



***Universidad Nacional de La
Matanza***

Secretaría de formación continua

*Tesis de licenciatura en Matemática
aplicada*

*Análisis de parámetros medibles en un
modelo primario en la oscilación de
puentes colgantes*

Autor: Igne Guillermo Raúl

Asesor:

Roberto Mestorino

Año: 2012

Agradecimientos

A mi Esposa e hija por el tiempo que les he sacado y porque siempre supieron que el estudio y la capacitación eran importantes en mi carrera como docente. A ellos mi agradecimiento infinito

A mi hijo Gian Benjamín de cinco meses que me alegra la vida cada día.

A mi Madre y mi hermano Gustavo.

Al profesor Roberto, por su paciencia, humildad y sabiduría.

A Paco, por ayudarme y estar siempre dispuesto no solo a corregirme sino también a sugerirme cosas siempre positivas. A él mi gratitud.

A personas que tuve el gusto de conocer y tratar, que provocaron el gusto por la matemática aplicada: Javier Etcheverry, Pablo Marino del centro de investigación industrial (CINI).

A muchos docentes y compañeros de la carrera que colaboraron conmigo.

A todos ellos, gracias

Índice

1	Introducción.....	1
1.1	Breve descripción de un puente colgante.....	1
1.2	Presentación del problema.....	1
1.3	Contenido del trabajo.....	4
1.4	Trabajos realizados.....	5
2	Ecuaciones diferenciales como sistemas.....	6
2.1	Introducción.....	6
2.2	Sistemas autónomos.....	8
2.3	Algunas nociones sobre tipo de soluciones.....	9
2.4	Retratos de fase.....	10
2.5	Características de los retratos de fase.....	10
3	El método de Runge-Kutta.....	11
3.1	Introducción inicial.....	11
3.2	Descripción del algoritmo de Runge-Kutta.....	11
4	Obtención de las ecuaciones para el movimiento vertical y de rotación.....	15
4.1	Introducción previa: Las ecuaciones de Euler-Lagrange.....	15
5	Análisis cualitativo de un modelo simplificado de Glover, Lazer y McKenna para el puente de Tacoma.....	23
5.1	Análisis para distintos valores de los parámetros: Modelo lineal de movimiento longitudinal.....	23
5.1.1	Planteo analítico.....	25
5.1.2	Resolución numérica	26
5.2	Análisis cualitativo del modelo con oscilaciones forzadas: Efecto del viento.....	29
5.3	Análisis de la amplitud, amortiguamiento y frecuencia para los modelos primarios El efecto de resonancia.....	34
5.3.1	Resolución con exponenciales complejos.....	35
5.4	Análisis para distintos valores de los parámetros.....	37

5.4.1	<i>Resolución numérica para el movimiento de rotación:Comportamiento cualitativo.....</i>	38
	<i>Modelo lineal y no lineal de los movimientos transversales.....</i>	39
5.5	<i>Parámetros medibles a través de las filmaciones del derrumbe del puente de Tacoma... ..</i>	43
5.6	<i>Algunos cálculos adicionales: Sustentación y resistencia aerodinámica.....</i>	48
5.7	<i>El debate sigue: ¿Qué causó el colapso del puente de Tacoma.....</i>	50
5.8	<i>Conclusiones finales.....</i>	50
	<i>Apéndice A.....</i>	52
	<i>Apéndice B.....</i>	54
	<i>Apéndice C.....</i>	56
	<i>Apéndice D.....</i>	57
	<i>Apéndice E.....</i>	58
	<i>Apéndice F.....</i>	60
	<i>Apéndice G.....</i>	62

Resumen

El siguiente trabajo propone analizar, en la primera etapa, en forma analítica, cualitativa y numérica ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales y no lineales ordinarias que modelan, en forma muy simplificada, el movimiento oscilatorio de un puente colgante.

Este trabajo se baso principalmente en los trabajos realizados por los matemáticos Glover, Lazer y McKenna¹ a fines del siglo pasado explicando el colapso del puente de Tacoma Narrows en Washington en Julio de 1940. Este desastre fue motivo de muchas investigaciones que desvelaron a los científicos durante casi 60 años sobre la causa del colapso. Durante este tiempo, muchos concluyeron que la caída del puente se debió a la resonancia.

Como toda estructura flexible sufre vibraciones en un rango de frecuencia determinada y para que se produzca la resonancia debe haber una coincidencia exacta entre la frecuencia natural del puente y la frecuencia del forzamiento que sufrió la estructura mediante el efecto del viento, que en horas previas al derrumbe no superaban los 65 Km. por hora.

El objetivo principal de la primera parte del trabajo es estudiar estas ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales y no lineales, siguiendo el procedimiento que estos matemáticos publicaron en sus trabajos, no solo en cuanto a su deducción sino también en utilizar un método numérico (por ejemplo Runge-Kutta) para estudiar el comportamiento de las soluciones para distintos valores de los parámetros involucrados.

Algunos datos (parámetros) son obtenidos del puente de Tacoma que se derrumbó y de las condiciones del viento en ese momento, y bajo que valores o rango de los mismos, la resonancia podría haber sido la causante del colapso (los estudios actuales ya no consideran esto) o los efectos del viento con movimientos torsionales de gran magnitud. Algunos de estos parámetros son medibles a través de las filmaciones de la época. Este tipo de movimiento se explica dentro del contexto de la aerodinámica llamado flameo o flutter. Este fenómeno se explicará brevemente en el capítulo 5.

En la segunda etapa del trabajo se analiza parámetros medibles a través de las filmaciones, como frecuencia, amplitud, periodo. Esto nos permitirá realizar un comentario sobre los momentos finales del puente.

¹ Estos matemáticos contemporáneos fueron los primeros en abordar en forma matemática el problema y explicar las causas del colapso.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Breve descripción de un puente colgante

El puente colgante más elemental es el puente catenaria² donde los cables principales se anclan en las torres. En los puentes de grandes luces para evitar la flexión de las torres se prolongan los cables al otro lado de las mismas para bajarlos a tierra y anclarlos en contrapesos o en el propio tablero. El nexo entre las catenarias y el tablero son cables denominados péndolas.

Una virtud de este tipo de estructura y quizás también su defecto es la ligereza. Debido a esto son fáciles de montar, pero son vulnerables ante la acción de la naturaleza, sobre todo vientos, terremotos por lo que son proclives a presentar oscilaciones laterales³, longitudinales y torsionales.

En los grandes puentes se obliga a darle rigidez al tablero, aunque este concepto no es muy claro, esto significa agregar vigas trianguladas en sus laterales con el objeto de evitar torsiones o diseñarlos de formas aerodinámicas llamadas cajón cerrado que resiste el efecto del viento y minimiza su efecto.

1.2 Presentación del problema

El modelo físico más sencillo de una estructura vibrante es una masa suspendida de un resorte. La superficie rodamiento de un puente cuelga de cables verticales unidos a cables regularmente espaciados soportados por torres. Si se considera que los cables verticales son largos resortes (Figura 1.1), es muy tentador, (desde el punto de vista matemático y físico, modelar las oscilaciones verticales de la superficie como solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden lineal homogénea. Si

² Es una curva que adopta un hilo flexible por acción de su propio peso. Aunque la forma que adopta el cable principal es más bien una parábola. La diferencia entre ambas es mínima

³ El puente Golden Gate en San Francisco durante un viento de 96 Km/h tuvo oscilaciones laterales de hasta 180 cm y oscilaciones verticales de 60 cm

consideramos un efecto del viento que proporcione de alguna forma un forzamiento periódico, el modelo es ahora una ecuación diferencial de segundo orden inhomogénea.

El modelo podría ser usado como una primera manera de explicar el colapso del puente de Tacoma⁴, que por muchos años se supuso (inclusive algunos investigadores lo siguen pensando hoy en día) se debió a la resonancia [2].

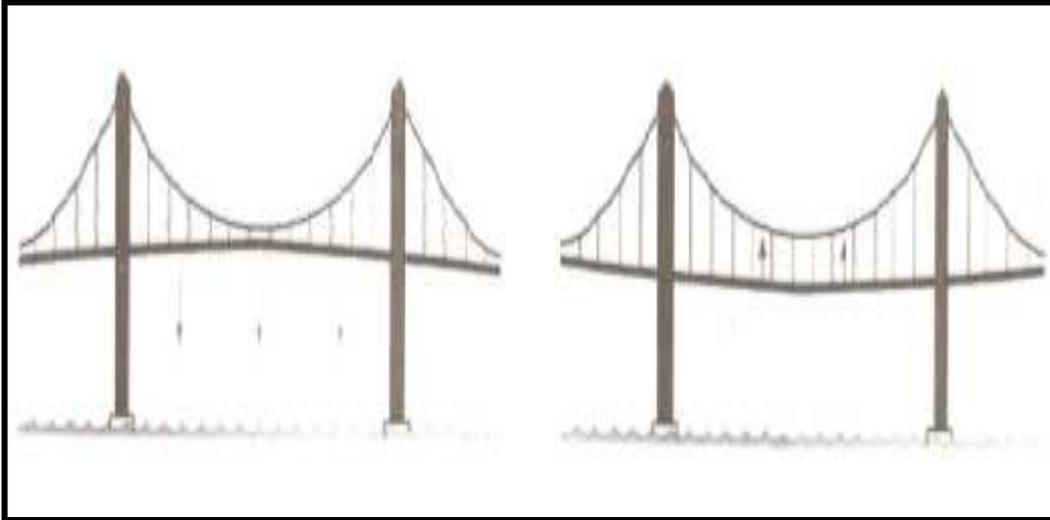


Figura 1.1: La estructura modelada como resortes en tensión (cables estirados) en la figura de la derecha y sueltos en la figura de la izquierda.

A raíz del derrumbe se llegó a crear comisiones para estudiar los fenómenos que lo provocaron y se comprobó lo poco que se sabía sobre inestabilidades en tableros frente a diferentes acciones del tipo aerodinámicas como torbellinos, galopes transversal, galope por estelas, flameo, bataneo[15].

Pero el problema no es tan simple, la resonancia es un fenómeno lineal, para que ello haya ocasionado el colapso se tendría que cumplir que la frecuencia natural de la estructura (en nuestro caso en puente) y la frecuencia de la función perturbadora (en este caso el viento) deban coincidir. Para que esto ocurra no debe haber amortiguamiento en el sistema, una situación que no es posible ya que por tratarse de estructuras flexibles, debe existir un parámetro⁵ de amortiguamiento pequeño ya establecido en este tipo de

⁴ El puente de Tacoma, situado en Washington, fue inaugurado el 1º de Julio de 1940 después de aproximadamente dos años de construcción. La longitud total del puente fue 1523 metros y la luz de la estructura (el tramo entre las dos torres) fue de 853 metros.

⁵ Es una cantidad que no depende de la variable independiente (el tiempo en este caso) pero que toma diferentes valores de acuerdo a la aplicación considerada

estructuras. Estas hipótesis se mantuvieron durante un tiempo prolongado (casi 60 años), hasta que investigaciones posteriores, casi al comienzo del siglo veintiuno, determinaron que la resonancia no explica lo que provocó el derrumbe sino los efectos no lineales de las ráfagas de viento fuerte que azotaron en ese momento. También comentaremos las ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales que describen el movimiento torsional modelado como una rotación.

En la ciencia e ingeniería hoy en día existen tres enfoques para el estudio de las ecuaciones diferenciales: analítico, cualitativo y numérico. El más usado es el numérico puesto que existen paquetes de programación (Matlab, Maple, Mathematica, etc) que automatizan en gran forma el proceso para obtener soluciones numéricas. La intención es entender el sistema físico y el comportamiento de las soluciones. En este trabajo incluiremos en los apéndices códigos de las soluciones de las ecuaciones con los tres programas mencionados.

El objetivo principal es no solo obtener las ecuaciones diferenciales que gobiernan en forma simplificada y primaria del movimiento vertical (denominado en la literatura como movimiento de flexión) y el movimiento torsional del puente(Figura 1.2), sino resolver las ecuaciones utilizando, para la ecuación diferencial lineal, el método analítico conocido como coeficientes indeterminados [3], [7]. Este método lo utilizaremos para el movimiento vertical. Para la ecuación diferencial no lineal, que modela el movimiento torsional, el método a utilizar es el de Runge-Kutta. Con este método obtendremos, ante distintos valores de los parámetros que intervienen (masa, amortiguamiento, amplitud, frecuencia de forzamiento), distintos gráficos, como posición y variación de la posición con respecto al tiempo y planos de fase. Y tal como mencionamos en la introducción hay valores medibles en las filmaciones⁶ de la época, por ejemplo, período, y por lo tanto frecuencia, amplitud, velocidad angular. Esto nos brindará información cualitativa y cuantitativa del comportamiento de un puente y lo relacionaremos con el de Tacoma.

⁶ Las filmaciones están disponibles en You Tube[13] realizadas minutos antes del derrumbe el 7 de Noviembre de 1940, justo cuatro meses después de la inauguración.

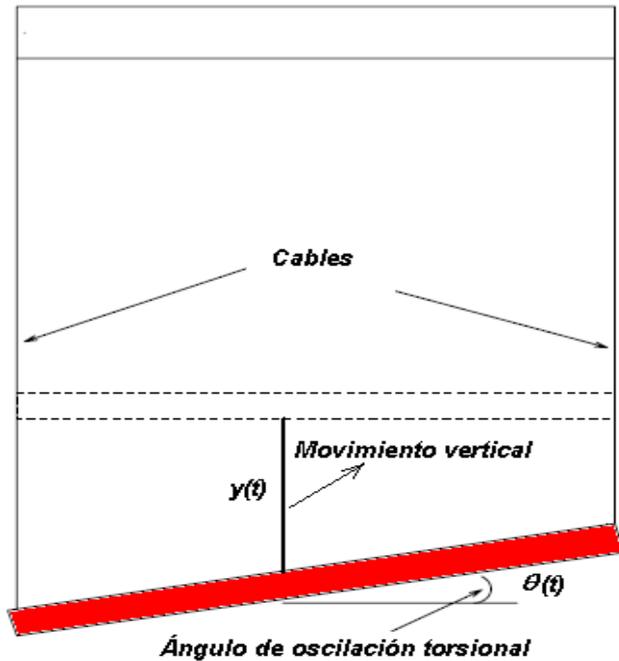


Figura 1.2: Oscilación verticales y torsionales con respecto al centro de gravedad del ancho del puente [1].

1.3 Contenido del trabajo

En el Capítulo 2 comentaremos como una ecuación de segundo orden se puede escribir como sistema y a partir de ahí analizar la geometría del mismo para distinto tipos de soluciones. En el Capítulo 3 se explicará el método de Runge-Kutta, en principio para una sola ecuación y luego este método se adapta para sistemas. Capítulo 4 comentaremos la aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange para las deducciones de las ecuaciones que se utilizarán en las simulaciones.

Por último en el Capítulo 5 presentaremos las ecuaciones variando los parámetros que utilizaremos en el análisis cualitativo y numérico. Haremos una presentación del modelo presentado por los matemáticos Lazer, Glover y McKenna para un puente hipotético y analizaremos las ecuaciones diferenciales, analizadas como sistema, para distintos tipos de forzamiento, en el cual consideraremos como aproximación un forzamiento periódico. Si bien el desarrollo no responde a ningún puente en particular, el análisis cualitativo de la variación de los parámetros llega a resultados sorprendentes dándonos la pauta de lo que pudo haber ocurrido en el puente del estrecho de Tacoma antes del derrumbe en noviembre de 1940.

Para finalizar en el mismo capítulo haremos un análisis de la información que nos brindan las filmaciones [13] momentos después de la inauguración y momentos previos al colapso.

Se agregaran apéndices donde figuran los códigos utilizados para las simulaciones. También se comentarán algunos comandos muy útiles para resolver ecuaciones con los programas antes mencionados. Comentaremos algunos comandos del programa Mathematica y emplearemos algunos programas obtenidos de la página de Wolfram Research que nos permite simular en forma simultánea para los distintos valores de los parámetros.

1.4 Trabajos realizados

La gran cantidad de trabajos, desde los escritos pioneros de Von Karman⁷ cuyos ensayos en túnel de viento dieron una primera explicación sobre los momentos finales del puente. El trabajo de Farquharson⁸ realizando mediciones en la propia estructura momentos antes del colapso hasta Levy y Salvadori⁹ y las filmaciones de la época, fueron, desde entonces, consulta obligatoria de quien investigara en el tema.

A raíz de esto surgen los estudios sobre la aeroelasticidad como prioridad en cualquier estudio de dinámica estructural. La aeroelasticidad estudia la interacción entre las deformaciones de la estructura y las fuerzas aerodinámicas. Los análisis matemáticos de este problema fueron interesando a la comunidad ya que con el avance de las computadoras, pudieron hacerse estudios primarios con ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales de los efectos sobre la estructura por la acción del viento. Inicialmente se consideraba una función de forzamiento periódica, aunque no sea razonable ya que es improbable que los vientos turbulentos tengan amplitud y frecuencias constantes[3]. Cabe señalar con respecto a esto, que los ensayos en túnel de viento realizados por Von Karman, explican bien la formación de vórtices, tanto en la superficie superior como inferior del puente, generando así una fuerza perpendicular en dirección normal al flujo, modelado en una primera aproximación como una función sinusoidal con respecto al tiempo.

⁷ Von Karman, Theodore (1881-1963), Ingeniero húngaro-estadounidense que realizó importantes aportes a la aeronáutica y uno de los precursores en el estudio de fenómenos aeroelásticos.

⁸ Farquharson, Frederick (1895-1970), Ingeniero. Fue uno de los primeros científicos en estudiar el derrumbe del puente de Tacoma. Lo llamativo es que realizó observaciones minutos que la estructura se desplomara.

⁹ Estos ingenieros son citas obligatorias de todo aquel que estudie este tipo de estructuras.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales como sistemas: Consideraciones básicas

2.1 Introducción

En este capítulo realizaremos algunas nociones breves (algunas consideraciones más detalladas se pueden consultar en [2] y [3]) sobre el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Esta simplificada introducción no brindará información importante para trabajar con problemas que involucran sistemas no lineales de primer orden.

Un sistema que tiene la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad 2.1$$

A este sistema como 4.1 de n ecuaciones de primer orden se lo conoce como sistema de primer orden.

Cada una de las funciones g_1, g_2, \dots, g_n es lineal en las variables dependientes x_1, x_2, \dots, x_n , entonces la forma del sistema de ecuaciones lineales de primer orden tiene la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{array} \right. \quad 2.2$$

Los coeficientes a_{ij} y las funciones f_i son continuas en un intervalo común. Cuando $f_i(t) = 0$, $i=1,2,\dots,n$ se dice que el sistema es lineal homogéneo; en caso contrario se dice sistema inhomogéneo o no homogéneo.

Esto admite escribirse también en forma matricial

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_X + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}}_F \quad 2.3$$

O simplemente como

$$X' = Ax + F$$

Como gran parte de la teoría de sistemas de este tipo parte de la teoría de ecuaciones de primer orden, si tenemos el problema de valor inicial en un intervalo t

$$x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad 2.4$$

donde $\varphi_i = 1, 2, 3, \dots, n$ son constantes dadas. Entonces el problema de valor inicial responde a la siguiente planteo siendo $\dot{X} = A(t)x + F(t)$ la ecuación del modelo a resolver y $x(t_0) = x_0$ la condición inicial.

2.2 Sistemas autónomos

En los sistemas de ecuaciones donde no aparece la variable independiente se denominan autónomos. Estos sistemas tienen la particularidad de evolucionar con ecuaciones que dependen solo de las variables dependientes.

Estos sistemas pueden escribirse como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad 2.5$$

También pueden escribirse como sistemas las ecuaciones diferenciales de segundo orden que son de la forma

$$y'' = g(y, y') \quad 2.6$$

La ecuación 4.4 puede escribirse como un sistema autónomo reduciendo el orden del mismo incrementando el número de variables dependientes con solo realizar un cambio de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{dy}{dt} \\ \frac{dv}{dt} = g(v, y) \end{array} \right. \quad \text{siendo} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \quad 2.7$$

Esto nos brinda otra manera de representar el modelo en cuestión como veremos en el modelo de oscilación del puente en el capítulo 5.

Otro tipo de sistema es el dinámico, aquí esta incluida la variable tiempo (t) y cuya solución se llama estado del sistema o respuesta del sistema

Otra manera interesante de representar un sistema es mediante un campo vectorial. Cuando es $n=2$ como en las ecuaciones 2.5 se pueden escribir de la forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v(t) \\ \frac{dv}{dt} = g(v(t), y(t)) \end{cases} \quad 2.8$$

Si llamamos $\vec{V} = (v(t), g(v(t), y(t)))$, este vector del sistema 2.6 define un campo vectorial en una región del plano yv

2.3 Algunas nociones sobre tipos de soluciones

Una solución constante $y(t_0) = y_0, v(t_0) = v_0$ del sistema 2.6 se e llama punto crítico o punto estacionario. Este tipo de solución se llama de equilibrio y puede determinarse resolviendo el sistema de ecuaciones del segundo miembro de 2.6

$$\begin{cases} v(t) = 0 \\ g(v(t), y(t)) = 0 \end{cases} \quad 2.9$$

En el caso del problema, un hipotético vano del puente esta en equilibrio, suponiendo que ese sector de la estructura modelada como un movimiento oscilatorio, cuando los cables que la sostienen están siempre bajo tensión.

Otro tipo de solución se denomina periódica (denominada ciclo). La estructura tiene oscilaciones con respecto a la posición de equilibrio bajo ciertas condiciones iniciales impuestas al sistema.

2.4 Retratos de fase

En un gráfico en el plano yv que representa un punto para cada par (y_0, v_0) , las variables dependientes, pero no muestra explícitamente el valor correspondiente de la variable independiente. Se pueden dibujar varias curvas solución dependiendo de las condiciones iniciales y como se verá en el último capítulo (ver Figura 5.5) las solución crece y decrece alrededor de la solución de equilibrio.

