

La descomposición de valores singulares (DVS)

Obtención de la DVS y su aplicación al procesamiento de imágenes digitales.

Autor: Alejandro Alegre

Profesores del curso: Lic. Jorge Barreto, Dr. Osvaldo Galardo

Febrero de 2013

Universidad Nacional De La Matanza

Escuela de Formación Continua

Licenciatura en Matemática Aplicada

INDICE

Prólogo	2
Introducción	3
Objetivos	4
Reseña histórica	5
Desarrollo previo a la DVS	9
Teorema Espectral	11
La descomposición de valores singulares	16
Forma de producto externo de la DVS	20
Imágenes digitales, conceptos y nociones generales	22
Aplicación de la DVS a la compresión de imágenes digitales	27
Conclusiones	36
Citas bibliográficas	37
Bibliografía	39
Anexo 1. Ejemplos y explicaciones adicionales del Álgebra lineal	40
Anexo 2. Comandos de Matlab	45

PRÓLOGO

Cuando me surgió la idea de realizar la investigación relacionada con la descomposición de matrices en valores singulares (DVS) y su aplicación al procesamiento de imágenes digitales me sentí muy atraído, ya sea porque sabía que tenía que recorrer muchos conceptos, propiedades y teoremas del Álgebra lineal para llegar a dicha descomposición y además por poder aplicar tal factorización al género digital. Este trabajo me sumergió en el mundo del Álgebra lineal el cual me resulta de gran interés. Me permitió releer libros que ya conocía y otros que desconocía totalmente.

Esta investigación se ha efectuado en un orden en el cual se presentan todos los conceptos necesarios para llegar a la DVS, incluyendo ejemplos para su mejor comprensión, y posteriormente su aplicación a las imágenes digitales, detallando además nociones generales de las mencionadas imágenes. Asimismo se indican cuidadosamente los comandos utilizados del programa matemático Matlab utilizado para poder lograr la aplicación, de modo tal que cualquier lector, sea matemático o no, pueda realizar una comprensión de imagen.

Espero que el trabajo le resulte agradable así como a mí resultó su investigación.

INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal y la teoría de matrices son disciplinas matemáticas fundamentales, que tienen numerosas aplicaciones en diversos campos como la informática, biología, física, química, economía y psicología, entre otras ciencias. El estudio de la descomposición de valores singulares (DVS) de una matriz ha sido de gran importancia en los últimos tiempos. Su resultado es una factorización de matrices, una de las más importantes en la teoría matricial y de gran aplicación en el procesamiento de imágenes digitales. La DVS es una potente herramienta tanto en la representación de imágenes como en la restauración de la misma. Intrínsecamente en estos procesos está el almacenamiento de datos. El tratamiento de imágenes se utiliza para abordar problemas de medicina, física, biología, astronomía, geología, etc.

OBJETIVOS

La presente tesis tiene dos objetivos, bien diferenciados entre sí pero a su vez entrelazados:

- El primero es obtener la descomposición de valores singulares, recorriendo un camino lógico, incluyendo conceptos y teoremas decisivos para poder captar de la mejor manera la DVS, ejemplificando siempre que se pueda y evitando incluir definiciones y propiedades innecesarias que dificulten dicho camino.
- El segundo, y no menos importante, es reducir la cantidad de datos que contiene una imagen, de modo que pueda ser transmitida por medios electrónicos (fax, internet, satélite, etc) de manera eficiente sin perder "fidelidad". La reducción de datos se basa en que las fotografías contienen partes más interesantes que otras, con lo cual en aquellas parte que resultan aburridas, por ejemplo el cielo de fondo, podemos usar menos tonalidades de colores, y en cambio en el rostro de una persona conservaríamos los detalles.

RESEÑA HISTÓRICA

Los valores singulares aparecen en varias partes de la matemática. El nombre con el que los presento aquí (valores singulares) es el que se ha consolidado en la comunidad de analistas numéricos, pero han sido denominados de diferentes maneras a lo largo de su no muy larga historia. El resumen que se presenta aquí está basado en una excelente investigación realizada por Ion Zaballa. [1]

El origen de los valores singulares se encuentra en el intento de los geómetras del siglo XIX por conseguir, en lenguaje actual, la reducción de una forma cuadrática a forma diagonal mediante cambios de base ortogonales. La primera contribución en este sentido parece ser de Eugene Beltrami, un geómetra diferencial italiano, que intentando promover entre sus estudiantes el gusto por el estudio de las formas bilineales escribió un artículo en la revista *Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Università*, [2].

