemas evolutivos [1] aplicando el algoritmo para el estudio de las extinciones de especies, en el que la importancia de las mismas se basa en el soporte vital que ofrecen para la supervivencia de otras especies.

Otra aplicación muy interesante y actual (2018 - año de mundial) es el uso de los datos de los mundiales de fútbol para establecer el ranking de los mejores equipos de la historia. Una clasificación como la de la FIFA pero basándose en una adaptación del PageRank [22]. En este caso la “importancia” se brinda según los partidos jugados por cada selección de fútbol en todas sus participaciones en los torneos de la copa del mundo desde 1930. Se le da valor, asimismo, al número de partidos ganados, a los goles conseguidos y a los resultados frente a equipos “grandes” (Argentina, Alemania, Brasil, Italia, que a pesar de ser un gran equipo, según el ranking, este año no lo veremos en Rusia 2018, etc.) que serían como

¹El FI (factor de impacto) es uno de los indicadores bibliométricos más utilizados que determinan anualmente la asignación de millones de euros en proyectos de investigación, promociones académicas, incentivos, etc.

CAPÍTULO 5. OTRAS APLICACIONES DEL ALGORITMO PAGERANK⁴⁸

los “sitios web populares” en el PageRank original. Luego se operan los valores de enfrentamientos para cuantificar la “importancia relativa” de cada selección de fútbol y establecer el respectivo ranking. Adicionalmente, son comparados los resultados con los del ranking histórico de la FIFA y se encuentra una alta correlación entre ambos listados.

A mediados del siglo pasado, se usaba un algoritmo similar para los estudios relacionados con la sociometría. En esa época, este algoritmo servía para calcular el estatus de un individuo en la sociedad. Más adelante, la Washington State University² se percató de que este algoritmo podía ser también de gran utilidad para encontrar moléculas de agua entre productos químicos venenosos.

En lo que respecta a salud, podemos mencionar que investigadores de la Universidad de Dresde (Alemania), con una modificación del algoritmo, han descubierto 7 moléculas que dan pistas muy interesantes para la gravedad de un tumor de cáncer de páncreas. El nombre con que bautizaron el algoritmo ha sido NetRank. El mismo combina mediciones de expresión génica con una red de relaciones conocidas entre los productos de los genes. El líder de la investigación Christof Winter lo explica de la siguiente manera:

“Mientras que el PageRank usa la información de enlace entre los documentos web para decidir cuáles son más relevantes, el NetRank utiliza la información de interacción biológica entre los productos de los genes

²Universidad Estatal de Washington

*CAPÍTULO 5. OTRAS APLICACIONES DEL ALGORITMO PAGERANK*⁴⁹

para decidir cuáles son más importantes a la hora de predecir los resultados”.

Hasta el momento de la presente investigación el estudio ha sido experimentado con 30 pacientes, identificando 7 moléculas para determinar la gravedad del tumor, y así saber la intensidad de la quimioterapia que se debe aplicar al paciente [18].

Este método puede ayudar a los médicos a decidir si un paciente debe recibir quimioterapia o no. La predicción confiable de la supervivencia y la respuesta a la terapia basada en marcadores moleculares tiene un gran potencial para mejorar y personalizar las terapias de los pacientes en el futuro.

Un último ejemplo que vamos a mencionar, y como podemos ver e imaginar, existen muchísimas más, es quizás la aplicación más sorprendente, además de ser la aplicación práctica más antigua que se conoce y se debe a un economista, Wassily Leontief, por aquel entonces profesor de Harvard, quien desarrolló el modelo Input-Output –que mide los flujos de factores intermedios entre sectores- tratando la economía como una red (en su representación matricial). El objetivo de Leontief era identificar qué sectores económicos constituían un “cuello de botella” al requerir demasiados factores productivos cuando la demanda de su producto aumentaba, para lo cual recurrió a una versión primitiva del PageRank de Google. Finalmente, Leontief recibió el Premio Nobel de Economía de 1971 por su conocido modelo.

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Matrices

Si A es cualquier matriz $m \times n$, entonces la *transpuesta de A* , denotada por A^T , se define como la matriz $n \times m$ que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de A ; es decir, la primera columna de A^T es la primera fila de A , la segunda columna de A^T es la segunda fila de A , y así sucesivamente.

Observar no sólo que las columnas de A^T son las filas de A , sino que las filas de A^T son las columnas de A . Así, el elemento en la fila i y la columna j de A^T es el elemento de la fila j y la columna i de A , es decir, $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$.

Definición 6.1 Dada una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, un vector no nulo $x \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) y un número $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), el vector x se dice vector propio o

autovector de A con valor propio o autovalor asociado λ si y sólo si se verifica

$$Ax^t = \lambda.x^t$$

6.2. Multiplicidad de un Autovalor

λ es autovalor de $A \iff \det(A - \lambda I) = 0$

Es decir que los autovalores son las raíces del polinomio característico. La multiplicidad algebraica de un autovalor λ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico $p(\lambda)$.