2.5 Características de los retratos de fase

Como dijimos anteriormente son conjuntos de trayectorias en el plano yv que surgen de representar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales 2.6. Estas soluciones dependen, si escribimos el sistema en forma matricial, de los autovalores del mismo¹⁰. Los resultados determinan la naturaleza geométrica de las soluciones (esto se puede ver con mayor detalle en [2] y [3]).

Cuando analizamos el sistema en la sección 5.5 las soluciones dieron raíces complejas conjugadas, el comportamiento de las soluciones en ese caso es moviéndose en espiral alrededor del origen o alejándose de él [3]. En el caso del puente, la estructura tiende a reducir las amplitudes de las oscilaciones, entonces la solución en el retrato de fase se mueve en espiral hacia al origen.

¹⁰ Cuando analizamos una ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes completa, los autovalores surgen de resolver directamente la ecuación característica que responde a un polinomio cuadrático. A partir del tipo de raíces ,determino la solución de la ecuación homogénea , denominada también de estado transitorio en algunos casos

Capítulo 3

El método de Runge-Kutta

3.1 Introducción inicial

No siempre una ecuación diferencial admite una solución que se pueda expresar en forma explícita o implícita; en muchas situaciones de la matemática aplicada debemos conformarnos con una aproximación. Si encontramos una solución, ella representa un conjunto de puntos en un plano o en el espacio.

Hay métodos que nos permiten realizar este tipo de aproximaciones, por ejemplo, el método de Euler pero es poco usado en las aplicaciones debido a su escasa precisión aunque si tenga gran importancia en la teoría por ser en algún otro método, la base para su desarrollo [19]. Pero existe un algoritmo denominado estándar para la aproximación numérica de soluciones de ecuaciones diferenciales y sistemas. Este método se llama Runge-Kutta en honor a dos matemáticos alemanes que descubrieron este método hace más de un siglo.

3.2 Descripción del algoritmo de Runge-Kutta

Cuando realizamos integración numérica (en definitiva eso hacemos para encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales) podemos utilizar métodos como el método de trapecios, la regla de Simpson que aproxima mediante interpolación parabólica. Estos permiten obtener mejores aproximaciones para su resolución.

Por ejemplo el método de Simpson realiza un promedio ponderado donde se le asigna una importancia doble a los valores en los

puntos medios por sobre los puntos extremos. Básicamente el algoritmo de Runge-Kutta es similar a este método.

Para calcular el valor de y_{k+1} a partir y_k se emplean cuatro pendientes dadas por la función $f(t,y)$ definida en la ecuación diferencial. A esas pendientes las designamos como m_k, n_k, q_k, p_k , para las cuales necesitamos variables intermedias.

Para la determinación de las pendientes se procede según se detalla a continuación:

1) La pendiente m_k se calcula de la forma que el método de Euler [19], $m_k = f(t_k, y_k)$ (Figura 3.1)

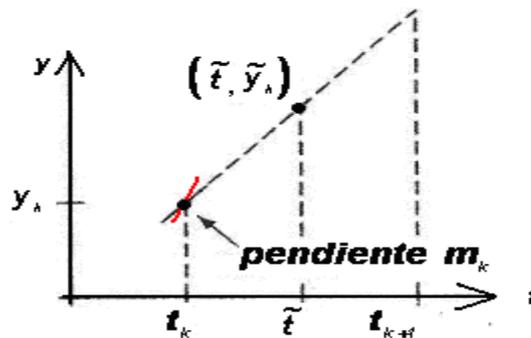


Figura 3.1: El gráfico muestra el primer paso para calcular la pendiente m_k

2) Para producir la segunda pendiente n_k utilizamos m_k con la diferencia que nos movemos sobre el eje hasta la mitad del intervalo $t-tilde = t_k + \frac{\Delta t}{2}$. Como utilizamos la primera pendiente para el punto $(t-tilde, y-tilde_k)$ donde $y-tilde_k = y_k + m_k \frac{\Delta t}{2}$ (Figura 3.2)

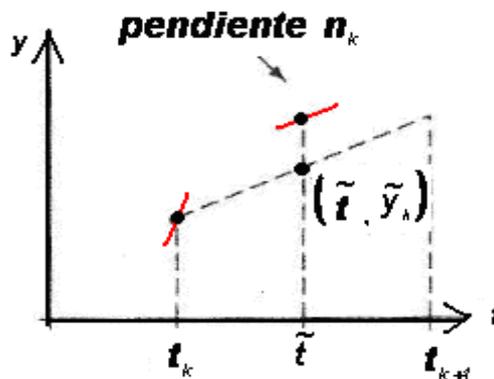


Figura 3.2: El gráfico muestra el primer paso para calcular la pendiente n_k

Una vez determinado ese punto estamos en condiciones de presentar el cálculo de la segunda pendiente n_k de la forma

$$n_k = f(\tilde{t}_k, \tilde{y}_k)$$

3) Ahora para calcular q_k , empleamos la pendiente n_k . Ahora nos movemos de (t_k, y_k) a la línea $t = \tilde{t}_k$ a lo largo de la pendiente mencionada para obtener un nuevo número \tilde{y}_k de manera que

$\tilde{y}_k = y_k + n_k \frac{\Delta t}{2}$. Dado ese punto sobre la línea $t = \tilde{t}_k$ calculamos la

tercera pendiente q_k con $q_k = f(\tilde{t}, \tilde{y}_k)$

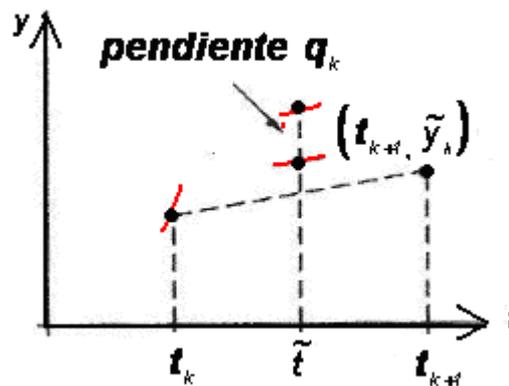


Figura 3.3: Gráfico que ilustra el procedimiento para calcular q_k

4) Para la cuarta pendiente usamos q_k para producir un punto sobre la línea $t = t_{k+1}$ y obtenemos $\tilde{y}_k = y_k + q_k \Delta t$ (Figura 3.4)

Una vez determinado el cuarto punto calculamos la p_k de la siguiente forma

$$p_k = f(t_{k+1}, \tilde{y}_k)$$

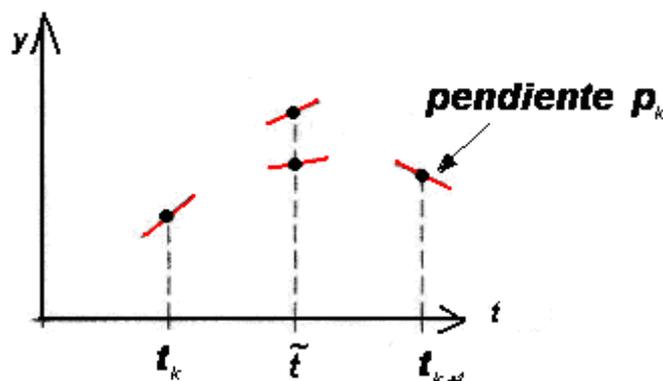


Figura 3.4: Gráfico con las cuatro pendientes determinadas con el algoritmo.

5) Al calcular las cuatro pendientes realizamos un promedio ponderado y para finalizar el proceso. Por ello se pondera al doble las pendientes que se determinaron con los puntos $t = \tilde{t}_k$ con respecto a las pendientes m_k y p_k , quedando

$$\frac{m_k + 2n_k + 2q_k + p_k}{6}$$

Considerando todos los pasos realizados la expresión final queda

$$y_{k+1} = y_k + \left(\frac{m_k + 2n_k + 2q_k + p_k}{6} \right) \Delta t$$

Al método de Euler se lo denomina de orden uno. Así como también un método que se deriva del mencionado, Euler modificado, se lo llama de orden dos. El método de Runge-Kutta se lo llama de cuarto orden. Esto se debe a que los errores introducidos en los cálculos disminuyen, si duplicamos la cantidad de pasos en el método de Runge-Kutta, un factor $16(2^4)$. Este número 16 se calculó realizando el cociente entre los errores de una cierta cantidad de pasos y los errores del doble de esa cantidad de pasos.

Capítulo 4

Obtención de las ecuaciones para el movimiento vertical y de rotación

4.1 Introducción previa: Las ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange [12] se utilizan para describir cualquier sistema mecánico por medio de coordenadas generalizadas de posición. El lagrangiano se utiliza para sistemas conservativos¹¹ (El rotor de un campo vectorial F actuante es igual a cero) y es un caso particular de las ecuaciones mencionadas cuya expresión es la siguiente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Siendo

q_j : Coordenadas generalizadas de la posición, que pueden ser distancias, ángulos.

\dot{q}_j : Velocidades generalizadas, dicho de otra forma, son las derivadas temporales de las posiciones (ángulos o distancias).

Q_j : Fuerza generalizadas que actúan sobre el sistema en estudio.

¹¹ Un campo vectorial F se dice que es conservativo cuando existe un campo escalar V diferenciable tal $\mathbf{F} = -\nabla V$ o lo que es equivalente que $\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. También podemos decir que el campo escalar V es una función potencial

Si T es la energía cinética total del sistema en estudio y V es la energía potencial total del mismo sistema, las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden expresar en el caso que sea conservativo (no se consideran pérdidas por rozamiento o resistencia del aire siendo

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}), \text{ como}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

La función lagrangiano o simplemente lagrangiano se define $L=T-V$ y como en los sistemas mecánicos la energía potencial no depende de las velocidades sino de las posiciones, tenemos que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$,

entonces podemos escribir

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Para la obtención de las ecuaciones del sistema en estudio escribiremos el lagrangiano de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

4.2 Las ecuaciones para un modelo primario de un puente colgante utilizando las ecuaciones de Lagrange

En el sistema que estudiamos de manera representativa como una barra rígida [4],[5], su energía cinética de traslación (oscilación) viene dada por

$$T_1 = \frac{1}{2} m v^2 \quad 4.1$$

Donde esta m es la masa total del sistema, y v es la velocidad del centro de masa, que en realidad es la velocidad de cualquier punto del sistema (todos a la misma velocidad).

Si la sección rota alrededor de su centro de gravedad, consideramos un dm (Figura 4.1) de modo que 4.1 se puede expresar

$$T_1 = \frac{1}{2} d m v^2 \quad 4.2$$

Esta formula es la energía cinética de traslación

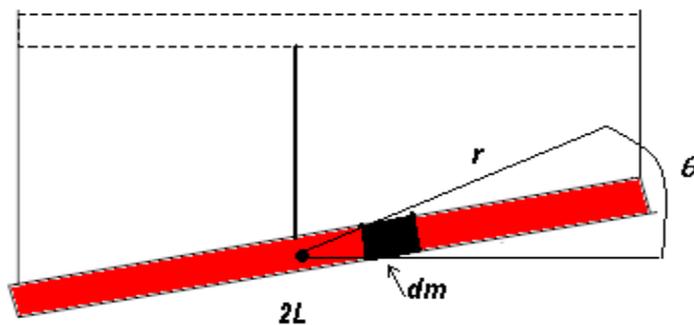


Figura 4.1: Movimiento vertical y rotacional de la sección.

Como por acción del viento, la barra (calzada del puente) rota con respecto al centro de gravedad y podemos calcular la longitud del arco (y_1) multiplicando la mitad del largo de la calzada (r) por el ángulo θ

$$y_1 = r \theta \quad 4.3$$

Derivando con respecto a t la expresión 4.3

$$\frac{dy_1}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad 4.4$$

Si llamamos $\frac{d\theta}{dt} = w$ y siendo $\frac{dy_1}{dt} = v$ la expresión 4.2 se puede expresar como

$$T_1 = \frac{1}{2} d m (\omega r)^2 \quad 4.5$$

Si $dm = \rho dr$ siendo ρ masa por unidad de longitud, la formula 4.5 queda

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho dr (\omega r)^2 \quad 4.6$$

La energía cinética de la barra es, integrando respecto de r

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \rho dr (\omega r)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_{-l}^l r^2 dr = \frac{1}{6} \rho \omega^2 r^2 \Big|_{-l}^l = \frac{1}{6} \rho \omega^2 2l^3 = \underbrace{\frac{1}{3} \rho \omega^2 l^3}_{4.7}$$

como $\rho = \frac{m}{2l}$, reemplazando en 4.7

$$T_1 = \frac{1}{3} \frac{m}{2l} \omega^2 l^3 = \frac{1}{6} m \omega^2 l^2 \quad 4.8$$

Esta fórmula es la energía cinética de rotación

Teniendo en cuenta que la barra tiene el movimiento general de un cuerpo sólido (en este caso la calzada) siempre se puede expresar como una rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de gravedad más una traslación pura. La energía cinética total puede escribirse

$$T = \frac{1}{6} m \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 l^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad 4.9$$

Con el desplazamiento vertical y (Figura 4.2), la energía cinética se puede expresar

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \quad 4.10$$

$$T = \frac{1}{6} m \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 l^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \quad 4.11$$

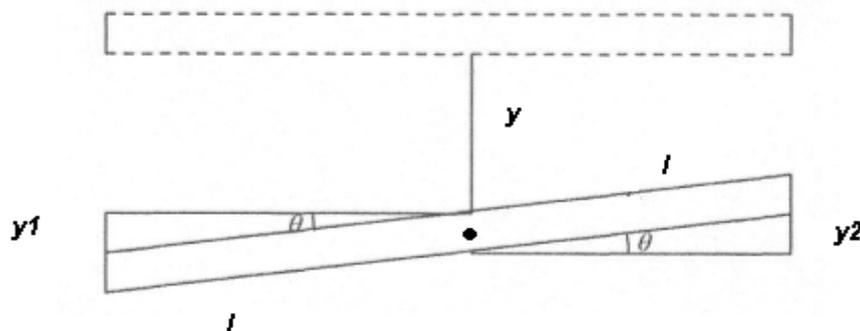


Figura 4.2: Movimiento de la barra en modo vertical.

Para analizar la energía potencial de la sección la estudiaremos en dos partes, la energía potencial gravitatoria V expresada como $V = -mgy$, donde m es la masa de la sección, g la aceleración de

la gravedad e y el desplazamiento con el eje vertical positivo hacia arriba, la energía potencial debido a la rotación de la sección alrededor del centro de gravedad determinando un desplazamiento a ambos lados al que llamamos y_1 e y_2 (Figura 4.2). Por lo tanto sobre la izquierda el desplazamiento, al que llamamos Y es igual

$$Y = (y + y_1)^+ \quad 4.12$$

Y el desplazamiento vertical sobre la derecha

$$Y = (y - y_2)^+ \quad 4.13$$

El signo $+$ significa que los cables están en tensión y esos desplazamientos sobre la izquierda y la derecha se pueden expresar como $Y = y - l \sin(\theta)$ y $Y = y + l \sin(\theta)$ respectivamente. La energía potencial del sistema es la suma de la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica que almacena los cables modelados como resortes, de modo que

$$V = \frac{1}{2} k Y^2 - mgh \quad 4.14$$

Reemplazando los desplazamientos sobre la derecha y la izquierda La ecuación 4.14 queda

$$V = \frac{1}{2} k \left[\left((y - l \sin(\theta))^+ \right)^2 + \left((y + l \sin(\theta))^+ \right)^2 \right] - mgh \quad 4.15$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias del movimiento se determinan a partir de la ecuación de Lagrange

$$L = T - V \quad 4.16$$

Recordemos que las coordenadas utilizadas para describir la situación son el desplazamiento vertical $y(t)$ de su centro de gravedad y el giro de la sección con respecto al eje que pasa por el centro de gravedad $\theta(t)$. El desplazamiento vertical se considera positivo hacia arriba y el giro se considera positivo en el sentido antihorario.

La expresión 4.16 se escribe para el movimiento vertical

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad 4.17$$

Y para el movimiento de rotación

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad 4.18$$

Entonces en 4.16 reemplazando 4.11 y 4.15

$$L = \frac{1}{6} m \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 I^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} k [(y - I \sin(\theta))^2 + (y + I \sin(\theta))^2] - mgh \right) \quad 4.19$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{6} m I^2 2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{3} m I^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad 4.20$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} k 2 [(y - I \sin(\theta))(-I \cos(\theta)) + 2(y + I \sin(\theta))(I \cos(\theta))] \quad 4.21$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = k I \cos(\theta) [(y - I \sin(\theta)) - (y + I \sin(\theta))] \quad 4.22$$

$$\frac{1}{3} m I^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = k I \cos(\theta) [(y - I \sin(\theta)) - (y + I \sin(\theta))] \quad 4.23$$

Desarrollando 4.23

$$\frac{1}{3} m I^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = k I \cos(\theta) [-2 I \sin(\theta)] \quad 4.25$$

Dividiendo miembro a miembro por $\frac{1}{3} m I^2$ la ecuación diferencial 4.25 queda

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{6k}{m} \cos(\theta) [-2 I \sin(\theta)] \quad 4.26$$

Si agregamos un término debido al amortiguamiento y una función de forzamiento la ecuación 4.26 es

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \delta \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m} \cos(\theta) \sin(\theta) = f(t) \quad 4.24$$

Para determinar la ecuación diferencial para el movimiento vertical partiendo de 4.17 derivando 4.19

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad 4.25$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k[(y - l \sin(\theta)) + (y + l \sin(\theta))] - mg \quad 4.26$$

Reemplazando en 4.17

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k[(y - l \sin(\theta)) + (y + l \sin(\theta))] - mg \quad 4.27$$

Dividiendo miembro a miembro por m

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k}{m} [(y - l \sin(\theta)) + (y + l \sin(\theta))] - g \quad 4.28$$

Al agrega un término debido al amortiguamiento y una función de forzamiento la ecuación 4.28 queda

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} [(y - l \sin(\theta)) + (y + l \sin(\theta))] = -g \quad 4.29$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \frac{2k}{m} y = -g + g(t) \quad 4.30$$

Las ecuaciones asociadas a cada movimiento son 4.24 y 4.30

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \delta \frac{d\theta}{dt} + \frac{6k}{m} \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\theta) = f(t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} - \frac{2k}{m} y = -g + f(t) \end{cases} \quad 4.31$$

En muchas situaciones es conveniente por razones analíticas linealizar el sistema de ecuaciones diferenciales. Esto quiere decir aproximar el sistema (sobre todo cuando alguna ecuación es no lineal) mediante un sistema lineal apropiado. Siguiendo este criterio podemos expresar 4.31 haciendo $\text{Sin}(\theta) = \theta$ y $\text{Cos}(\theta) = 1$.

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \delta \frac{d\theta}{dt} + \frac{6k}{m} \theta = f(t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} - \frac{2k}{m} y = -g + f(t) \end{cases} \quad 4.32$$

Siendo este un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales a coeficientes constantes completa, se puede expresar también como un sistema lineal de cuatro ecuaciones de primer orden. Estas dos ecuaciones acopladas se pueden expresar en forma matricial como

$$N \begin{pmatrix} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = Q$$

siendo

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -\frac{6k}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2k}{m} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} f(t) \\ -g + f(t) \end{pmatrix}$$

En el capítulo siguiente analizaremos las ecuaciones diferenciales del sistema acopladas al movimientos en forma independiente para realizar el análisis cualitativo y numérico de cada una.

Capítulo 5

Análisis cualitativo de un modelo simplificado de Glover, Lazer y McKenna para el puente de Tacoma

5.1 Análisis para distintos valores de los parámetros:

Modelo lineal del movimiento longitudinal

El planteo de la ecuación diferencial propuesta por Glover, Lazer y McKenna no responde a ningún puente en particular [1], aunque se intenta explicar de modo simple las oscilaciones de pequeña y gran amplitud que tuvo el vano. Incluiremos una ecuación diferencial que modela el movimiento transversal del puente con algunos datos tomados de investigaciones anteriores, donde la ecuación a analizar presenta distintos parámetros que se irán modificando para visualizar las distintas soluciones y partir de ahí realizar el análisis cualitativo y numérico.

La ecuación diferencial propuesta, deducida aplicando la ley de Newton, es

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + \beta y + c(y) = -Mg + f(t) \quad (5.1)$$

Donde el primer término es la aceleración vertical y M la masa de la sección que consideramos del puente, el segundo término es el amortiguamiento y al ser este tipo de estructura flexibles ese coeficiente α es pequeño (En las simulaciones lo consideraremos 0.01 o 0.001).

El tercer término tiene que ver con la fuerza que proporciona el material al regresarlo hacia la posición de equilibrio ($y=0$). Según

[1] $\beta = EI \left(\frac{\pi}{L} \right)^4$, donde E es el modulo Young¹², I el momento de inercia de la sección longitudinal del puente. El producto EI se denomina rigidez de flexión de la viga y L la longitud del puente.

La función $c(y)$ tiene que ver con lo que tiran los cables para regresar al puente a la posición de equilibrio o reposo tomando como referencia, cuando la estructura está en tensión, como $y < 0$ y la falta de esta fuerza cuando los cables están flojos, siendo en este caso $y \geq 0$. Gráficamente podemos ver este detalle en la figura 5.1 y figura 5.2. También se supone que la catenaria (cable principal del puente) está fija. En los videos vistos se ve que esto no sucede [11]

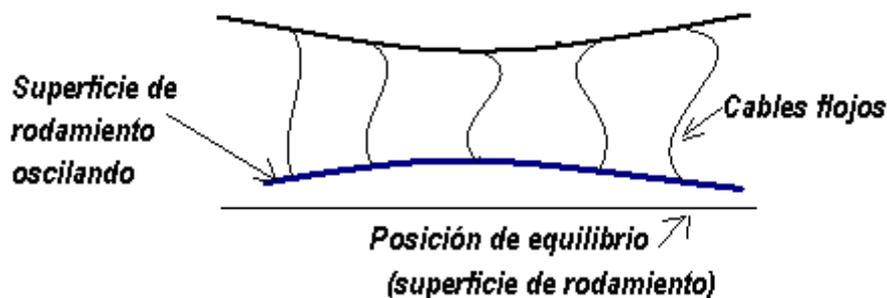


Figura 5.1: Oscilación verticales de la superficie de rodamiento con cables flojos [2].