Beltrami comienza con una forma bilineal $f_{(x,y)} = x^t A y$, donde A es una matriz real de orden n , y viene a demostrar que existen matrices ortogonales Q_1 y Q_2 , $n \times n$, tales que

$$Q_1^t A Q_2 = \Sigma = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (1)$$

es una matriz diagonal de números reales positivos, los cuales son las raíces cuadradas de los valores propios de $A^t A$ (o de AA^t dado que estas dos matrices simétricas son semejantes). En realidad, Beltrami propone, más que demuestra, la descomposición anterior cuando los

elementos diagonales son todos distintos entre sí. En otras palabras, se puede considerar que Beltrami es el descubridor de lo que hoy en día llamamos la descomposición en valores singulares de matrices reales cuadradas no singulares con valores singulares distintos. Omite las posibles situaciones de degeneración que, como veremos, tienen importantes consecuencias .

Esta omisión no es debida a un intento de simplificar las cosas para sus estudiantes, sino que, tal y como se comprueba por las ideas que aporta, posiblemente sea consecuencia de no plantearse el problema en su completa generalidad.

Camille Jordan publicó un par de trabajos sobre formas bilineales, [4, 5] , uno más tarde que Beltrami, por lo que se le puede considerar codescubridor de los valores singulares.

Su aproximación es completamente diferente. De hecho, en el primero de los artículos citados, su preocupación es la de buscar el máximo y mínimo de la forma bilineal $P = x' Ay$, condicionados a que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. Usando la condición de la anulación de la diferencial en los máximos y mínimos relativos, Jordan prueba que dicho máximo es la raíz cuadrada del mayor valor propio de la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A' & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Es posiblemente la primera vez que se usa el hoy ampliamente utilizado proceso de *deflacción*, que consiste en reducir un problema sobre matrices al mismo problema con una matriz de orden una unidad inferior. La caracterización de los valores singulares de A como las raíces

cuadradas positivas de los valores propios de la matriz en (1) es un hecho muy conocido y popular, aunque habitualmente atribuido a Wielandt [6] y Lanczos [7].

Desconocedor, aparentemente, de los trabajos de Beltrami y Jordan, J.J. Sylvester escribió una nota a pié de página y dos artículos sobre la diagonalización de formas bilineales mediante sustituciones ortogonales.

La nota a pié de página apareció en un artículo de la revista *The Messenger of Mathematics* [8]. El artículo lleva por título “A new proof that a general quadric may be reduced to its canonical form (that is, a linear function of squares) by means of a real orthogonal substitution”, y en él Sylvester propone un algoritmo para reducir una forma cuadrática a forma diagonal. En la nota a pié de página señala que una iteración similar es posible para diagonalizar una forma bilineal y dice que lo ha enviado para su publicación en las *Comptes Rendues* [9]. Esto nos da una idea de que no conocía el artículo original de Jordan publicado más de una década antes.

En palabras de Stewart estos artículos de Sylvester “no se leen fácilmente. El estilo es opaco y Sylvester pontifica sin probar, dejando demasiados detalles al lector”. Aparentemente el autor estima sus resultados como importantes, pero, sin poner en duda que lo son, hoy en día se ven más como un redescubrimiento de resultados ya obtenidos por otros. En cualquier caso, Sylvester es el primero en dar nombre a los números reales positivos que aparecen en la forma canónica diagonal: *multiplicadores canónicos*.

Aunque hay nuevos resultados en el terreno del álgebra lineal ligados a los valores singulares, damos un salto en el tiempo para redescubrirlos en un área de la matemática bien distinta: las

ecuaciones integrales, uno de los temas que recibió más atención durante las primeras décadas del siglo XX.

En 1907, Erhard Schmidt (el del famoso procedimiento de Gram-Schmidt) publicó, [10], una teoría general de ecuaciones integrales reales con núcleos simétricos y no simétricos. Introduce los conceptos de valor propio y de función propia de un núcleo.

Un poco después de la publicación del artículo de Schmidt, Bateman, [11], introduce la notación de valores singulares para referirse a unos números que son esencialmente los recíprocos de los valores propios definidos por Schmidt. Y Picard, [12], hace notar que para los núcleos simétricos los valores propios de Schmidt son reales y en este caso (pero no en general) los llama valores singulares.