La multiplicidad geométrica de un autovalor λ es la dimensión del autoespacio asociado.

6.3. Matriz Estocástica

Definición 6.2 Sea P una matriz cuadrada de $n \times n$. Llamaremos a P matriz estocástica si:

- Todas sus entradas son no negativas, $p_{ij} \geq 0 \forall i, j, 0 \leq i, j \leq n$.
- La suma de sus coeficientes en cada fila vale 1, es decir si

$$(\forall i = 1, \dots, n) \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$$

P es doblemente estocástica si además la suma de sus coeficientes en cada columna también vale 1, o sea

$$(\forall j = 1, \dots, n) \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$$

6.4. Matriz de permutación

Definición 6.3 Una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$ es una función biyectiva de este conjunto sobre si mismo. El conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$ se denota por S_n . En otras palabras, la notación $\varphi \in S_n$ significa que φ es una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Ejemplo 4 La función $\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida mediante la regla $\varphi(1) = 3, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 5, \varphi(4) = 4, \varphi(5) = 2$, es una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, esto es, $\varphi \in S_5$. La regla de correspondencia anterior se escribe de manera más breve:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (3, 1, 5, 4, 2).$$

Definición 6.4 Sea $\varphi \in S_n$, la Matriz de Permutación P_φ se define mediante la fórmula:

$$P_\varphi = (\delta_{\varphi(i),j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Es decir, en la i -ésima fila de la matriz P_φ la $\varphi(i)$ -ésima entrada es 1 y todas las demás son 0.

Observación: La i -ésima fila de la matriz P_φ es igual a la $\varphi(i)$ -ésima fila de la matriz identidad. Por lo tanto, la matriz P_φ se obtiene de la matriz identidad al intercambiar el orden de filas.

Ejemplo 5 A la permutación φ del ejemplo anterior se le asocia la matriz

$$P_\varphi = P_{3,1,5,4,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que entre las entradas $(P_\varphi)_{1,j}$ de la primer fila de P_φ la única con entrada igual a 1 es $(P_\varphi)_{1,3}$ con $j = 3 = \varphi(1)$, y las demás entradas de esta fila son nulas. Usando la delta de Kronecker podemos escribir

$$(P_\varphi)_{1,j} = \delta_{\varphi(1),j}.$$

Las entradas de las otras filas también se expresan a través de la delta de Kronecker.

6.5. Matrices no negativas o positivas

Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se dice *no negativa* si todos sus elementos son mayores o iguales a 0 y se nota $A \geq 0$. Si todos los elementos de A son positivos, la matriz se dice *positiva* y su notación es $A > 0$. Nótese

que $A \geq 0$ y $A \neq 0$ no implican $A > 0$.

Si m o n son iguales a 1, hablaremos de *vectores no negativos*, respectivamente *positivos* y lo notaremos $v \geq 0$ y $v > 0$ respectivamente. Para una información más detallada ver en [10].

SACAR LO QUE SIGUE

Definición 6.5 Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se llama *digrafo asociado a la matriz A* al digrafo $D(A) = (V, E, a)$ cuyo conjunto de vértices es $V = \{1, 2, \dots, n\}$ y con arcos $(i, j) \in E$ siempre que $a_{ij} \neq 0$ y de peso a_{ij} .

Ejemplo 6 Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ entonces su digrafo $D(A)$ viene dado por la

Figura 6.1.

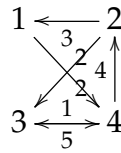


Figura 6.1: Digrafo

Sea σ una permutación de $\{1, \dots, n\}$. Sea $M(\sigma) := (\delta_{i, \sigma(j)})$ la matriz asociada a la permutación σ , donde δ_{ij} son las deltas de Kronecker; $M(\sigma)$ es una matriz de ceros y unos con un solo 1 en cada fila y columna; es

decir, $M(\sigma)$ es una matriz de permutación. Si permutamos las columnas de $A = (a_{ij})$ de acuerdo con la permutación σ y después permutamos las filas de la matriz resultante de la misma manera, obtenemos una matriz $B = (b_{ij})$, cuyos elementos b_{ij} vienen dados en función de los elementos de A por la expresión

$$b_{ij} = a_{\sigma(i), \sigma(j)}.$$

Además,

$$B = M(\sigma)^T A M(\sigma).$$

También nos interesa señalar que los digrafos asociados a las matrices A y B son isomorfos; siendo el isomorfismo precisamente la permutación

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

Ejemplo 7 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

su digrafo asociado aparece en la parte (a) de la Figura 7. Si consideramos la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\{1, 2, 3\}$, se tiene que

$$B = M(\sigma)^T A M(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & 0 & a_{31} \\ 0 & a_{13} & 0 \end{pmatrix}.$$

El digrafo de B aparece en la parte (b) de la Figura 7.

La matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ llama **reducible** si existe una matriz de permutación P de orden n tal que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

donde A_{11} y A_{22} de órdenes menores que n y ≥ 1 , cuando $n \geq 2$; o si $n = 1$ y $A = (0)$. Si no existe P entonces A es **irreducible**. Otra definición equivalente de matriz reducible es la siguiente. Si el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ puede ser partido en dos subconjuntos complementarios no vacíos $\{i_1, \dots, i_\mu\}$ y $\{j_1, \dots, j_\nu\}$, ($\mu + \nu = n$), tales que $a_{i_\alpha j_\beta} = 0$ ($\alpha = 1, \dots, \mu; \beta = 1, \dots, \nu$), se dice que la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es reducible.

6.6. Homeomorfismo

Definición 6.6 Sean X e Y espacios topológicos, y f una función de X a Y ; entonces, f es un homeomorfismo si se cumple que:

- f es una biyección
- f es continua
- La inversa de f es continua

Si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, X se dice homeomorfo a Y . Si dos espacios son homeomorfos entonces tienen exactamente las mismas propiedades topológicas.

Bibliografía

- [1] Allesina, S.; Pascual, M. *Googling Food Webs: Can an Eigenvector Measure Species' Importance for Coextinctions?* PLOS Computational Biology, Issue 9, Volume 5, September 2009. <http://dx.plos.org/10.1371/journal.pcbi.1000494>.
- [2] Armas, A. *El Teorema de Perron-Frobenius y su aplicación en el algoritmo de búsqueda de Google*
- [3] Bapat, R. y Raghavan, T. *Nonnegative Matrices and Applications*, Cambridge University Press, 1997.
- [4] Barrero, A., Wagner de Garcia, G. y Méndez Parra, R. *Introducción a la Teoría de Grafos*, Ediciones Elizcom, 1ra edición, 2010.
- [5] Berman, A. y Plemmons, R. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Classics in Applied Mathematics, Academic Press, 1979.

- [6] Bollen, J.; Rodriguez, M. A. y Van de Sompel, *Journal Status..* Digital Library Research & Prototyping Team, Scientometrics, volume 69, number 3, pp. 669-687, 2006 <http://arxiv.org/abs/cs/0601030>. (Consulta: abril 2018).
- [7] Brin, S., Page, L., Motwani R., Winograd T. *The PageRank citation ranking: bringing order to the web*. Tech Rep Stanford Digital Library Technologies Project. 1998.
- [8] D'Andrea, C. *El álgebra lineal detrás de los buscadores de internet*. Universidad de Barcelona, Departamento de Algebra y Geometría. (2012) [http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2016/algebra\\$_lineal](http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2016/algebra$_lineal)
- [9] Fernández, P. *El secreto de Google y el Álgebra lineal*, Bol. Soc. Esp: Mat. Apli. n 30 (2004), 115-141.
- [10] Gracia, J. M. *Matrices no negativas, paseos aleatorios y cadenas de Markov*, Universidad del País Vasco Matemática Aplicada y Estadística, 2002.
- [11] Ivan, G; Grolmusz, V. *When the Web meets the cell: using personalized PageRank for analyzing protein interaction networks*. Bioinformatics. Vol. 27, No. 3. pp. 405- 407, 2011. <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btq680>. (Consultado: abril 2018).
- [12] Jiang, B. *Ranking spaces for predicting human movement in an urban environment.*, International Journal of Geographical Information Science 23

- (7) 823-837, 2006. <https://arxiv.org/abs/physics/0612011v4> (Consultado: abril 2018).
- [13] Lancaster, P. y Tismenetsky, M. *The Theory of Matrices with Applications*. Academic Press, second edition, 1985.
- [14] Lipschutz, S. y Lipson, M. *Matemáticas Discretas*, Mc Graw Hill, 3ra edición, 2009.
- [15] Milnor, J., *Analytic proofs of the "hairy ball theorem" and the Brouwer fixed-point theorem*
- [16] Pedroche, F. *Métodos de cálculo del vector PageRank*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 0 (0000), 1-24.
- [17] Varga, Richard S. *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, INC, 1962.
- [18] Winter, C., Kristiansen, G., Kersting, S., Roy, J., Aust, D., Knösel, T., etc. *Google Goes Cancer: mejora de la predicción de resultados para pacientes con cáncer según el ranking basado en redes de genes marcadores*. PLoS Comput Biol, 2012. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1002511> (Consultado: mayo 2018).
- [19] Wen-Wei Lin, *Lecture Notes of Matrix Computations*. Department of Applied Mathematics. National Chiao Tung University Hsinchu, Taiwan 30043, R.O.C. September, 2010 http://jupiter.math.nctu.edu.tw/~smchang/0101/lin_sep2010.pdf

FUENTES ELECTRÓNICAS:

- [20] http://mate.dm.uba.ar/~jeronimo/algebra_lineal/Capitulo5.pdf (Consultado: Febrero 2018).
- [21] http://esfm.egormaximenko.com/linalg/permutation_matrices.pdf (Consultado: marzo 2018).
- [22] <https://arxiv.org/pdf/1503.01331.pdf> Extraído abril 2018. <http://www.eigenfactor.org>. (Consultado: mayo 2018).