Figura 5.2: Oscilación verticales de la superficie de rodamiento con cables tensos [2].

La función $c(y)$ la podríamos definir como

¹² Esta constante tiene que ver con las propiedades de los materiales del puente

$$c(y) = \begin{cases} \sigma y & \text{si } y < 0 \\ 0 & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

A σ la consideramos una constante, que por tratarse de un modelo similar al oscilatorio armónico es equivalente a la constante del resorte. Que este caso es el cable entre la catenaria y la estructura. La constante g representa la fuerza debido a la gravedad, la $f(t)$ es una función de forzamiento.

Esta ecuación de segundo orden a coeficientes constantes homogénea (una vez hecho los reemplazos que detallaremos a continuación), se puede resolver analíticamente por el método de los coeficientes indeterminados o numéricamente por el algoritmo que se detalla en los apéndices 1 y 2.

5.1.1 Planteo analítico

Los valores de los parámetros no responden a ningún modelo en particular, pero siguiendo los valores propuestos en [1] y sin considerar el término de forzamiento, reemplazando en 5.1 y sabiendo que $c(y) = \sigma y$ y βy , queda

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + \beta y + \sigma y = -Mg \quad (5.3)$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + (\beta + \sigma)y = -Mg \quad (5.4)$$

Si $\alpha = 0.01$, $\beta + \sigma = 17$ cuando los cables están tensos debajo de la posición de equilibrio o $\beta + \sigma = 13$ cuando los cables están por encima de la posición de equilibrio y consideramos $M=1$, la ecuación 5.4 queda

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 0.01 \frac{dy}{dt} + 17y = -9.8 \quad (5.5)$$

Esta ecuación admite resolución analítica, por ejemplo, por el método de los coeficientes indeterminados [18]. Cuando en la

sección siguiente analicemos la resolución numérica también consideremos otros valores para el coeficiente de amortiguamiento α .

5.1.2 Resolución numérica

También podemos escribir esta ecuación diferencial como sistema de primer orden y analizar el mismo en forma numérica.

Si llamamos $\frac{dy}{dt} = v$ (5.6) y derivamos con respecto a t tenemos

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \quad (5.7)$$

Ahora la ecuación 5.5 se puede escribir en forma de sistema de la siguiente manera

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v(t) \\ \frac{dv}{dt} = -0.01v(t) - 17y(t) - 9.8 \end{cases} \quad (5.8)$$

Para resolver este sistema utilizamos un código Runge–Kutta [2] cuyo código escrito se describe en el apéndice C y las representaciones gráficas que surgen de resolver 5.8 las podemos visualizar en las figuras 5.1 y 5.2 (En el apéndice A se muestra también otra forma de obtener las soluciones numéricas)..

En la figura 5.1 vemos la oscilación del puente alrededor de la posición de equilibrio del sistema, aquí suponemos que los cables están siempre en tensión. La Figura 5.2, las oscilaciones para un intervalo de tiempo mayor.

Los gráficos descritos son para $\alpha = 0.01$ en un intervalo de tiempo de 0 a 30 unidades de tiempo (la línea roja indica el punto de crítico o de equilibrio del sistema)

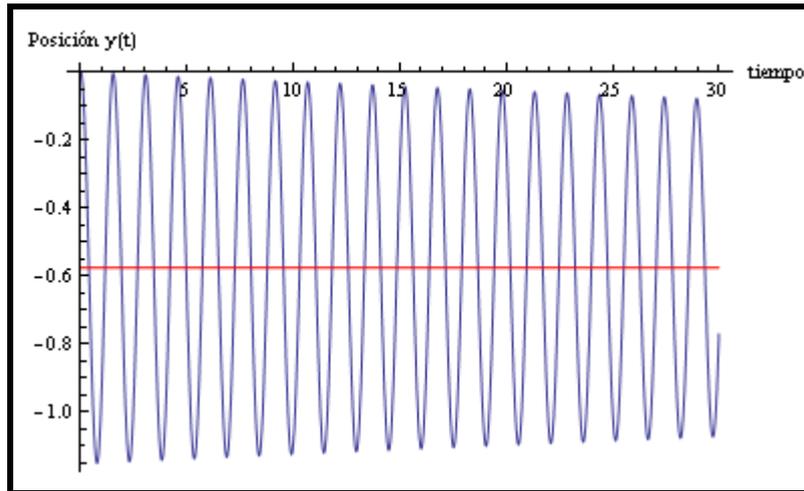


Figura 5.1: El siguiente gráfico nos indica la oscilación del puente con respecto a la posición de equilibrio. Estas oscilaciones decrecen conforme t se incrementa.

Para $\alpha = 0.01$ en un intervalo de tiempo de 0 a 100 unidades de tiempo.

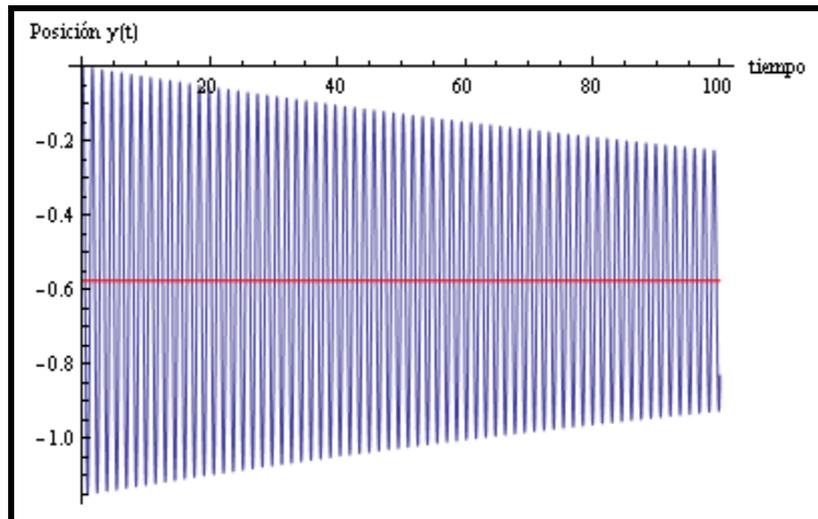


Figura 5.2: El siguiente gráfico nos indica la oscilación del puente con respecto a la posición de equilibrio a un intervalo de tiempo más grande que en la figura 5.1.

En ambas graficas notamos las amplitudes decrecientes. La Figura 5.3 nos muestra la variación de la posición con respecto a un intervalo de tiempo de 0 a 30.

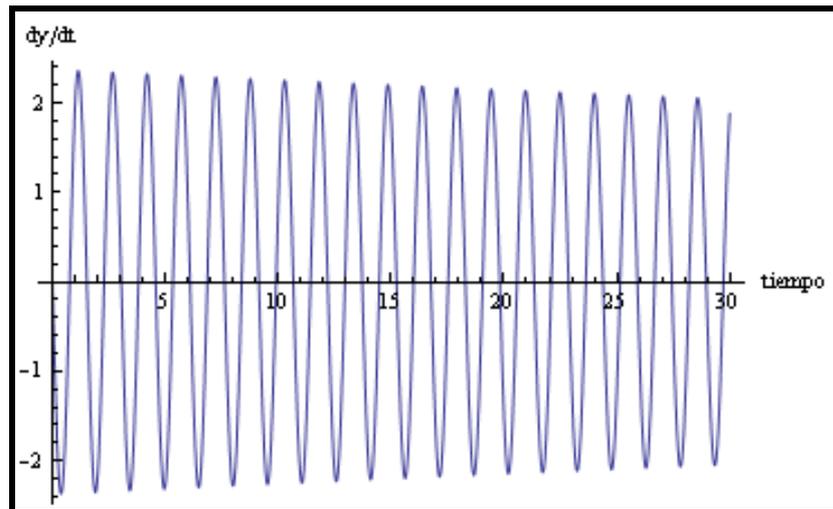


Figura 5.3: Grafico de la variación de la posición del puente con respecto al punto de equilibrio en el intervalo de tiempo de 0 a 30 unidades.

Si consideramos un valor del amortiguamiento $\alpha = 0.001$, la figura 5.4 nos muestra que la amplitud en el intervalo de tiempo de 0 a 50 unidades se mantiene constante incluso en intervalos de tiempo.

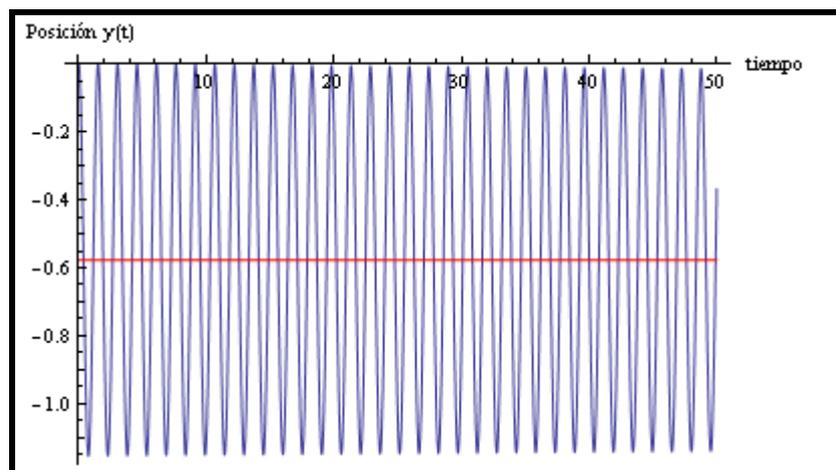


Figura 5.4: Grafica de la oscilación con respecto a la posición de equilibrio con un amortiguamiento $\alpha = 0.001$.

Otra forma de visualizar las soluciones de un sistema es su retrato de fase. Este gráfico nos muestra la curva solución, también denominada órbita, con centro en el punto de equilibrio de coordenadas $(y(t), v(t)) = \left(\frac{-9.8}{17}, 0 \right)$ conforme varía el tiempo aunque en el gráfico no este explicitado (Figura 5.5). La coordenada y es negativa porque la gravedad obliga al puente a deflexionarse un poco tensionando así los cables. La solución se mueve en espiral hacia el punto de equilibrio.

Este tipo de sistema donde la variable independiente t no aparece en el segundo miembro de las ecuaciones se denomina autónomo, la evolución del sistema está supeditado solo a los valores de las variables dependientes (y y v en este caso)

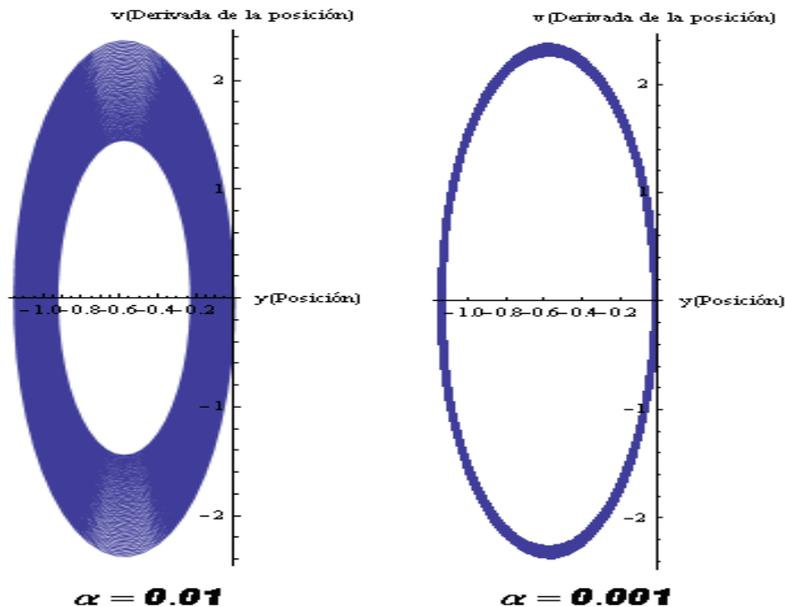


Figura 5.5: Retrato de fase del sistema de ecuaciones presentado en 5.8. La figura de la izquierda muestra la trayectoria tendiendo al punto de equilibrio (amplitudes decrecientes). El panorama es distinto en la figura de la izquierda, la trayectoria se acerca más lentamente a la posición de equilibrio, las oscilaciones no declinan.

En el apéndice B y C mostraremos otras formas de graficar utilizando los programas Maple y Matlab en el cual se detallan los comandos utilizados para tal fin. En el apéndice D se detalla un código del programa Mathematica que permite realizar estos gráficos en forma más interactiva.

5.2 Análisis cualitativo del modelo con oscilaciones forzadas: Efecto del viento

Este efecto es muy complejo de cuantificar no solo porque ya que hay ráfagas de mayor o menor duración sino que también interactúa con la estructura. Si se supone que el viento tiene rapidez y dirección constante, el efecto sobre el puente no tiene porque serlo. Cuando el flujo de aire pasa a través de la estructura forma vórtices o remolinos (Figura 5.6) encima y por debajo de la misma, esto genera una fuerza perpendicular en dirección normal a la velocidad del fluido (viento). En el puente de Tacoma esto ocasionaba

movimiento de rotación de gran magnitud antes del colapso (Figura 5.7).

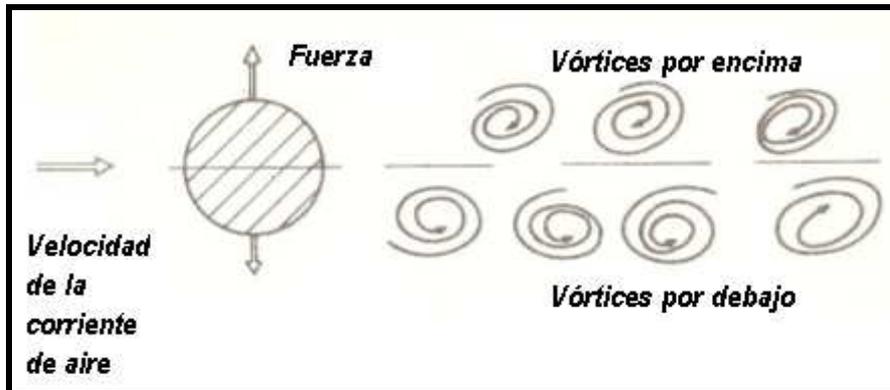


Figura 5.6: Cilindro colocado en un flujo de aire provocando los vórtices de Von Karman [9].

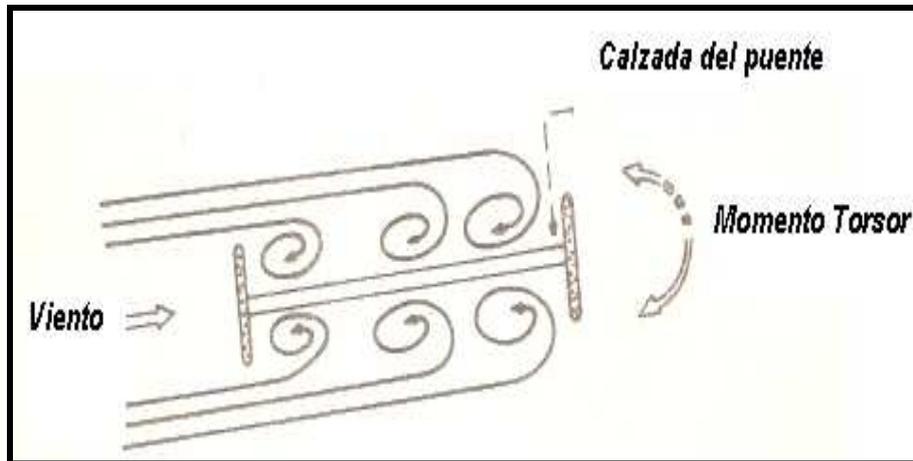


Figura 5.7: Vibraciones de torsión sobre el puente de Tacoma [9].

Por experiencias en túneles de viento, sus efectos sobre una estructura cilíndrica varía en forma sinusoidal con respecto al tiempo. Esta fuerza adicional $f(t) = \lambda \sin(\omega t)$ es la que agregaremos en el segundo miembro de la ecuación 5.4 de modo que nos queda.

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + (\beta + \sigma)y = -Mg + \lambda \sin(\omega t) \quad 5.9$$

Llamando a λ la amplitud de la fuerza y $\omega = 2\pi f$ como la velocidad angular, donde consideraremos constante la frecuencia. Esto es improbable en vientos turbulentos pero lo analizaremos para distintos valores de λ y ω . Si reemplazamos los coeficientes por

los mismos valores de 5.6 y tomando $\lambda = 0.01$ y $\omega = 2\pi 0.2$ ($f=0.2$), tenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 0.01 \frac{dy}{dt} + 17y = -9.8 + 0.01 \sin(2\pi 0.2 t) \quad 5.10$$

Para las mismas condiciones de contorno, la solución de la ecuación se ven la figura 5.8 y figura 5.9, nos muestra las oscilaciones de pequeña amplitud constante a medida que transcurre el tiempo.

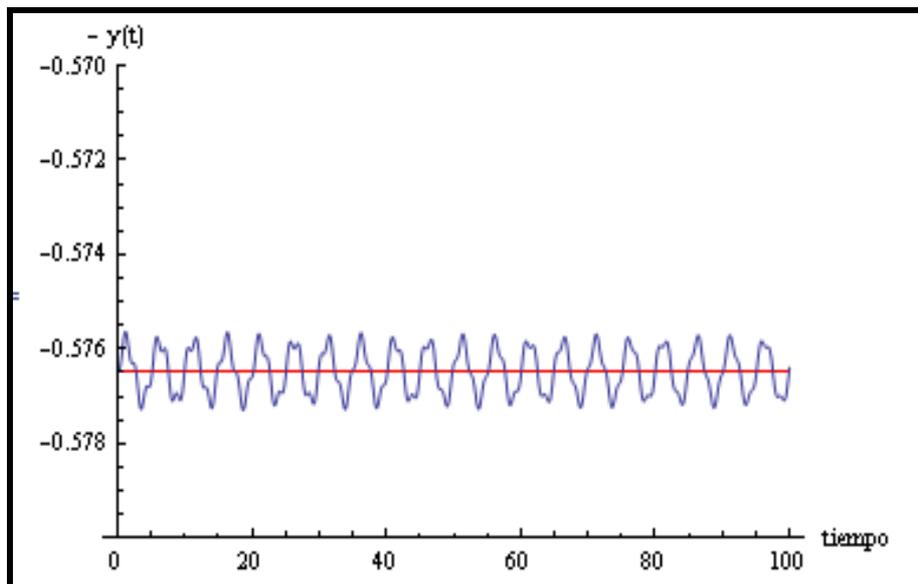


Figura 5.8: Curva solución de la ecuación diferencial 5.8 (con $\lambda = 0.01$ y $\omega = 2\pi 0.2$). Se alcanzan a ver que la estructura oscila con una pequeña amplitud alrededor de la posición de equilibrio.

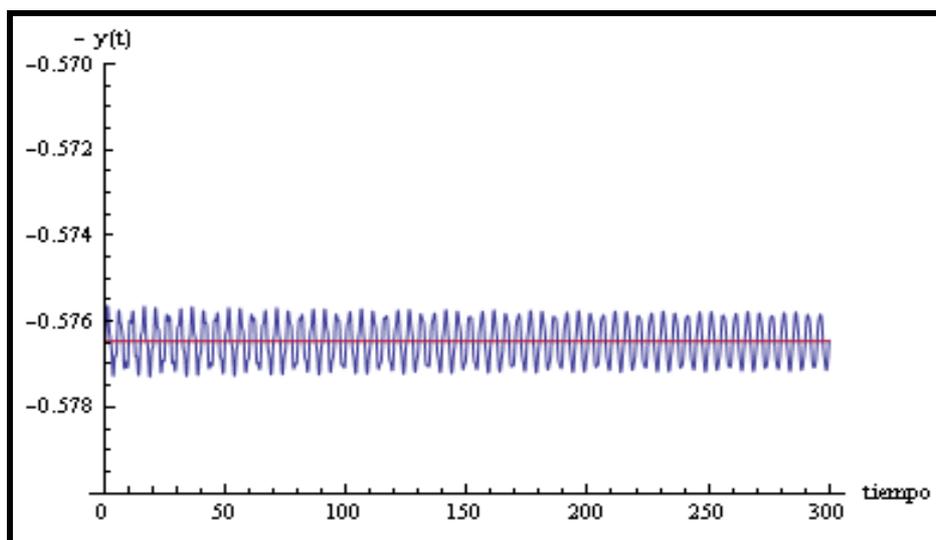


Figura 5.9: Curva solución de la ecuación diferencial 5.8 en un intervalo de tiempo de tiempo mayor que en la figura 5.8. Las oscilaciones no declinan.

Ahora si cambiamos solo el valor de ω en 2π (frecuencia igual a 1) el grafico corresponde a la figura 5.10. El patrón que siguen las soluciones es similar a las anteriores.

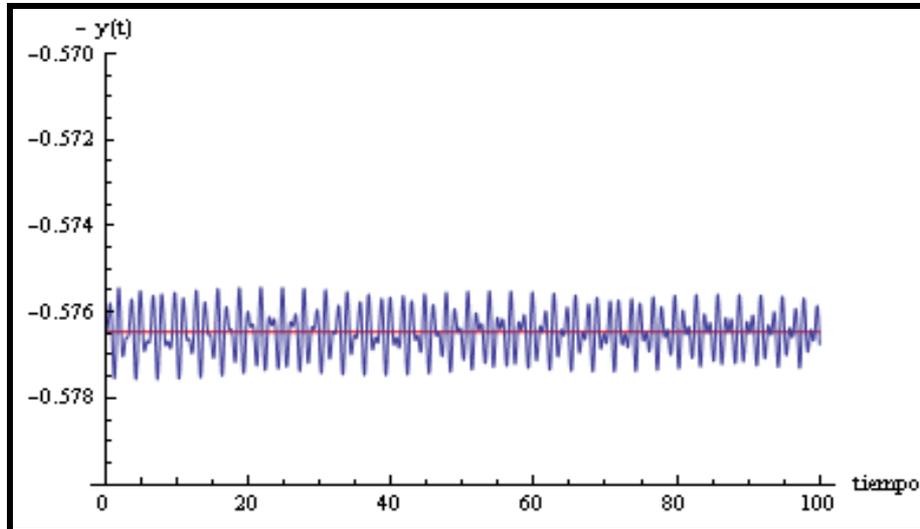


Figura 5.10: Oscilaciones con el valor de $\lambda = 0.01$ y $\omega = 2\pi$.

Si ahora analizamos la solución cambiando solo el valor de ω en $\sqrt{17}$ la ecuación 5.9 queda

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 0.01 \frac{dy}{dt} + 17 y = -9.8 + 0.01 \sin(\sqrt{17}t) \quad 5.11$$

Si escribimos 5.11 como sistema de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v(t) \\ \frac{dv}{dt} = -0.01v(t) - 17y(t) - 9.8 + 0.01\sin(\sqrt{17}t) \end{cases} \quad 5.12$$

Con condiciones iniciales similares a las ecuaciones 5.10 y 5.11 en

$$y(0) = -\frac{98}{170}, v(0) = 0$$

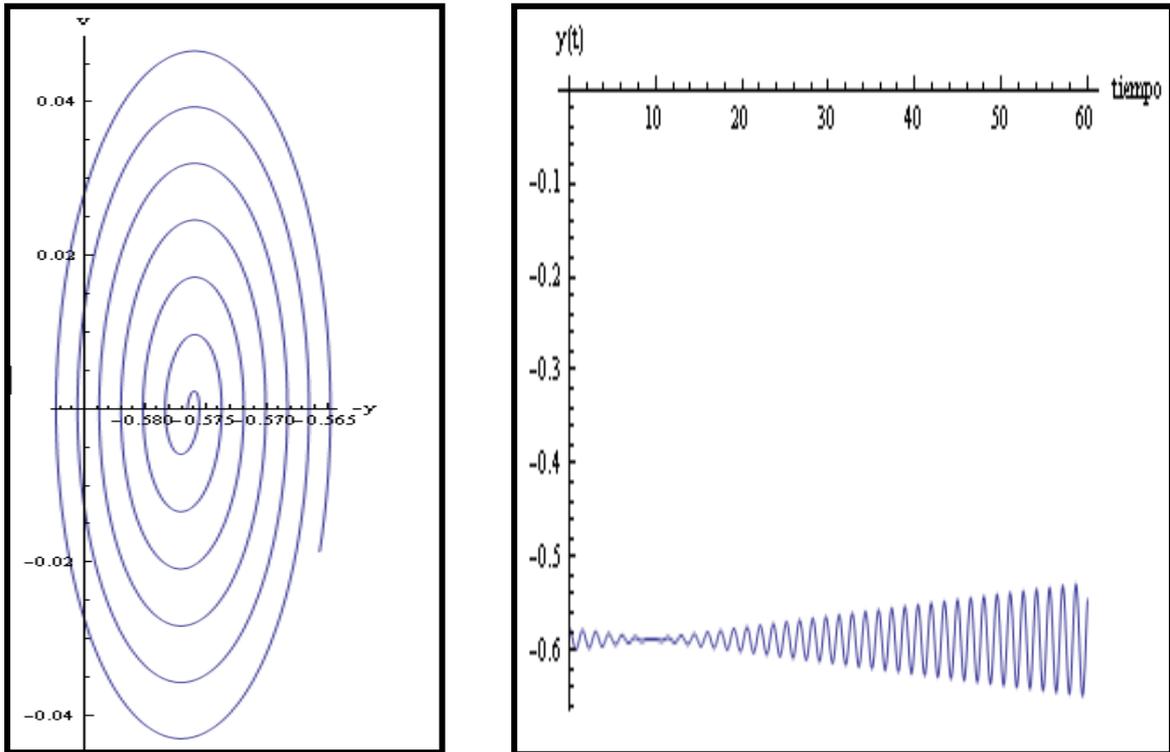


Figura 5.11: La figura de la izquierda nos muestra el retrato de fase las soluciones en el intervalo de tiempo considerado. La Figura de la derecha nos muestra el crecimiento de las amplitudes con el valor de $\lambda = 0.01$ y $\omega = \sqrt{17}$.

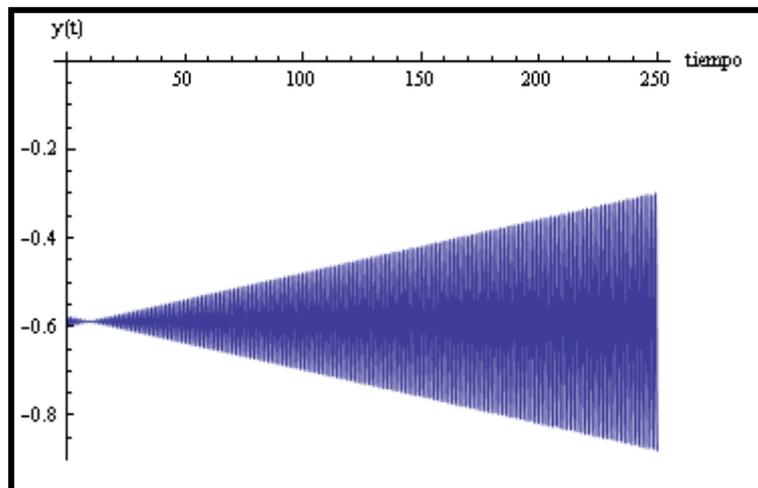


Figura 5.12: Las oscilaciones crecen con intervalos de tiempo mayores que en la figura 5.9 (en este caso entre 0 y 250 unidades de tiempo).

Para esta condición de contorno notamos que la representación grafica de la solución indica oscilaciones de gran amplitud que crecen con el tiempo (Figura 5.11 derecha) y cuyas curva solución en el plano de fase, en el intervalo de tiempo que consideramos en la resolución, se mueve en espiral alejándose del origen (Figura

5.11 izquierda). Si bien no se produce resonancia, ya que hay un pequeño amortiguamiento en el sistema, las amplitudes crecen y no se detienen quizás con graves en la estructura a intervalos de tiempo mayores (Figura 5.12).

El comportamiento de 5.13 es diferente si $\alpha = 0$, cuando $\lambda = 0.01$ y $\omega = \sqrt{17}$, la frecuencia del término de forzamiento es igual a la frecuencia del sistema sin forzamiento, se produce resonancia. La Figura 5.11 muestra estas oscilaciones en distintos intervalos de tiempo. En este hipotético puente las consecuencias serían devastadoras al ser crecientes las amplitudes a tiempos más extensos, como se ve en el gráfico de la derecha las amplitudes de las oscilaciones empiezan a cruzar el eje y provocando que los cables ya no estén bajo tensión.

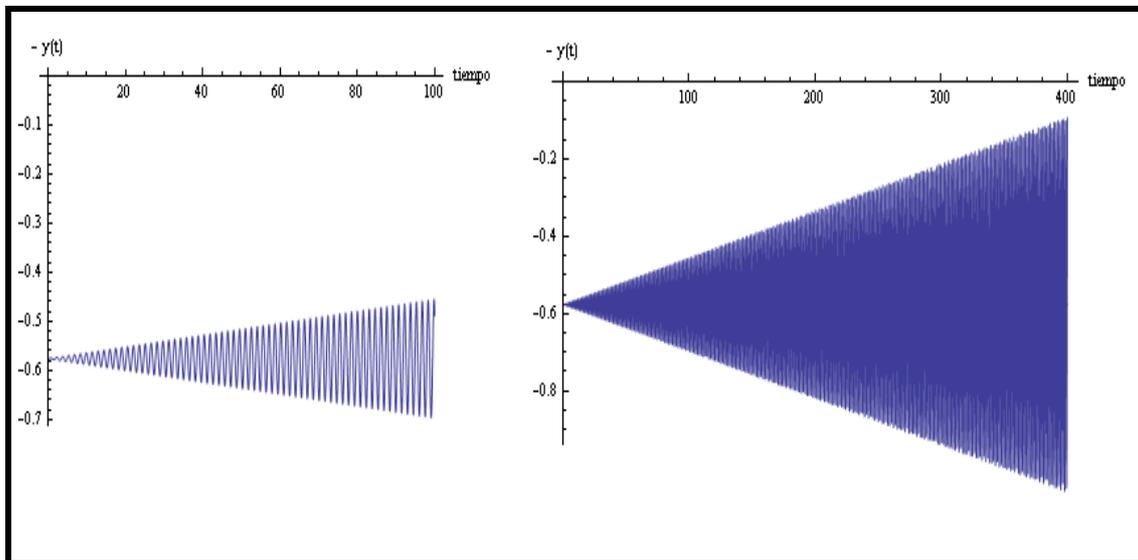


Figura 5.13: Gráfico de las amplitudes con respecto al tiempo en intervalos de tiempos diferentes (de 0 a 100 unidades de tiempo el de la izquierda, de 0 a 400 unidades de tiempo el de la derecha). Se nota que las amplitudes no declinan (con condiciones iniciales cerca del equilibrio).

5.3 Análisis de la amplitud, amortiguamiento y frecuencia para los modelos primarios: El efecto de resonancia

Si analizamos nuevamente la ecuación 5.8, se puede establecer una relación entre el comportamiento de las soluciones a partir de los parámetros ω que determina la frecuencia de forzamiento, el amortiguamiento al que denotamos con α y $\beta + \sigma$

que tiene relación con el cable y la estructura. El comportamiento que presentan las soluciones a largo plazo es el mismo. La solución general esta dada por una suma de la una solución en estado transitorio y otra es estado permanente. Como vimos en al sección anterior se puede escribir como

$$y(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad 5.13$$

Donde A es la amplitud de la oscilación y ϕ el ángulo de fase, para t grandes, todas oscilan con la misma frecuencia que el forzamiento. Para 5.8 encontraremos expresiones para la amplitud (aunque también se puede hacer para ϕ) en función de ω , α y $\beta + \sigma$.

5.3.1 Resolución con exponenciales complejos

Como comentamos anteriormente al considerar un forzamiento del tipo seno o coseno, estamos considerando un tipo especial de ecuación de modo de poder aplicar todo lo conocido referente a las ecuaciones lineales con forzamiento periódico. El problema radica en que no todas las ecuaciones diferenciales son lineales (como analizaremos en 5.4). Si partimos de 5.9, con los mismos valores en los coeficientes salvo ω y α , tenemos expresando el forzamiento con una exponencial compleja.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + 17 y = -9.8 + \exp(\omega t i) \quad 5.14$$

La solución, encontrada por el método de los coeficientes indeterminados, viene dada por

$$y(t) = -\frac{98}{170} + \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(17 - \omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}}_A} \cos(\omega t + \phi) \quad 5.15$$

$$y(t) = -\frac{98}{170} + A \cos(\omega t + \phi)$$

Si analizamos A como función de ω y α tendremos una función de dos variables independientes cuya fórmula es

$$A(\omega, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{(17 - \omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}} \quad 5.16$$

Si fijo la variable α , que representa el amortiguamiento, en 0.01, la variación de la amplitud, ahora en función de ω (figura 5.14), alcanzando un máximo en $\omega = \sqrt{17}$. No es llamativo que para ese valor la amplitud sea grande (alrededor de 24.1), ya que cuando $\alpha = 0$, se produce resonancia en esa valor de frecuencia.

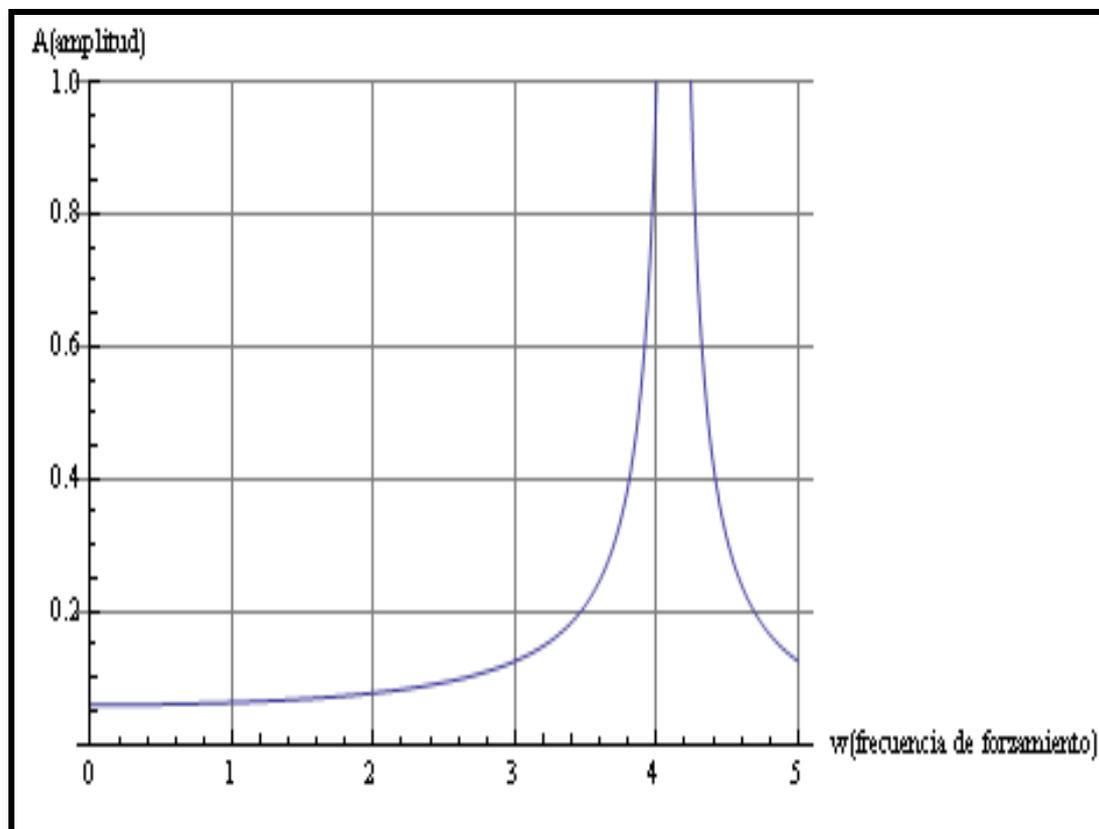


Figura 5.14: Gráfica de la amplitud en función de ω con un punto máximo en $(\sqrt{17}, 24.1)$.

En la figura 5.15 el gráfico Amplitud(A)- frecuencia (ω) nos muestra para distintos valores del amortiguamiento α (entre ellos el analizado en el gráfico 5.14) las distintas amplitudes que alcanza la estructura para este simple modelo.

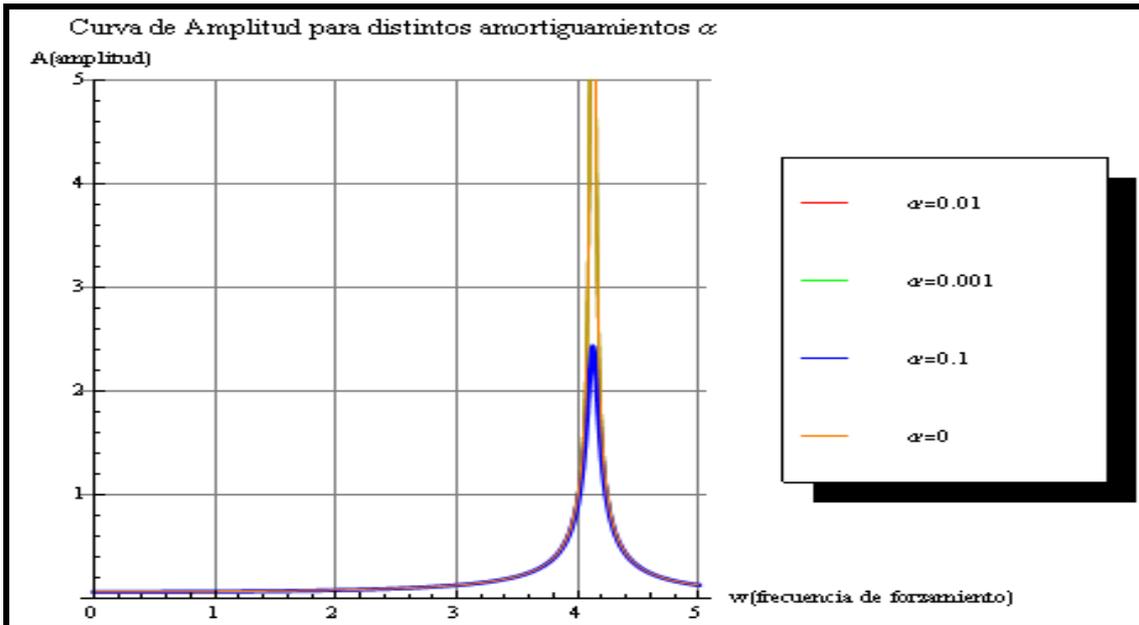


Figura 5.15: Gráfico Amplitud-Frecuencia para distintos valores de amortiguamiento. La curva para $\alpha=0$ provoca para el valor $\sqrt{17}$ el forzamiento de resonancia (curva amarilla).

También podemos ver la amplitud de otra forma. Si graficamos 5.16, es una superficie con valores de ω y α como variables independientes. La superficie muestra la explosión de A , cerca de la resonancia que se produce en los valores $\alpha=0$ y $\omega=\sqrt{17}$.

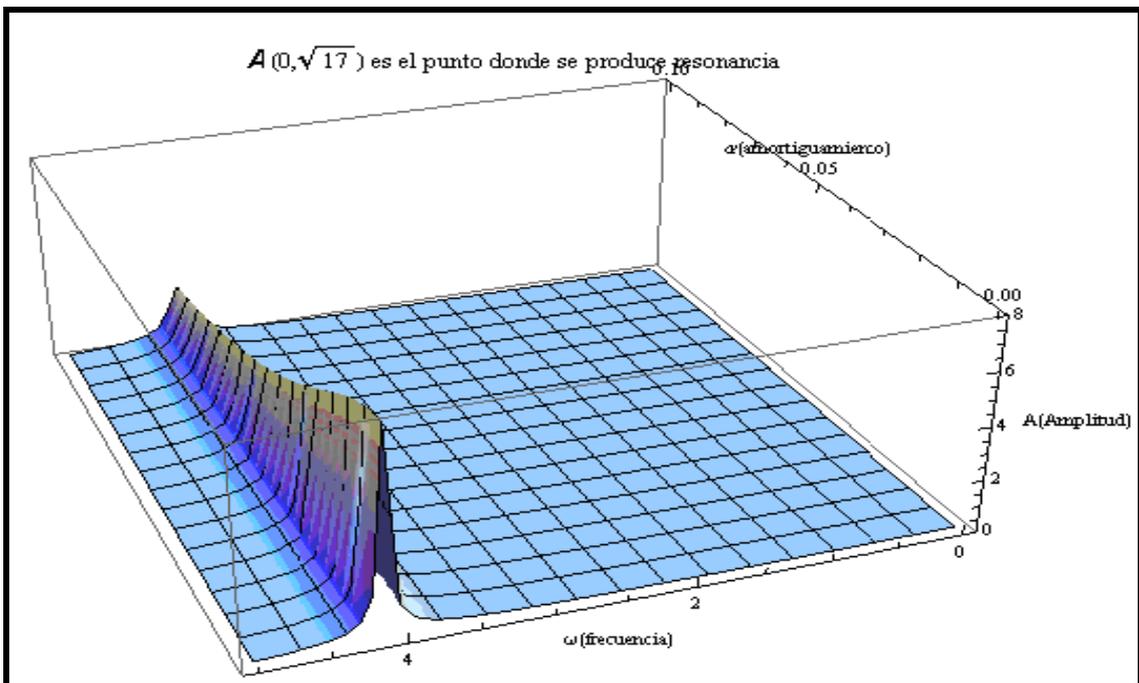


Figura 5.16: Superficie de Amplitud para un dominio de valores de ω y α . En la parte superior de la superficie se muestra el par ordenado donde se presenta resonancia

5.4 Análisis para distintos valores de los parámetros: Modelo lineal y no lineal del movimiento transversal

De acuerdo al capítulo anterior presentaremos el modelo del movimiento vertical, denominado en la literatura de deflexión, y el movimiento de rotación. La hipótesis simplificadora es suponer una barra suspendida por cables en ambos extremos libre para moverse verticalmente (como en la sección anterior) y rotar alrededor del centro de gravedad (Figuras 5.17). De acuerdo a las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior, elegiremos valores razonables para las constantes físicas y el término de forzamiento que se consideran en [1] y [14].

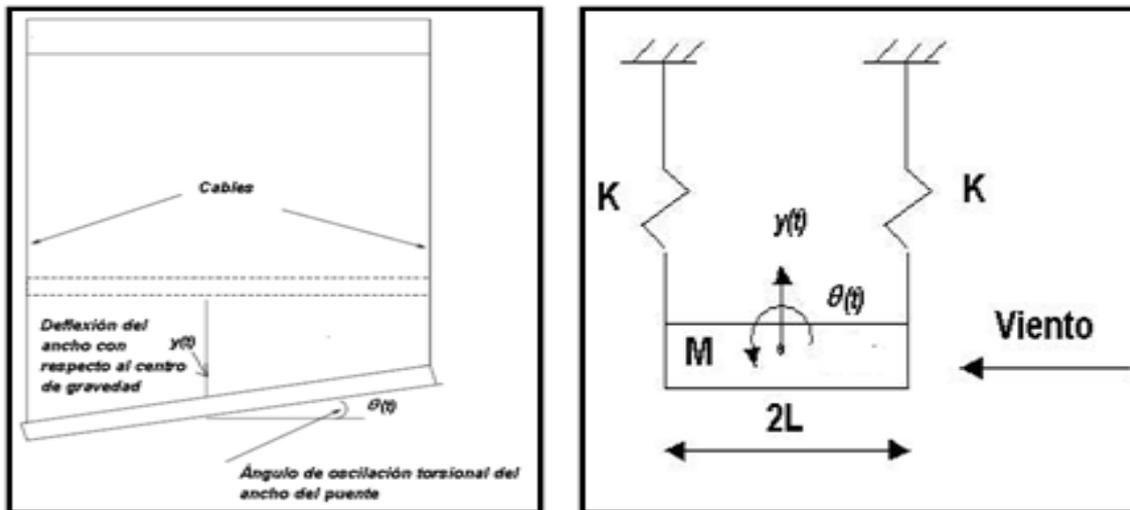


Figura 5.17: La figura de la izquierda muestra una vista transversal de la calzada del puente indicando con $y(t)$ el movimiento vertical y con $\theta(t)$ el movimiento de rotación. La figura de la derecha muestra el modelo que consideraremos en el estudio. M significa el momento torsor de la calzada.

Las ecuaciones que gobiernan este modelo primario de movimiento vertical y de rotación son

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \delta_1 \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{6K}{M}\right) \text{Cos}(\theta)\text{Sin}(\theta) = f(t)^{13} \quad 5.17$$

¹³ Esta ecuación diferencial de segundo orden no lineal es similar a una ecuación típica del modelos aeroelásticos, $I(\ddot{\theta} + 2\alpha\omega\dot{\theta} + \omega^2\theta) = F$, donde I es el momento de inercia por unidad de longitud, α y ω son el coeficiente de amortiguamiento y frecuencia de la estructura respectivamente y F es la fuerza aerodinámica

Para el movimiento de rotación

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \delta_2 \frac{dy}{dt} + \left(\frac{2K}{M} \right) y = -g + f(t) \quad 5.18$$

Par el movimiento vertical

Las ecuación 5.17 es una ecuación diferencial de segundo orden, no lineal completa y su resolución será a través de un método numérico. La ecuación 5.18 es una ecuación diferencial, lineal, a coeficientes constantes completa, que como vimos anteriormente tiene resolución analítica.

En esta sección nos detendremos en analizar solamente la rotación, despreciando al movimiento de deflexión, estudiando solamente la ecuación 5.17.

5.4.1 Resolución numérica para el movimiento de rotación: Comportamiento cualitativo de el modelo lineal y no lineal de los movimientos transversales

La ecuación 5.17 que representa el movimiento de rotación alrededor del centro de gravedad se puede escribir como sistema

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\delta_1 v - \left(\frac{6K}{M} \right) \text{Cos}(\theta)\text{Sin}(\theta) + f(t) \end{cases} \quad 5.19$$

Si tomamos como la fuerza de forzamiento una del tipo senoidal $f(t) = \lambda \text{Sin}(\omega t)$, 5.19 se transforma en

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\delta_1 v - \left(\frac{6K}{M} \right) \text{Cos}(\theta)\text{Sin}(\theta) + \lambda \text{Sin}(\omega t) \end{cases} \quad 5.20$$

Los valores de los parámetros son los siguientes:

$\delta_1 = 0.001$, que representa el amortiguamiento torsional.

$K=1000$, constante de los cables modeladas como resortes.

$M = 2500 \text{ Kg}$, es la masa de una sección representativa de la sección transversal.

$\lambda = 0.04$, representa la fuerza que actúa en forma perpendicular a la estructura, denominada de sustentación. Este valor surge de la

fórmula $\lambda = \frac{1}{2} \rho u^2 C a$, donde ρ es la densidad del aire ($1.2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$), a

es área de la sección donde atraviesa el flujo de aire (12 m de largo y 2.5m de ancho), C el coeficiente de sustentación y U es la velocidad del viento en Km/hora. Consultando en [15] ese coeficiente de sustentación podría escribirse como una función del tipo armónico. También depende del ángulo de ataque¹⁴. La unidad que corresponde a esta fuerza es en Newton (en la sección 5.5 daremos un detalle breve del cálculo con datos reales del puente).

La expresión $\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia, que fijamos en 1 Hz (Esta frecuencia se puede calcular en base a la velocidad del viento, el canto del puente y un coeficiente denominado de Strouhal (sección 5.4.2)).

Las condiciones iniciales que fijamos para este sistema es $\theta(0) = 0$

$$\text{y } \frac{d\theta}{dt}(0) = \dot{\theta}(0) = 0.$$

Las amplitudes se mantienen prácticamente constantes en el intervalo de tiempo considerado en la simulación, disminuyendo a intervalos de tiempo mayores (Figura 5.18).

En la figura 5.19, variando la condición inicial $\theta(0) = \frac{\pi}{180}$ y

$$\frac{d\theta}{dt}(0) = \dot{\theta}(0) = 0, \text{ y tomando ahora una frecuencia } f \text{ de } 0.2 \text{ Hertz,}$$

la situación es llamativa, las amplitudes ahora crecen y decrecen a lo largo del tiempo considerado. Precisamente la frecuencia 0.2 es la que corresponde a la frecuencia de las oscilaciones de torsión del puente, minutos antes de colapsar.

¹⁴ Es el ángulo que forma la estructura con el flujo incidente. Ese coeficiente depende del perfil que presente esa estructura de ensayos realizados en túnel de viento.

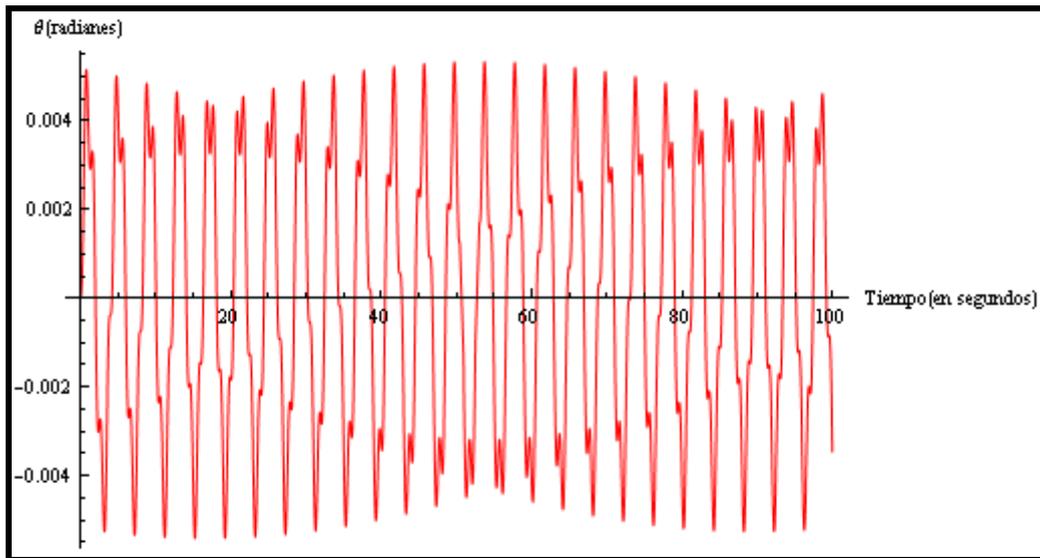


Figura 5.18: Oscilaciones constantes con frecuencia de 1 Hertz.

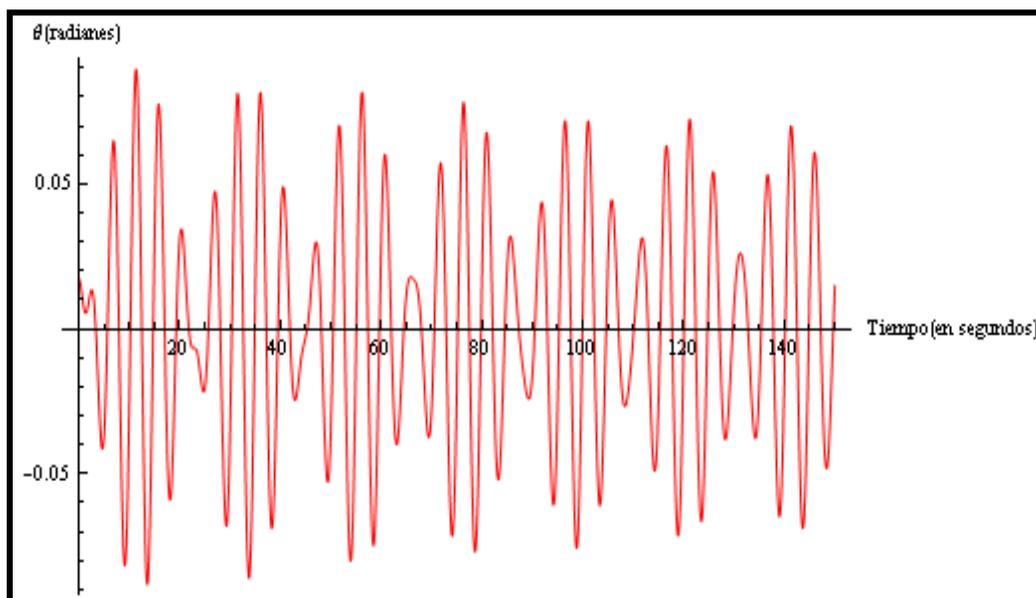


Figura 5.19: Oscilaciones con frecuencias de 0.2, la misma que tuvo el puente antes de derrumbarse.

Si ahora cambiamos el δ en 0.01, mantenemos la frecuencia f en 1 y aumentamos λ , ahora en 0.08, el comportamiento de las soluciones a largo plazo es decrecer en las oscilaciones (Figura 5.20).

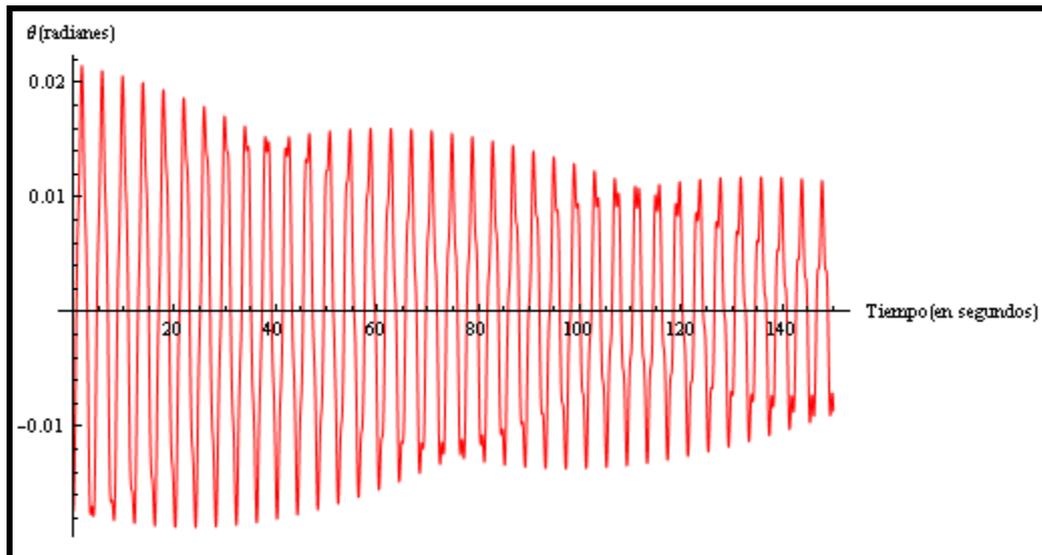


Figura 5.20: Las oscilaciones decrecen para $\delta = 0.01$ y $\lambda = 0.08$.

Si linealizamos el sistema 5.20, siendo $\mathbf{Cos}(\theta) = 1$ y $\mathbf{Sin}(\theta) = \theta^{15}$, queda

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\delta_1 v - \left(\frac{6K}{M}\right)\theta + \lambda \mathbf{Sin}(\omega t) \end{cases} \quad 5.21$$

Y comparamos las soluciones de 5.20 y 5.21 se presentan aspectos interesantes para explorar, por ejemplo, para los mismos valores de δ y λ de la figura 5.16 y cambiando solo ω en $\sqrt{2.4}$, observamos la diferencia de comportamiento de las soluciones en el modelo no lineal y lineal en el mismo intervalo de tiempo trabajado en las simulaciones.

En la figura 5.21 vemos el aumento y decrecimiento de las oscilaciones para una frecuencia muy cercana a la frecuencia natural del sistema, estas oscilaciones se llaman pulsos.

En cambio en la figura 5.22, las oscilaciones crecen debido a que la frecuencia natural del sistema sin forzamiento es el mismo que la frecuencia del sistema (frecuencia de resonancia).

¹⁵ Es la aproximación de primer grado del seno de θ a través de un polinomio de Taylor.

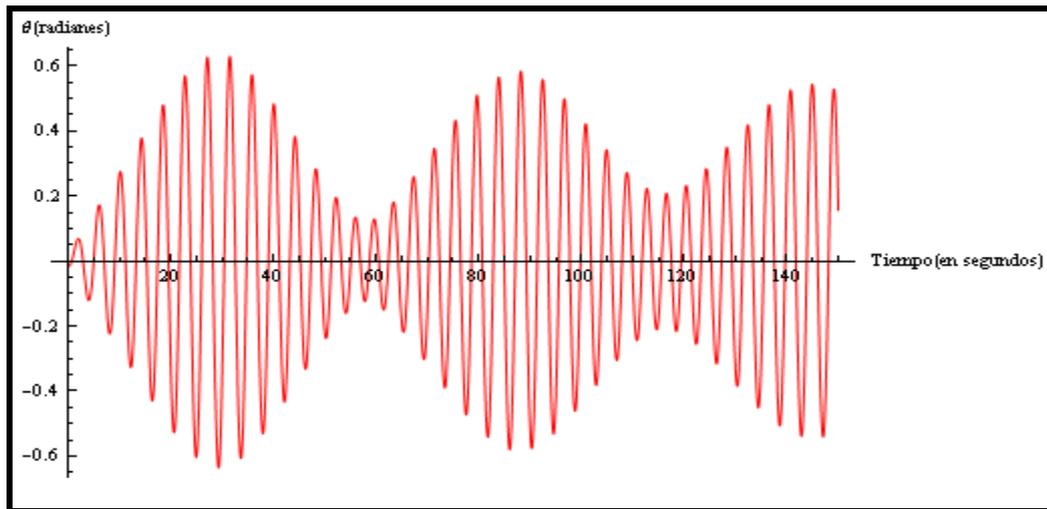


Figura 5.21: Oscilaciones para $\omega = \sqrt{2.4}$ para el sistema no lineal.

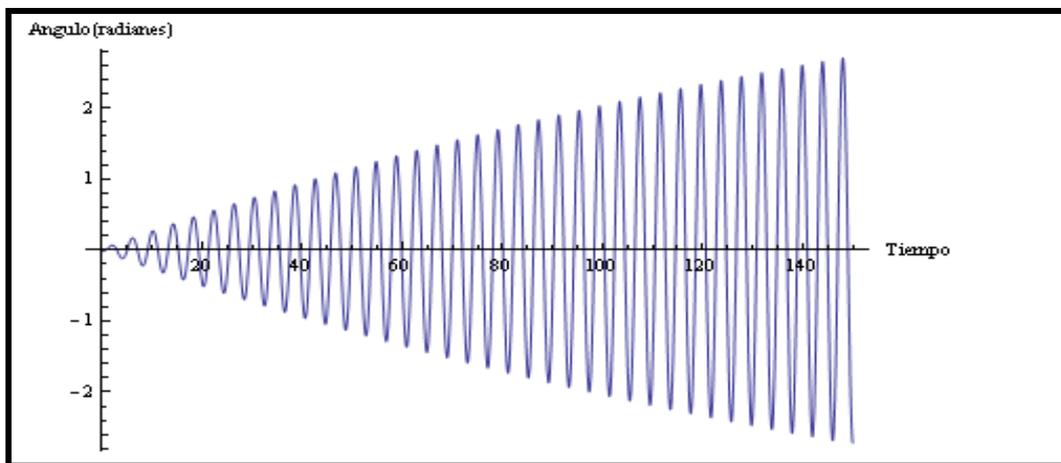


Figura 5.22: Oscilaciones para $\omega = \sqrt{2.4}$ para el sistema lineal.

En el apéndice D se muestra un programa que realiza la simulación interactiva con la variación de los parámetros de la ecuación 5.11 y 5.17.

5.5 Parámetros medibles a través de las filmaciones del derrumbe del puente de Tacoma

En esta sección se realizaron mediciones a través de una filmación de los 50 segundos finales de la estructura antes del derrumbe. Del video podemos visualizar la dirección del viento, el período de oscilación en ese intervalo de tiempo, la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones. También podemos ver los vórtices que atraviesa la calzada detrás del auto que quedó detenido en el vano [13]. La

literatura sobre las mediciones y experimentos posterior al desastre se pueden consultar en [14].

Los resultados de las observaciones del video fueron los siguientes:

- El ángulo de inclinación de la plataforma, de un extremo a otro, es de 40 grados aproximadamente. Las dimensiones de la calzada fue de 11.90 metros y el canto de 2.41 metros. La altura que alcanzó con respecto al centro de rotación, teniendo como referencia la línea amarilla y una de las torres, fue de 4 metros aproximadamente (Figura 5.23).



Figura 5.23: Las imágenes reflejan los momentos finales del puente y a partir de las cuales se determinó el ángulo de inclinación. Este cálculo está acorde con las referencias consultadas.

- El periodo se calculó midiendo las oscilaciones cada cinco segundos (un ciclo). Ese periodo se mantuvo constante en 0.2 Hertz aproximadamente. En la figura 5.24 se graficaron las mediciones realizadas.

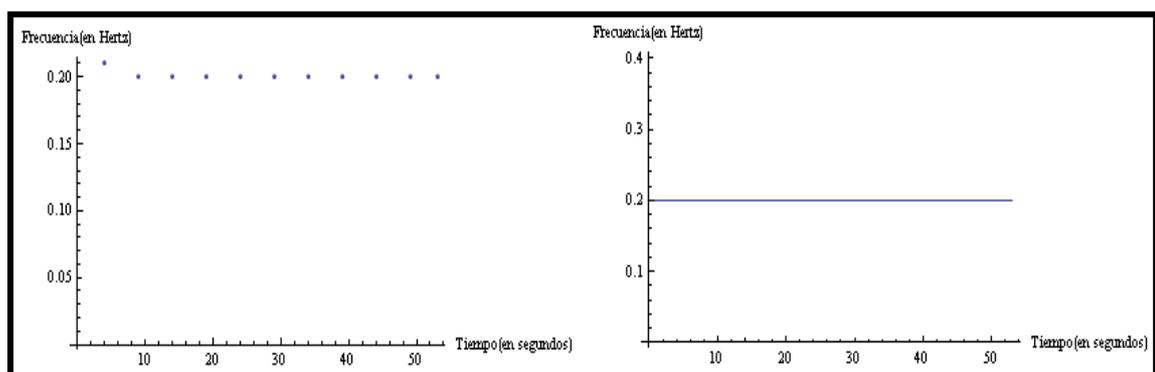


Figura 5.24: Gráfico de la frecuencia en función del tiempo, constante en 0.2 Hertz en los casi 50 segundos antes del derrumbe. Estas mediciones se realizaron cada 5 segundos determinado aproximadamente 11 ciclos.

- Las amplitudes se indican mediante un gráfico en función del tiempo. Se ratifica que las amplitudes fueron aumentando en el tiempo estudiado como se ve en la figura 5.25 (El resultado de las mediciones se encuentran en el apéndice E).

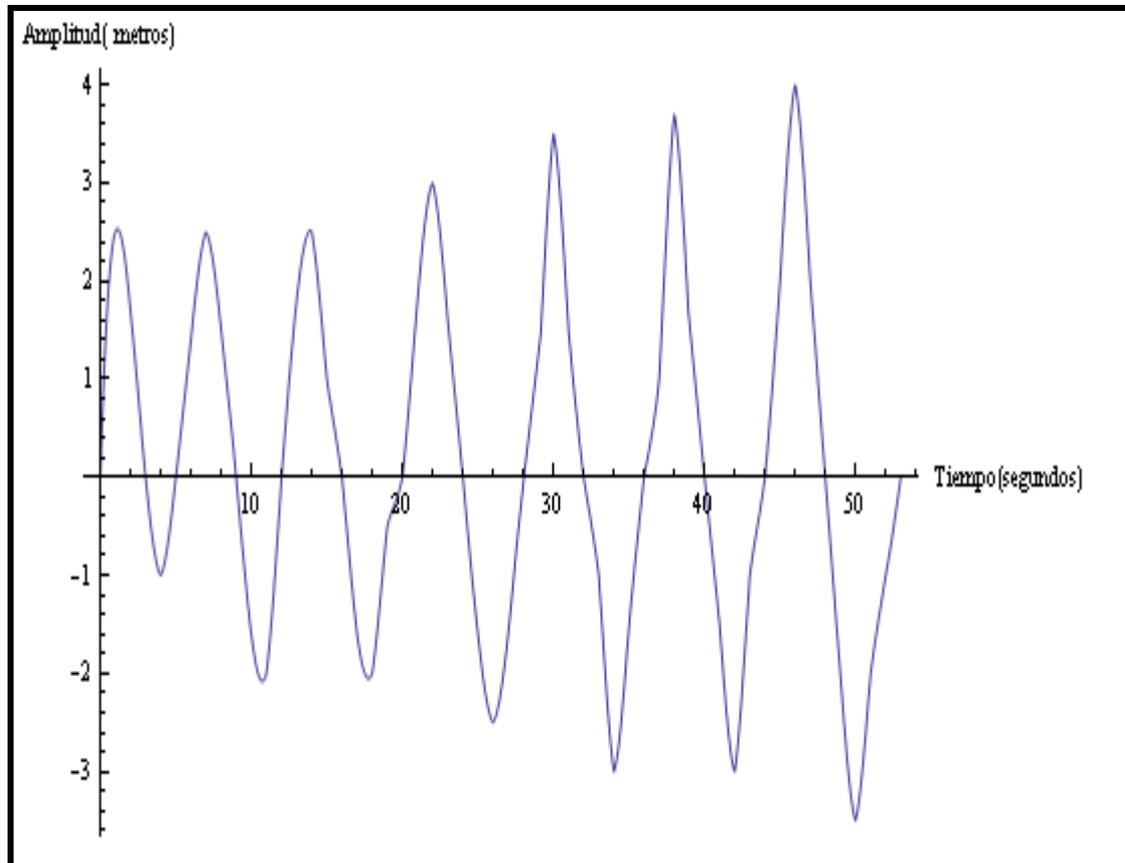


Figura 5.25: Gráfico de la amplitud en función del tiempo en los últimos 50 segundos en que el vano se mantuvo en movimiento de torsión. El puente oscila con amplitud variable y creciente.

A partir de esta gráfica (determinada a través de una función de interpolación con el programa Mathematica donde los valores obtenidos y los comandos se detallan en el apéndice F) podemos realizar una análisis de regresión para encontrar una curva Amplitud (y)-tiempo (t) que relacione los datos medidos. Mediante el método de los cuadrados mínimos¹⁶ determinamos una recta, con pendiente positiva ya que solo consideramos los puntos máximos de la curva, se detallan en la figura 5.26 (este procedimiento se escribe en el apéndice G).

¹⁶ La demostración para la determinación de la pendiente y la ordenada al origen por este método es utilizando el cálculo de extremos en dos variables minimizando la función

$$\phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{a} - \mathbf{b}x_i)^2 \text{ utilizando el determinante Hessiano.}$$

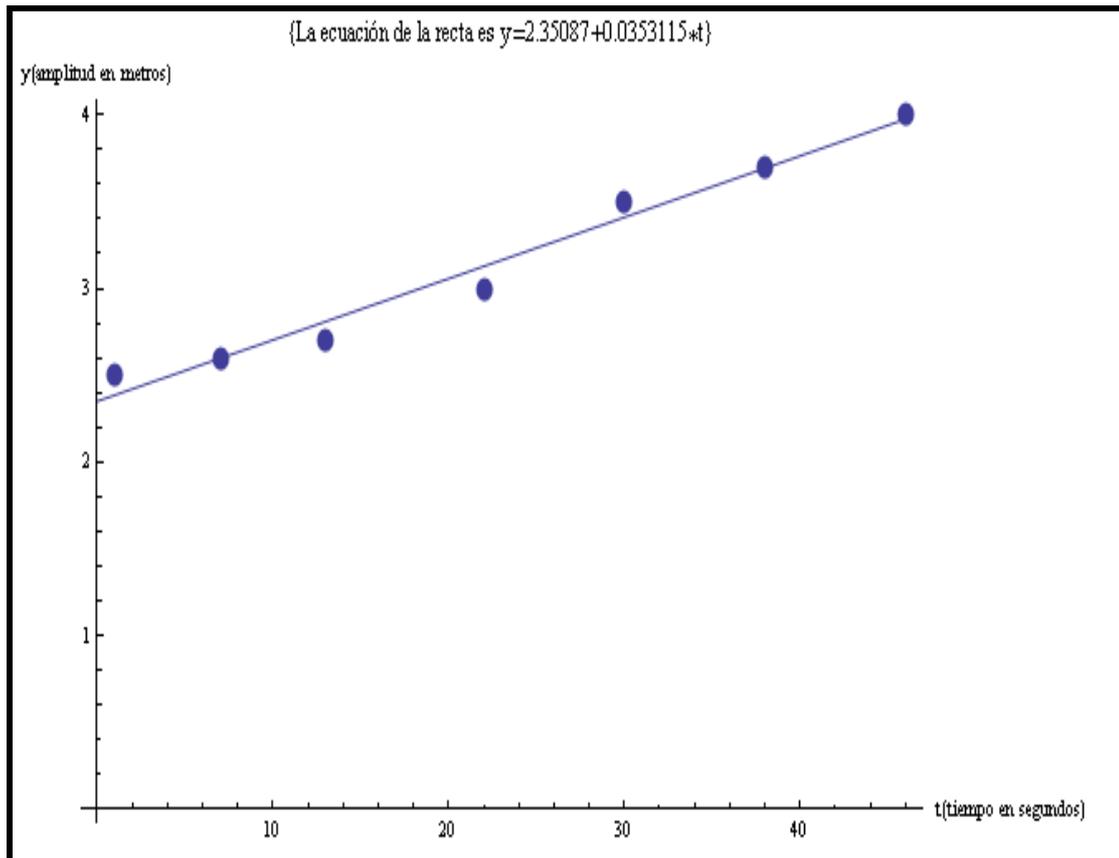


Figura 5.26: Recta determinada por el método de cuadrados mínimos de las amplitudes de las oscilaciones en función del tiempo.

- De acuerdo a las mediciones consultadas, la frecuencia coincide con las mediciones realizadas, es decir, 0.2 Hertz. La frecuencia(f) con que ejerció la fuerza que provocaron los remolinos torsionando el puente se puede calcular con la siguiente formula[17]:

$$f = \frac{S \cdot V}{D} \quad 5.22$$

Siendo

S: constante adimensional denominada número de Strouhal, en este caso 0.14 [17].

V: velocidad del viento en el momento del derrumbe aproximadamente 65 Km/hora.

D: canto del puente en 2.41 metros

De acuerdo con estos datos la frecuencia es igual a 1 Hertz, que no coincide con la frecuencia calculada anteriormente, por lo tanto esto prueba en forma experimental que la resonancia no fue la causante que el puente se derrumbara al no coincidir la frecuencia de oscilación con la frecuencia de la fuerza excitadora, por lo tanto desprendimientos de vórtices no explica en forma satisfactoria la caída de la estructura.

Otra forma de analizar la gráfica 5.26 es determinar una función mediante un modelo de regresión¹⁷ no lineal del tipo exponencial¹⁸ como se muestra en la figura 5.27 (En el apéndice F se detalla el procedimiento con el programa Mathematica para obtener esta curva).

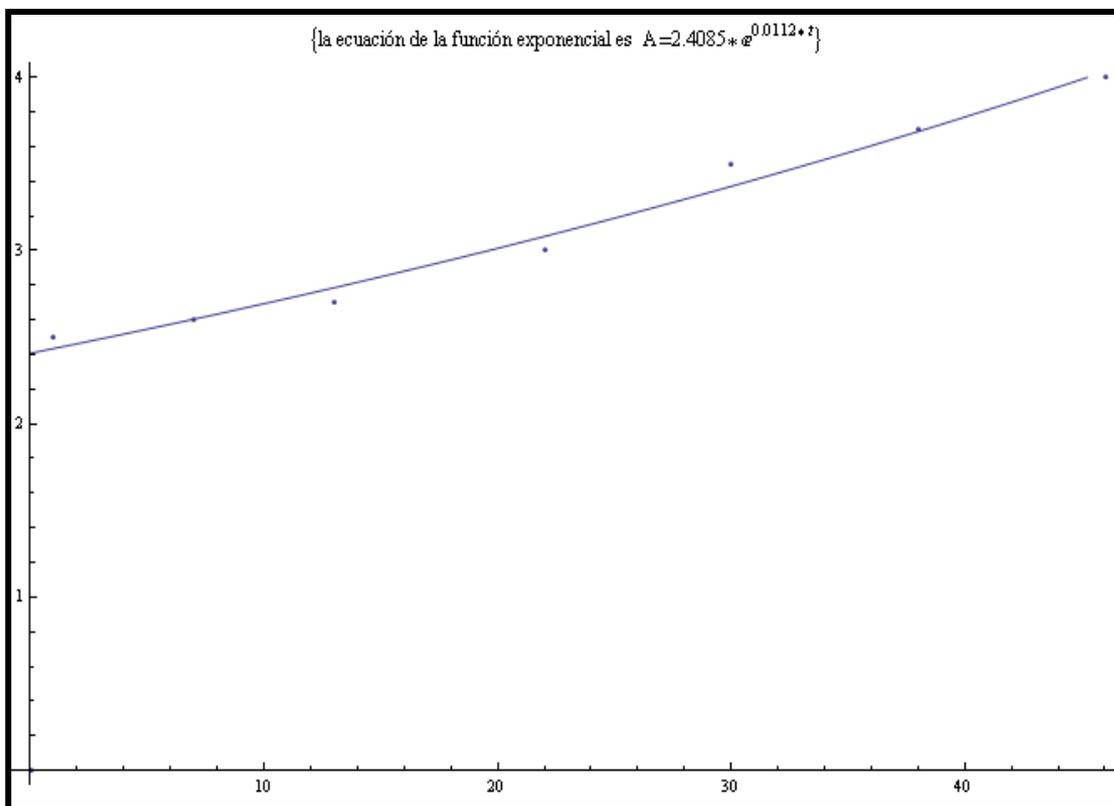


Figura 5.27: Función exponencial determinada en base a los datos medidos.

En la gráfica, la exponencial tiene la fórmula $A = 2.4085.e^{0.0112t}$, donde a través del coeficiente del exponente podemos calcular el porcentaje en que crecen las amplitudes.

¹⁷ Para determinar estas curvas de regresión se consultó también al programa INFOSTAT. Se puede descargar su versión libre en la página <http://infostat.uptodown.com/>

¹⁸ La fórmula que responde al modelo exponencial tiene la forma $y = a e^{bx}$

Si analizamos el gráfico de la función exponencial, el coeficiente del exponente (b) es un indicador del porcentaje de variación de la amplitud en la unidad de tiempo. Según la curva de regresión $b=0.0112$ aproximadamente, esto no indica un porcentaje de 1.12% en el último tramo previo al derrumbe.

Segundo

5.6 Algunos cálculos adicionales: Sustentación y resistencia aerodinámica

Si a la estructura la consideramos como una placa plana de 426.5 metros de largo (mitad del puente) por 11.90 metros de ancho (datos reales del puente) podemos calcular la fuerza de sustentación (λ_1), que es perpendicular a la dirección del flujo de aire (detallada en 5.4.1).

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \rho u^2 C_L_{\text{SUSTENTACIÓN}} \quad 5.23$$

Y la resistencia aerodinámica (λ_2)

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \rho u^2 C_d_{\text{RESISTENCIA}} \quad 5.24$$

Si consideramos que el ángulo de ataque¹⁹ del flujo de aire incidente y la estructura es de 12 grados, los coeficientes de sustentación C_L y de resistencia C_D son 0.72 y 0.17 respectivamente [17] (las fuerzas se ven la figura 5.23). El cálculo de las fuerzas se describe de la siguiente forma

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 426.5 \text{m} \cdot 11.90 \text{m} \cdot \frac{65000^2}{3600^2 \text{m}^2} \cdot 0.72 \cong 732647 \text{N} \cong 74759$$

$\cong 74.75$ Toneladas para la sustentación

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 426.5 \text{m} \cdot 11.90 \text{m} \cdot \frac{65000^2}{3600^2 \text{m}^2} \cdot 0.17 \cong 172986 \text{N} \cong 17651$$

¹⁹ El ángulo de ataque cuando llega a un ángulo denominado crítico, la sustentación disminuye

≅ **17.65** Toneladas para la resistencia aerodinámica

Siendo la fuerza resultante 76.81 Toneladas aproximadamente La figura 5.28 muestra un bosquejo de las fuerzas actuantes.

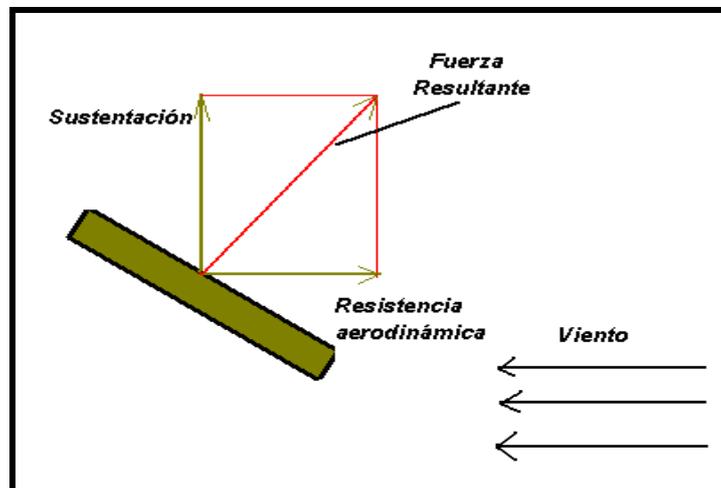


Figura 5.28: Esquema de las fuerzas de sustentación y resistencia aerodinámica.

Todo esto se podría analizar en el contexto de la Interferencia. Este es un fenómeno donde una o mas ondas se superponen para formar una onda denominada resultante de mayor o menor amplitud [18]. Este efecto se observa en cualquier tipo de onda, como luz, sonido y en este caso particular los movimientos del puente de Tacoma. Los movimientos de la estructura ondulatoria al formar ondas desfasadas en 180 grados produjeron el fenómeno denominado interferencia destructiva.

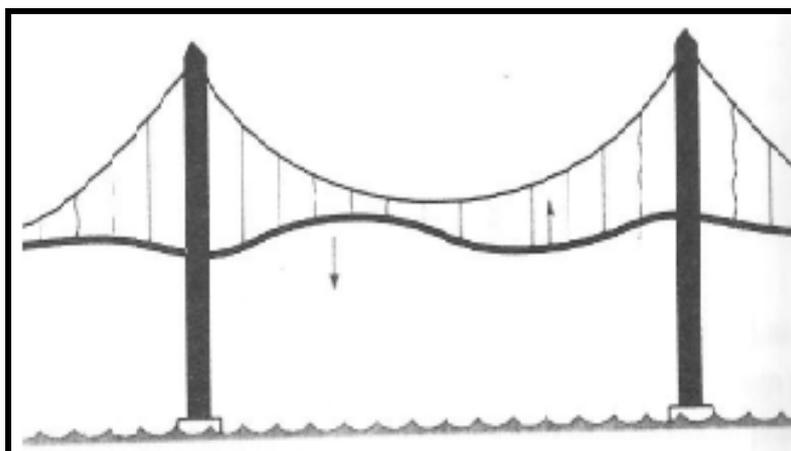


Figura 5.29: Ondas que se producían en el puente momentos antes de colapsar.

5.6 EL debate sigue: ¿Qué Causó el colapso del puente de Tacoma?

En la actualidad no queda claro, mas allá de todos los estudios realizados, cual fue la causa preponderante que provocó el derrumbe. Descartado la resonancia porque lo que describimos anteriormente, la explicación predominante más fuerte hoy en día es la inestabilidad aerodinámica conocida como flameo o flutter. Esta inestabilidad tiene lugar a partir de cierta velocidad del viento (denominada crítica) cuando el flujo de aire incidente sobre el perfil del puente en combinación con los movimientos de la propia estructura da lugar a que las oscilaciones del tablero diverjan debido a un alto nivel que alcanzan las tensiones del material. Estas fuerzas debido al viento y a la propia estructura se llaman fuerzas autoexcitadas²⁰. De las muchas explicaciones, la flexibilidad, la falta de rigidez, el ancho de la calzada no acorde con la longitud del puente pueden haber sido las causas que provocaron estas fuerza. Todos los estudios provocaron mirar con más atención el efecto de la naturaleza realizando modelos previos en túneles de viento. Matemáticamente la técnica conocida como elementos finitos permitió analizar estructuras complejas reduciéndolas a estructuras pequeñas interconectadas imponiéndose sobre otros modelos que involucran ecuaciones simplistas como las que analizamos.

5.7 Conclusiones finales

En muchas situaciones un estudio más completo de una estructura del tipo aeroelástica tan compleja como un puente colgante implica realizar un gran número de simplificaciones para realizar un análisis, no solo cualitativo (como intento ser este trabajo) sino numérico para obtener resultados cuantitativos que estén de acuerdo (en una primera aproximación) con lo que suceda en la práctica. Al tener en cuenta que se trabajo con un modelo simple y primario de la oscilación de puentes, trabajando solo con una sección representativa en forma longitudinal y transversal, las hipótesis simplificadoras fueron no considerar el ancho y el largo como así también no se tuvo en cuenta que la luz del puente oscila

²⁰ En los escrito de Scanlan[14] se los denomina flameo torsional de un grado de libertad

en varias secciones dejando de lado una variable independiente espacial lo que implicaría considerar una ecuación en derivadas parciales.

A pesar de todo esto un modelo simple ayuda a entender, quizás de manera significativa el comportamiento de una estructura, no siempre de forma aerodinámica, como un puente. Estos análisis simplistas ayudan a entender que observar en comportamientos que incluyan modelos más complejos.

Apéndice A

Con el siguiente programa graficamos las Figuras de 5.1 a 5.13 para los valores de los parámetros establecidos en el Capítulo 5. El comando `NDSolve` de *Mathematica* resuelve numéricamente aproximando la solución con un polinomio de interpolación que se puede trabajar como cualquier función. Para la resolución analítica el comando a utilizar es el `DSolve` con las condiciones iniciales establecidas en capítulo mencionado.

Archivo Aproximaciones-Puente-Tacoma

```

g = 9.8; (*Aceleración de la gravedad*)

α = 0.001; (*Coeficiente de amortiguamiento*)

β = 17; (*Fuerza generada por cables y estructura cuando están estirados*)

β1 = 13; (*Fuerza generada por la superficie de rodamiento cuando esta por encima de la posición de equilibrio
(cables comprimidos)*)

(*Solucion numerica utilizando funciones de interpolación*)

solucion1 = NDSolve[{y'[t] == v[t], v'[t] == -g - α v[t] - β y[t], y[0] == 0, v[0] == 0}, {y, v}, {t, 0, 290}]

{{y → InterpolatingFunction[{{0., 290.}}, <>], v → InterpolatingFunction[{{0., 290.}}, <>]}}

(*Retrato de fase del sistema*)

ParametricPlot[Evaluate[{y[t], v[t]} /. solucion1], {t, 0, 290}, AxesLabel → {"y(Posición)", "v(Derivada de la posición)"}]

(*Las curvas solución se mueven en espiral hacia el punto de equilibrio.El puente oscila alrededor de la
posición de equilibrio*)

Plot[Evaluate[y[t] /. solucion1], {t, 0, 30}, AxesLabel → {"tiempo", " Posición y(t)"}]

y1[t_] = -  $\frac{9.8}{17}$ ;

Plot[y1[t], {t, 0, 30}]

Show[Plot[Evaluate[y[t] /. solucion1], {t, 0, 200}, AxesLabel → {"tiempo", " Posición y(t)"}],
Plot[y1[t], {t, 0, 100}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]]]

Plot[Evaluate[v[t] /. solucion1], {t, 0, 100}, AxesLabel → {"tiempo", " dy/dt" }]

```

Con el programa *Maple* podemos realizar el mismo trabajo similar a *Mathematica* a diferencia que no solo podemos representar todas las figuras descritas con anterioridad sino también el retrato de fase agregando la variable tiempo en la representación

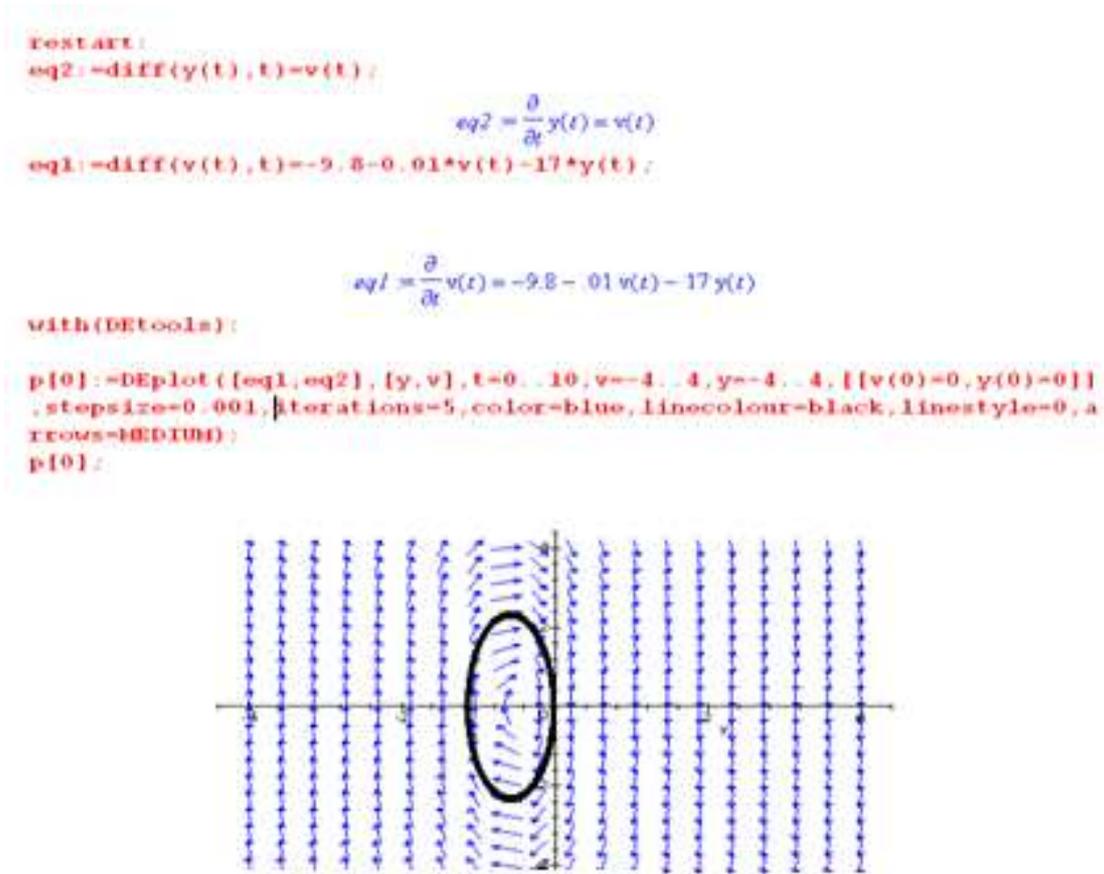


Figura A.1: Campo de pendientes para el sistema analizado en el capítulo 5 donde los vectores se ven con color azul. Con color negro se muestran las soluciones del sistema ya mencionado.

```

sys := diff(y(t), t) = v(t), diff(v(t), t) = -9.8 - 0.01*v(t) - 17*y(t); fcons := [v(t), y(t)];
F := dsolve(sys, v(0)=0, y(0)=0, fcons, type=numeric);
P := proc(t) options quiet; return eval
endplot(F, [t, v(t), y(t)], 0..10, axes=normal, numpoints=1500, style=line, labels=[t, v, y]);

```

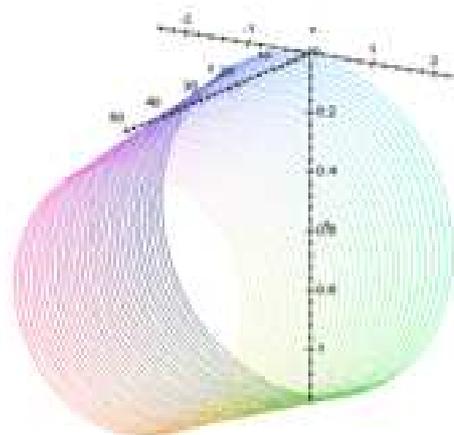


Figura A.2: Retrato de fase tridimensional. Podemos observar como se mueven las curvas solución con respecto al tiempo.

Apéndice B

Con el programa Matlab[20] recreamos las mismas graficas obtenidas anteriormente utilizando los dos archivos cuyos nombres figuran abajo. Para las soluciones Matlab utiliza el comando ode45.

Archivo misist1

```
function yp=misist1(x,y)
alfa=0.01;%constante
beta=1;%constante
yp=y;
yp(1)=-alfa*y(1)-17*y(2)-10
yp(2)=beta*y(1)
```

Archivo programita1

```
tf=15;
y0=[0,0]%condiciones iniciales
[T,y]=ode45('misist1',[0,tf],y0);%ode45 es el método Runge-
Kutta orden 4
figure(1)
plot(T,y)%grafica la variación de la posición y posición
con respecto al tiempo
xlabel('tiempo')
ylabel('Posición y Variación de la posición')
legend('Variación','Posición')
grid on
figure(2)
plot(y(:,1),y(:,2))%gráfica el espacio de fases
xlabel('Variación de la posición')
ylabel('Posición')
grid on
opciones=odeset('ABSTOL',1e-3,'RELTOL',1e-3)%La
especificaciones ABSTOL Y RELTOL tiene que ver con los
dígitos de precisión
[T1,y1]=ode45('misist1',[0,tf],y0,opciones)
figure(3)
plot(T1,y1)
xlabel('tiempo')
ylabel('Posición y Variación de la posición')
legend('Variación de la posición','Posición')
grid on
figure(4)
plot(y1(:,1),y1(:,2))%grafica el espacio de fases posición
y variación de posición
xlabel('Variación de la posición')
ylabel('Posición')
grid on
```

Apéndice B

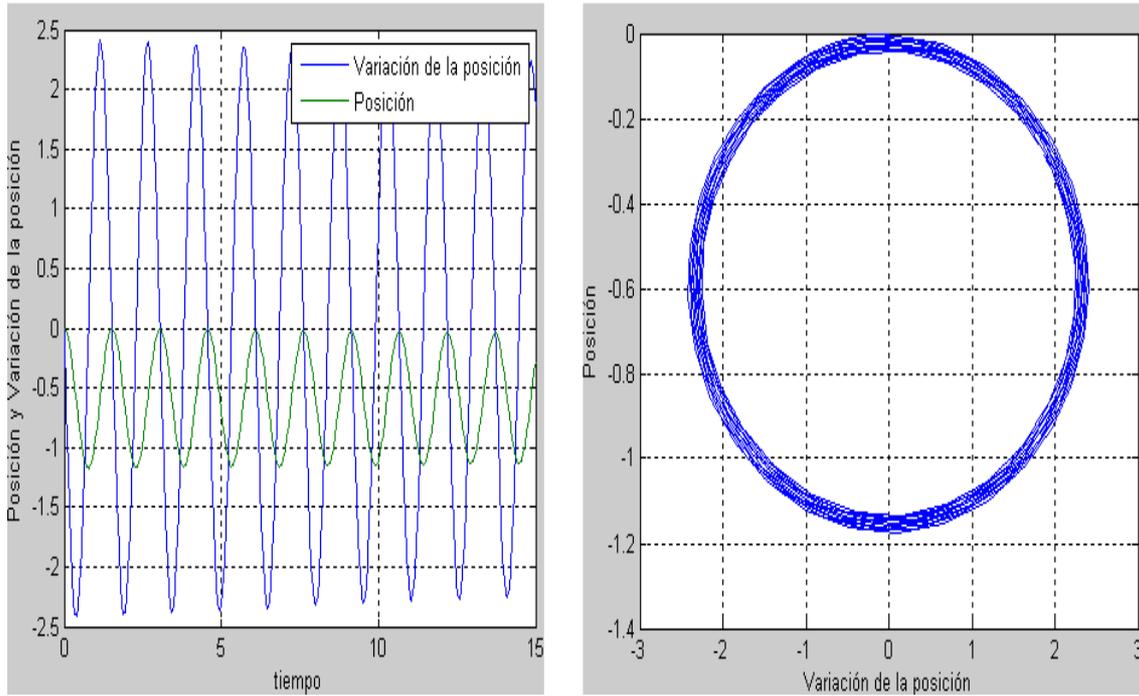


Figura B.1: El gráfico de la izquierda nos muestra superpuestos el gráfico posición de la estructura (color verde) y variación de la posición (color azul). El gráfico de la derecha nos muestra el retrato de fase con la órbita alrededor de la posición de equilibrio (soluciones en el intervalo de tiempo considerado).

Apéndice C

Este programa que se detalla es el algoritmo de Runge-Kutta[21] para resolver el sistema de ecuaciones 5.8 con el programa Mathematica.

Archivo graficas-Tesis-runge-kutta

```
f[t_, x_, y_] = y;
g[t_, x_, y_] = -0.01 y - 17 x - 9.8;

h = 0.001;

xrk[0] = 0;
yrk[0] = 0;

t[n_] = h * n;

xrk[n_] := Module[{k1, k2, k3, k4}, k1 = f[t[n - 1], xrk[n - 1], yrk[n - 1]]; m1 = g[t[n - 1], xrk[n - 1], yrk[n - 1]];
k2 = f[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k1) / 2, yrk[n - 1] + (h m1) / 2]; m2 = g[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k1) / 2, yrk[n - 1] + (h m1) / 2];
k3 = f[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k2) / 2, yrk[n - 1] + (h m2) / 2]; m3 = g[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k2) / 2, yrk[n - 1] + (h m2) / 2];
k4 = f[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k3) / 2, yrk[n - 1] + (h m3)]; m4 = g[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k3) / 2, yrk[n - 1] + (h m3)];
xrk[n] = xrk[n - 1] + (h / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)]

yrk[n_] := Module[{k1, k2, k3, k4}, k1 = f[t[n - 1], xrk[n - 1], yrk[n - 1]]; m1 = g[t[n - 1], xrk[n - 1], yrk[n - 1]];
k2 = f[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k1) / 2, yrk[n - 1] + (h m1) / 2]; m2 = g[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k1) / 2, yrk[n - 1] + (h m1) / 2];
k3 = f[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k2) / 2, yrk[n - 1] + (h m2) / 2]; m3 = g[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k2) / 2, yrk[n - 1] + (h m2) / 2];
k4 = f[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k3) / 2, yrk[n - 1] + (h m3)]; m4 = g[t[n - 1] + h/2, xrk[n - 1] + (h k3) / 2, yrk[n - 1] + (h m3)];
yrk[n] = yrk[n - 1] + (h / 6) * (m1 + 2 * m2 + 2 * m3 + m4)]

solucion = Table[{t[n], xrk[n], yrk[n]}, {n, 0, 3000}];

solucion1 = Table[{xrk[n], yrk[n]}, {n, 0, 3000}];

ListPlot[solucion1, AspectRatio -> Automatic]

solucion2 = Table[{t[n], xrk[n]}, {n, 0, 3000}];

ListPlot[solucion2]

solucion3 = Table[{t[n], yrk[n]}, {n, 0, 3000}];

ListPlot[solucion3]
```

También el programa permite aplicar este método directamente el método de Runge-Kutta a través del comando NDSolve

Apéndice D

La simulación en el modo rotación se hizo con un programa extraído de la página de la Wolfram Research [16]²¹. Se analiza en forma interactiva las oscilaciones para un rango de valores de los parámetros de θ , λ y ω en un intervalo de tiempo entre 100 y 400. En la figura se notan las oscilaciones crecientes para las condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{\pi}{180}$, $\frac{d\theta}{dt}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ y valores de $\lambda = 0.01$ y $\omega = 1.51$ en el intervalo de tiempo de 0 a 100.

Archivo Tacoma Narrows Bridge Collapse

```
In[11]= Manipulate[With[{sol = NDSolve[{θ''[t] + 0.001 θ'[t] + 2.4 Cos[θ[t]] Sin[θ[t]] == λ Sin[ω t], θ[0] == θ0, θ'[0] == 0}, θ, {t, 0, 300}],
  Plot[Evaluate[θ[t] /. sol], {t, 0, 300}, PlotRange -> {{0, tf}, {-0.5, 0.5}}, ImageSize -> {500, 300}],
  {{tf, 100., "time"}, 100, 500, Appearance -> "Labeled"}, {{θ0, Pi / 180., "θ0"}, -Pi / 180, Pi / 180, Appearance -> "Labeled"},
  {λ, 0.01, 0.09, Appearance -> "Labeled"},
  {ω, 1, 6, Appearance -> "Labeled"}, SynchronousUpdating -> False]
```

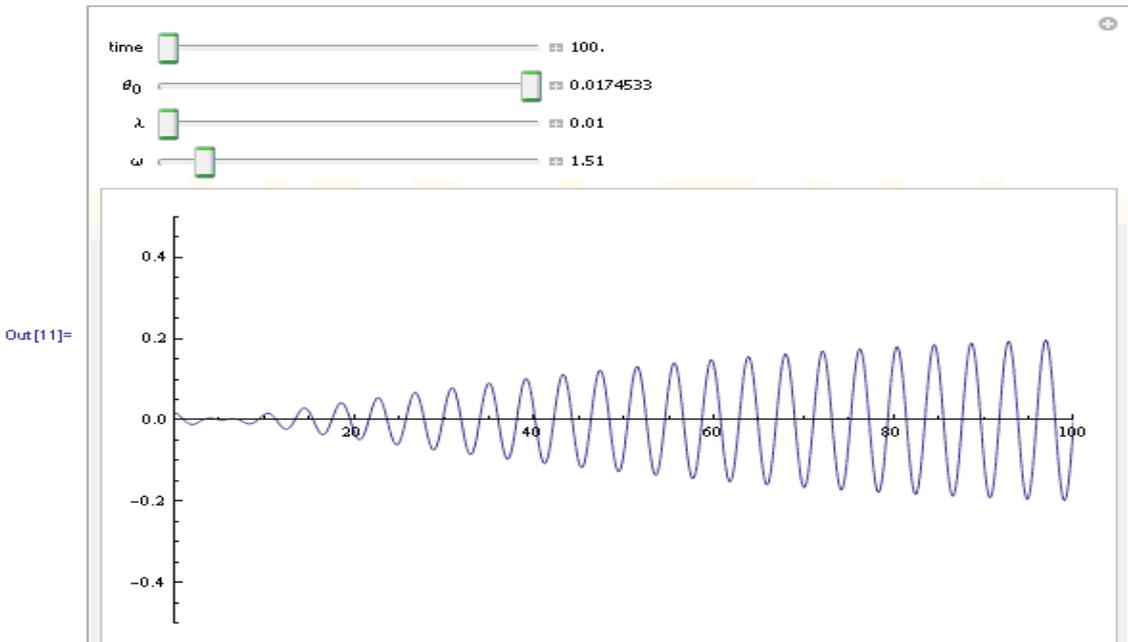


Figura D.1: Oscilaciones crecientes para las condiciones iniciales mencionadas.

²¹ En la página de la Wolfram Research se puede consultar por otras aplicaciones simuladas con el programa. Esta institución liderada por Stephen Wolfram tuvo influencia en la asesoría de una conocida serie de televisión de la cadena CBS, NUMB3RS que duró 6 temporadas

Apéndice E

El siguiente código extraído de la página de la Wolfram Research [16] nos permite determinar la solución de la ecuación diferencial de segundo orden completa (Ver capítulo 5.2 ecuación 5.9) para distintos valores de los parámetros involucrados en la misma.

Archivo *Forced Oscillator with Damping*

```

DPPlot[bb_, mm_, kk_, xinit_, AA_, ω_, tfinal_] := Module[{} , {Clear[t, x, ā, ω, k, b, m];
  With[
    {sol = First@NDSolve[{x''[t] + (bb/mm)x'[t] + (kk/mm)x[t] == -9.8 + AA/mm * Cos[ω t], x'[0] == 0, x[0] == xinit},
      x, {t, 0, tfinal}], Plot[Evaluate[x[t] /. sol], {t, 0, tfinal}, PlotRange -> {{0, tfinal}, {-20, 20}},
      ImageSize -> {425, 350}, ImagePadding -> {{35, 35}, {20, 40}},
      AxesLabel -> {Style["t", 14, Bold, Italic], Style["x(t)", 14, Italic, Bold]},
      PlotLabel -> TraditionalForm[m x''[t] + b x'[t] + k x[t] == -9.8 + ā Cos[ω t]]]}]]

In[10]= DPPhasePlot[bb_, mm_, kk_, xinit_, AA_, ω_, zoom_, tfinal_] :=
  Module[{x, t},
    With[
      {sol = First@NDSolve[{x''[t] + (bb/mm)x'[t] + (kk/mm)x[t] == -9.8 + AA/mm * Cos[ω t], x'[0] == 0, x[0] == xinit},
        x, {t, 0, tfinal}], ParametricPlot[{Evaluate[x[t] /. sol], Evaluate[x'[t] /. sol]}, {t, 0, tfinal},
        PlotRange -> {{-zoom, zoom}, {-zoom, zoom}}, ImageSize -> {425, 350},
        AxesLabel -> {Style["x(t)", 14, Italic, Bold], Style["x'(t)", Italic, 14, Bold]}]}]]

Manipulate[
  Column[{Switch[plottype, "position", DPPlot[bb, mm, kk, xinit, AA, ω, time], "phase",
    DPPhasePlot[bb, mm, kk, xinit, AA, ω, zoom, time]],
  Style[Row[{"mass = ", mm, Spacer[20], "|", Spacer[20], "spring constant = ", kk, Spacer[20], "|", Spacer[30],
    "damping = ", bb}], "Label"],
  Style[Row[{"driving amplitude = ", AA, Spacer[20], "|", Spacer[20], "driving frequency = ", ω}], "Label"], Center],
  {{mm, 2500, "mass"}, 100, 2500, .01, ImageSize -> Tiny},
  {{kk, 1000, "spring constant"}, 0, 1000, .01, ImageSize -> Tiny},
  {{bb, 0, "damping"}, -100, 100, .01, ImageSize -> Tiny},
  {{xinit, 0, "initial position"}, 0, 10, ImageSize -> Tiny}, Delimiter, "forcing function",
  {{AA, 3, "amplitude"}, 0, 2 * Pi, .01, ImageSize -> Tiny}, {{ω, 2, "frequency"}, ImageSize -> Tiny, 0, 2 Pi, .01, ImageSize -> Tiny},
  Delimiter,
  {{plottype, "position", "plot type"}, {"position", "phase"}}, {{zoom, 10}, .5, 20, ImageSize -> Tiny, Enabled -> plottype == "phase"},
  Delimiter, {{time, 50}, 0, 200, ImageSize -> Tiny}, SaveDefinitions -> True, AutorunSequencing -> {2, 3, 5}]

```

Este programa no solo grafica la solución (posición en función del tiempo) sino el plano de fase que se visualizan en las figuras D1 y D2. La ventaja del código descrito es la forma interactiva en que se

pueden ver las soluciones ya que cada parámetro tiene un determinado rango de valores en que puede ser evaluado.

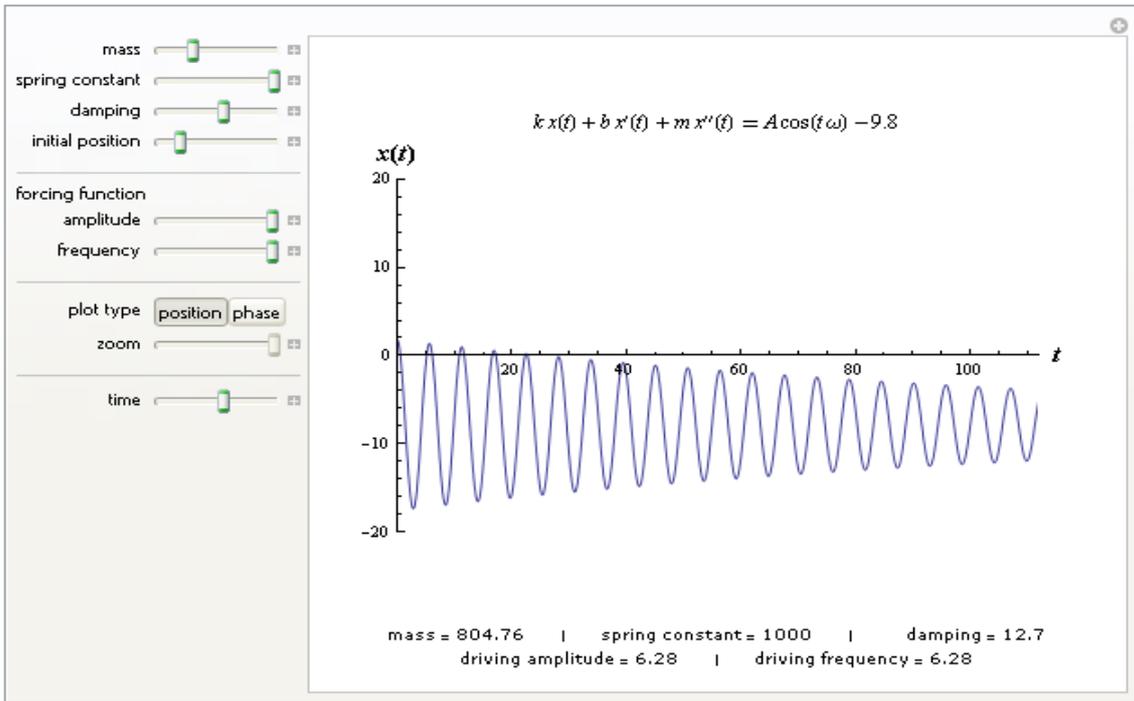


Figura D1: Grafico de la posición $x(t)$ en función del tiempo.

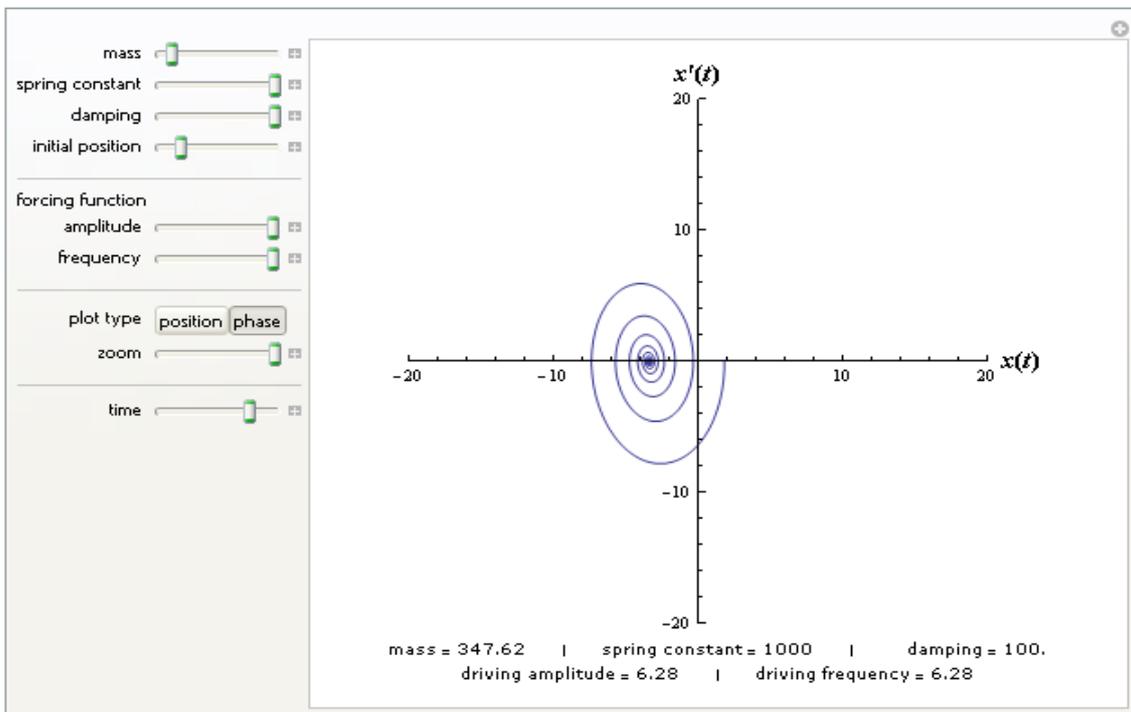


Figura D2: Diagrama de fase. Evolución de la variación de la posición y la posición con respecto al tiempo.

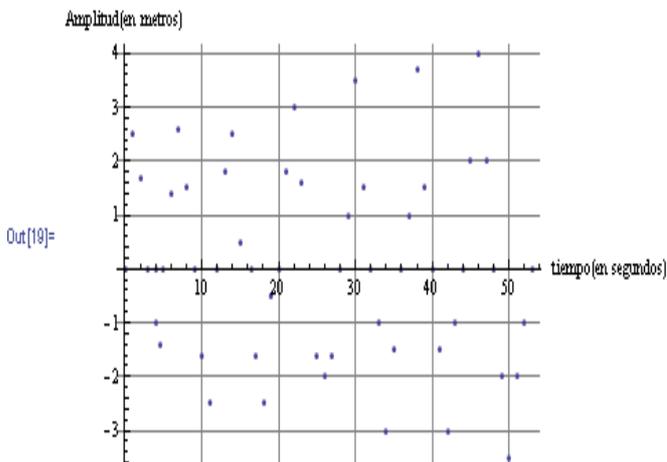
Apéndice F

A continuación se muestran la tabla de valores escritas en el programa Mathematica donde la primera componente es el tiempo y la segunda componente la amplitud de la estructura, todo esto en 53 segundos de video [13]. La grafica escrita debajo de estos pares ordenados nos muestra la representación de estos puntos en el plano. Estas mediciones se realizaron mediante sucesivas paradas del video en intervalos de tiempo de 1 segundo (algunas explicaciones se detallan en la sección 5.5).

Archivo datos-video

In[18]= (*Gráfico de tiempo[en segundos]-Amplitud[en metros]*)

```
In[19]= data = ListPlot[{{0, 0}, {1, 2.5}, {2, 1.7}, {3, 0}, {4, -1}, {4.5, -1.4}, {5, 0}, {6, 1.4}, {7, 2.6}, {8, 1.5}, {9, 0},
    {10, -1.6}, {11, -2.5}, {12, 0}, {13, 1.8}, {14, 2.5}, {15, 0.5}, {16.5, 0}, {17, -1.6}, {18, -2.5}, {19, -0.5},
    {20, 0}, {21, 1.8}, {22, 3}, {23, 1.6}, {24, 0}, {25, -1.6}, {26, -2}, {27, -1.6}, {28, 0}, {29, 1}, {30, 3.5},
    {31, 1.5}, {32, 0}, {33, -1}, {34, -3}, {35, -1.5}, {36, 0}, {37, 1}, {38, 3.7}, {39, 1.5}, {40, 0}, {41, -1.5},
    {42, -3}, {43, -1}, {44, 0}, {45, 2}, {46, 4}, {47, 2}, {48, 0}, {49, -2}, {50, -3.5}, {51, -2}, {52, -1}, {53, 0}},
    GridLines -> Automatic, AxesLabel -> {"tiempo(en segundos)", "Amplitud(en metros)"}]
```



Los pares ordenados escritos nuevamente (nombrado con points) nos permiten determinar mediante el comando Interpolation del Mathematica obtener una gráfica tiempo-Amplitud en ese intervalo de tiempo. La curva aproximada se determina mediante polinomios interpoladores de Lagrange o Hermite [11].

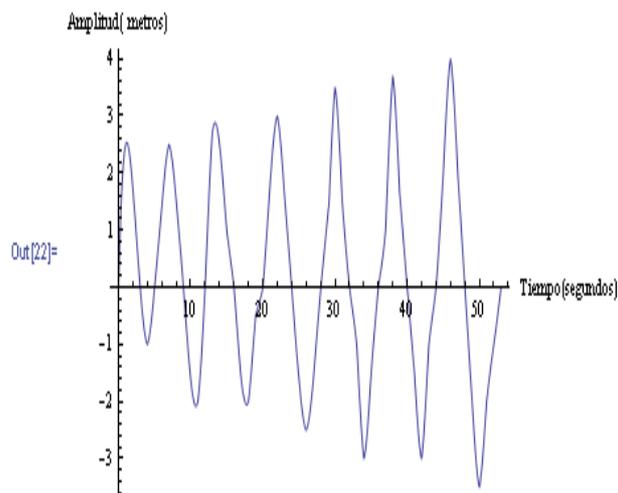
Archivo datos-video

```
In[20]= points := {{0, 0}, {1, 2.5}, {2, 1.7}, {3, 0}, {4, -1}, {5, 0}, {6, 1.4}, {7, 2.5}, {8, 1.5}, {9, 0}, {10, -1.6}, {11, -2},  
    {12, 0}, {13, 2.7}, {14, 2.5}, {15, 1}, {16, 0}, {17, -1.6}, {18, -2}, {19, -0.5}, {20, 0}, {21, 1.8}, {22, 3}, {23, 1.6},  
    {24, 0}, {25, -1.6}, {26, -2.5}, {27, -1.6}, {28, 0}, {29, 1}, {30, 3.5}, {31, 1.5}, {32, 0}, {33, -1}, {34, -3},  
    {35, -1.5}, {36, 0}, {37, 1}, {38, 3.7}, {39, 1.5}, {40, 0}, {41, -1.5}, {42, -3}, {43, -1}, {44, 0}, {45, 2}, {46, 4},  
    {47, 2}, {48, 0}, {49, -2}, {50, -3.5}, {51, -2}, {52, -1}, {53, 0}}
```

```
In[21]= aprox = Interpolation[points]
```

```
Out[21]= InterpolatingFunction[{{0., 53.}}, <>]
```

```
In[22]= Plot[aprox[x], {x, 0, 53}, AxesLabel -> {"Tiempo(segundos)", "Amplitud( metros)"}]
```



Apéndice G

Mediante el paquete “NonlinearRegression” o “LinearRegression” podemos obtener la mejor curva que aproxima a las mediciones realizadas con el video. La primera aproximación realizada fue una función exponencial, donde el programa detalla la fórmula correspondiente y los valores de las ordenadas para esa función mediante el “PredictResponse”.

Archivo datos-video

```
In[23]= Needs["NonlinearRegression`"]

In[24]= NonlinearRegress[{{1, 2.5}, {7, 2.6}, {13, 2.7}, {22, 3}, {30, 3.5}, {38, 3.7}, {46, 4}}, a*E^(b*x), {a, b}, x,
  RegressionReport -> {BestFit, PredictedResponse}]

Out[24]= {BestFit -> 2.40804 e0.0112135 x, PredictedResponse -> {2.4352, 2.60468, 2.78596, 3.0818, 3.37104, 3.68743, 4.03351}}
```

```
In[25]= NonlinearRegress[{{1, 2.5}, {7, 2.6}, {13, 2.7}, {22, 3}, {30, 3.5}, {38, 3.7}, {46, 4}}, a*E^(b*x), {a, b}, x]

Out[25]= {BestFitParameters -> {a -> 2.40804, b -> 0.0112135}, ParameterCITable ->


|   | Estimate  | Asymptotic SE | CI                      |
|---|-----------|---------------|-------------------------|
| a | 2.40804   | 0.050878      | {2.27726, 2.53883}      |
| b | 0.0112135 | 0.000671301   | {0.00948788, 0.0129392} |

,
  EstimatedVariance -> 0.00724243, ANOVATable ->


|                   | DF | SumOfSq   | MeanSq     |
|-------------------|----|-----------|------------|
| Model             | 2  | 71.2038   | 35.6019    |
| Error             | 5  | 0.0362122 | 0.00724243 |
| Uncorrected Total | 7  | 71.24     |            |
| Corrected Total   | 6  | 2.09714   |            |

,
  AsymptoticCorrelationMatrix ->


|          |          |
|----------|----------|
| 1.       | -0.87872 |
| -0.87872 | 1.       |

, FitCurvatureTable ->


|                         | Curvature |
|-------------------------|-----------|
| Max Intrinsic           | 0.0119412 |
| Max Parameter-Effects   | 0.0508784 |
| 95. % Confidence Region | 0.415725  |


```

```
In[26]= puntos := {{1, 2.5}, {7, 2.6}, {13, 2.7}, {22, 3}, {30, 3.5}, {38, 3.7}, {46, 4}}
```

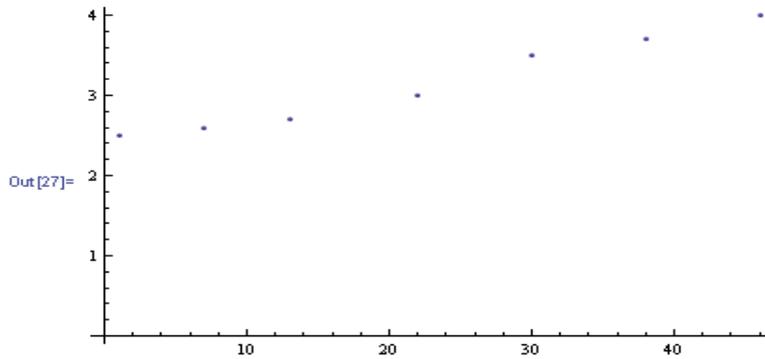
```
In[27]= ListPlot[puntos, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

En las últimas cuatro líneas se muestra con el paquete “NonlinearRegression” también obtiene la recta de aproximación.

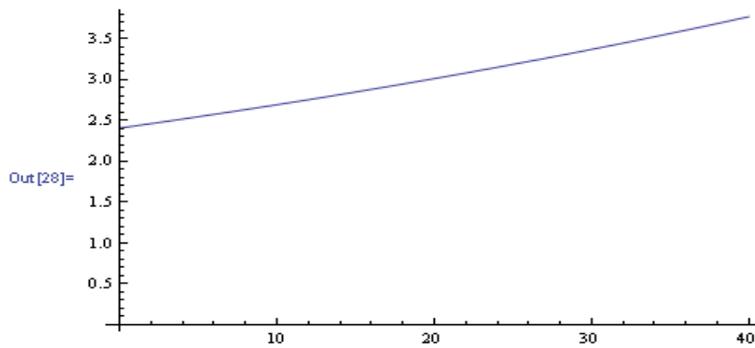
Apéndice G

```
In[26]:= puntos := {{1, 2.5}, {7, 2.6}, {13, 2.7}, {22, 3}, {30, 3.5}, {38, 3.7}, {46, 4}}
```

```
In[27]:= ListPlot[puntos, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

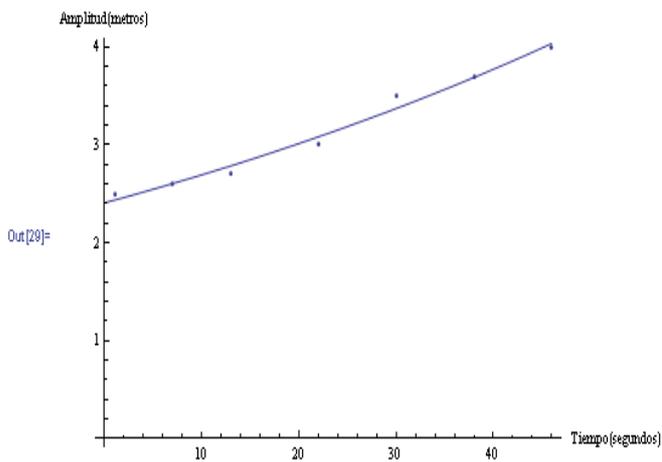


```
In[28]:= Plot[2.408044989342765 * e0.011213516898057685*x, {x, 0, 40}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



```
In[29]:= Show[ListPlot[puntos, AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"Tiempo(segundos)", "Amplitud(metros)"}],
```

```
Plot[2.408044989342765 * e0.011213516898057685*x, {x, 0, 46}, AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"Tiempo(segundos)", "Amplitud(metros)"}]]
```



```
In[30]:= NonlinearRegress[{{1, 2.5}, {7, 2.6}, {13, 2.7}, {22, 3}, {30, 3.5}, {38, 3.7}, {46, 4}}, a*x+b, {a, b}, x,
RegressionReport -> {BestFit, PredictedResponse}]
```

```
Out[30]= {BestFit -> 2.35087 + 0.0353115 x, PredictedResponse -> {2.38618, 2.59805, 2.80992, 3.12772, 3.41022, 3.69271, 3.9752}}
```

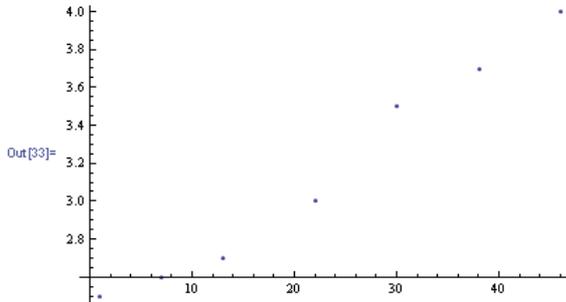
El detalle que se ve continuación es aproximar los pares ordenados, obtenidos a través de las mediciones, mediante una recta con el paquete “LinearRegression”.

Archivo: datos-video

In[31]:= Needs["LinearRegression`"]

In[32]:= puntos := {{1, 2.5}, {7, 2.6}, {13, 2.7}, {22, 3}, {30, 3.5}, {38, 3.7}, {46, 4}}

In[33]:= ListPlot[{{1, 2.5}, {7, 2.6}, {13, 2.7}, {22, 3}, {30, 3.5}, {38, 3.7}, {46, 4}}]



In[35]:= Regress[puntos, {1, x}, x]

Out[35]:= {ParameterTable →

	Estimate	SE	TStat	PValue
1	2.35087	0.0670835	35.0439	3.56006×10^{-7}
x	0.0353115	0.0024701	14.2956	0.0000301847

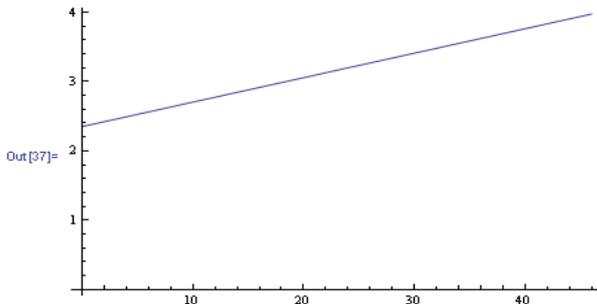
, RSquared → 0.976118, AdjustedRSquared → 0.971342, ANOVATable →

	DF	SumOfSq	MeanSq	FRatio	PValue
Model	1	2.04706	2.04706	204.364	0.0000301847
Error	5	0.0500835	0.0100167		
Total	6	2.09714			

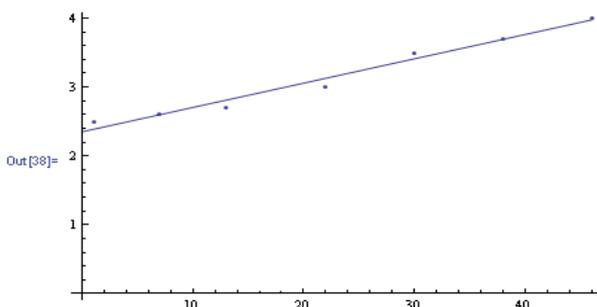
, EstimatedVariance → 0.0100167}

In[36]:= y[x_] := 2.35087 + 0.0353115 * x;

In[37]:= aprox = Plot[y[x], {x, 0, 46}, AxesOrigin → {0, 0}]



In[38]:= Show[ListPlot[{{1, 2.5}, {7, 2.6}, {13, 2.7}, {22, 3}, {30, 3.5}, {38, 3.7}, {46, 4}], AxesOrigin → {0, 0}], Plot[y[x], {x, 0, 46}], AxesOrigin → {0, 0}]



Otra forma de determinar un algoritmo para determinar la recta, es utilizar el Teorema de Cuadrados Mínimos [21] que utiliza matrices para su resolución. El teorema afirma

Sea \mathbf{A} una matriz de $m \times n$ y se a \mathbf{b} en \mathfrak{R}^n . Entonces $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ admite tener una solución por cuadrados mínimos $\bar{\mathbf{x}}$. Además,

1) \bar{x} es un solución de mínimos cuadrados de $Ax=b$ si y solo si \bar{x} es un solución de las ecuaciones normales $A^T A \bar{x} = A^T b$.

2) A tiene columnas linealmente independiente si y solo si $A^T A$ es invertible. En ese caso, la solución de mínimos cuadrados de $Ax=b$ es única y está dada por $\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$.

EL algoritmo propuesto para la determinación de la recta es

```

In[1]:= dat = {{1, 2.5}, {7, 2.6}, {13, 2.7}, {22, 3}, {30, 3.5}, {38, 3.7}, {46, 4}};

In[2]:= n = Length[dat]

In[3]:= a = ListPlot[dat, PlotStyle -> PointSize[0.02]]

In[4]:= p[x_] := {1, x};

In[5]:= a = Table[p[dat[[i, 1]]], {i, 1, 7}]
Out[5]= {{1, 1}, {1, 7}, {1, 13}, {1, 22}, {1, 30}, {1, 38}, {1, 46}}

In[6]:= b = Table[dat[[i, 2]], {i, 1, 7}]
Out[6]= {2.5, 2.6, 2.7, 3, 3.5, 3.7, 4}

In[7]:= LinearSolve[Transpose[a].a, Transpose[a].b]
Out[7]= {2.35087, 0.0353115}

In[8]:= f[x_] := 2.35087 + 0.0353115 * x

In[9]:= aprox = Plot[f[x], {x, 0, 46}, AxesLabel -> {"t(tiempo en segundos)", "y(amplitud en metros)"},
  PlotLabel -> {"La ecuación de la recta es y=2.35087+0.0353115*t"}]

Show[Plot[f[x], {x, 0, 46}], ListPlot[dat, PlotStyle -> PointSize[0.02]]]

In[10]:= Show[ListPlot[dat, PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}],
  Plot[f[x], {x, 0, 46}, AxesLabel -> {"t(tiempo en segundos)", "y(amplitud en metros)"},
  PlotLabel -> {"La ecuación de la recta es y=2.35087+0.0353115*t"}, AxesOrigin -> {0, 0}]]

```

Si bien nosotros analizamos la evolución de las amplitudes en función del tiempo con dos curvas de regresión, hicimos hincapié con un poco mas detalle en la función exponencial (sección 5.5) para mostrar cual es el porcentaje de amplitud por segundo en los momentos finales del puente. El coeficiente de correlación es cercano a uno para ambas curvas.

Bibliografía

- [1] McKenna.J: *Large torsional oscillations in suspension bridges revisited: Fixing an old approximation*, *American Mathematical Monthly* 106 (1999) ,Pag.1-18,Página de Internet <http://www.jstor.org/stable/2589581>,1999
- [2] Blanchard.P, Devaney.R,Hall,G: *Ecuaciones diferenciales* ,Editorial Internacional Thomson Editores, México, 1999.
- [3] Zill,D.Cullen ,G: *Ecuaciones diferenciales con problemas de valor frontera*, Editorial Thomson-Learning, México,2002.
- [4] Bates,M. Donohoe, S: *Tacoma Narrow Bridges*, Página de Internet <http://online.redwoods.cc.ca.us/instructo/darnold/DEProj/sp03/seanmatt/paper.pdf>,1993
- [5] K.S. Moore: *Large amplitude torsional oscillations in a nonlinearly suspended beam: a theoretical and numerical investigation*, Tesis doctoral, University of Connecticut, 1999.
- [6] Spiegel,Murray: *Ecuaciones diferenciales aplicadas*, Editorial Prentice-Hall hispanoamericana, S.A, México, 1983.
- [7] Levisman, Omar: *Ecuaciones diferenciales*, Apuntes de clase, 2008
- [8] Glover,J.McKenna,J.Lazer,A: *Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis*, *Siam Rev.*32 (1990) ,Pag. 537-578
- [9] Laura,P.,Pombo J.: *Introducción a la dinámica estructural*, Fundación para la educación, la ciencia y la tecnología, Argentina,1980.
- [10] Braun,M: *Ecuaciones diferenciales y otras aplicaciones*, Springer-Verlag,1993,Pag.169-171.

- [11] Pérez,C: *Cálculo numérico y simbólico con Mathematica*, ra-ma, 1995.
- [12] Spiegel, Murray: *Mecánica Teórica*, Serie Schaum, 1970.
- [13] Vease< <http://www.youtube.com/watch?v=SzObC64E2Ag>>,2007
- [14] Billah.Y.Scanlan,R: *Resonance, Tacoma Narrows bridges failure, undergraduate physics textbooks*, Página de Internet [http://www.engsoc.org/~leito / Billah - Scanlan . pdf](http://www.engsoc.org/~leito/Billah-Scanlan.pdf)
- [15] Barredo Gil.A: *Dinámica de osciladores aeroelásticos*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid. Escuela superior de ingenieros, http://oa.upm.es/1849/1/INVE_MEM_2008_53737.pdf
- [16]Zeleny.E:Vease=Proyectsh<http://demonstrations.wolfram.com/author.html?author=Enrique+Zeleny>
- [17] Vachetta.M,Suárez.A, Glisenti.G: *La resonante caída del Puente de Tacoma*,Página de Internet, ww.fing.edu.uy/if/cursos/mecsis/apoyo/tacoma.pdf
- [18] <http://es.wikipedia.org/wiki/Interferencia>
- [19] Zadunaisky,P: *Sistemas dinámicos, teoría y métodos numéricos computacionales*, Paginas 7-8, Cursos y Seminarios de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires,2009.
- [20] Pérez,C: *Matlab y sus aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería* Editorial Prentice Hall,2002.
- [21] García Raffi.L, Perez Peñalver.M, Sánchez Pérez.E, Figueres Moreno.M: *Métodos Numéricos con Mathematica*, Alfaomega, Universidad Técnica de Valencia,2005.