A pesar de todo, la denominación no se estabiliza, y entre los muchos matemáticos notables que han trabajado en las propiedades de los valores singulares, debemos nombrar a Hermann Weyl con importantes contribuciones a la teoría de perturbación de los mismos. Pero en cuanto a nomenclatura se refiere, todavía en su artículo [13] habla de “dos clases de valores propios” y en una traducción al inglés de un tratado ruso sobre operadores no autoadjuntos, Gohberg y Krein, [14], se refieren a los valores singulares como “s-números” de un operador.

La fuerte implantación de las computadoras y el consecuente apogeo del análisis numérico ha contribuido a que finalmente la denominación de valores singulares haya arraigado en la comunidad matemática.

DESARROLLO PREVIO A LA DVS

La descomposición de valores singulares requiere de muchos conceptos y teoremas que la afectan directa o indirectamente. Enunciar el teorema y demostrarlo sería casi incomprensible para el lector, obligándolo a tener bibliografía complementaria para comprenderlo. Por ello voy a detallar aquellos conceptos y teoremas que considero importante para la DVS, y además en el anexo 1 se podrán encontrar ejemplos para facilitar su entendimiento.

CONCEPTOS Y TEOREMAS FUNDAMENTALES.

1-MATRIZ DIAGONAL¹: una matriz diagonal es una matriz cuadrada en que las entradas son todas nulas salvo en la diagonal principal, y éstas pueden ser nulas o no. Así, la matriz $D = d_{ij}$ es diagonal si $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$

2-MATRIZ SIMÉTRICA²: A es una matriz simétrica si $A^t = A$. Semejante matriz es necesariamente cuadrada. Sus entradas en la diagonal son arbitrarias, pero sus otras entradas ocurren en pares, en lados opuestos de la diagonal principal.

3-EIGENVALOR Y EIGENVECTOR³: Sea A una matriz de $n \times n$. Un escalar λ es llamado un eigenvalor de A si existe un vector v distinto de cero tal que $Av = \lambda v$. Un vector v de esta naturaleza se conoce como eigenvector de A correspondiente a λ .

¹ En el Anexo 1, pág. 40 podrá ver un ejemplo

² En el Anexo 1, pág. 40 podrá ver un ejemplo

³ Podrá ver en el Anexo 1, pág. 40 a 43 el desarrollo de este tema.

4-POLINOMIO CARACTERÍSTICO⁴: Un escalar λ es un eigenvalor de un matriz A de $n \times n$ si y solo si λ es solución de $\det(A - \lambda I) = 0$. $\det(A - \lambda I)$ se denomina polinomio característico de A .

5-MATRICES SEMEJANTES: sean A y B matrices de $n \times n$. Decimos que A es semejante a B ($A \sim B$) si existe una matriz P invertible de $n \times n$ tal que $P^{-1}AP = B$. De manera equivalente, podemos escribir $AP = PB$.

6-MATRIZ DIAGONIZABLE: Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A sea semejante a D ; es decir, si existe una matriz P invertible de $n \times n$ tal que $P^{-1}AP = D$, o bien $AP = PD$

7-MATRIZ ORTOGONAL: una matriz Q de $n \times n$ cuyas columnas forman un conjunto ortonormal se denomina matriz ortogonal.

<p><u>8-TEOREMA</u>: Una matriz cuadrada Q es ortogonal si y sólo si $Q^{-1} = Q'$.</p>

9-MATRIZ ORTOGONALMENTE DIAGONIZABLE⁵: Una matriz cuadrada A es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $Q'AQ = D$.

10-CONJUNTO ORTOGONAL:: Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ en R^n se denomina conjunto ortogonal si todos los pares de vectores distintos del conjunto son ortogonales, es decir si

⁴ En el Anexo 1, pág. 43, podrá ver un ejemplo

⁵ En el Anexo 1, pág. 43-44, podrá ver un ejemplo

$$v_i \cdot v_j = 0 \text{ siempre que } i \neq j \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, k$$

11-CONJUNTO ORTONORMAL: un conjunto de vectores en \mathbf{R}^n es un conjunto ortonormal si es un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

12-BASE ORTONORMAL: una base ortonormal de un subespacio W de \mathbf{R}^n es una base de W que es un conjunto ortonormal.

13-Teorema: Si A es ortogonalmente diagonalizable⁶, entonces A es simétrica.

DEMOSTRACIÓN: Si A es ortogonalmente diagonalizable, entonces existe una matriz ortogonal

Q y una matriz diagonal⁷ D tales que $Q^t A Q = D$. Puesto que $Q^{-1} = Q^t$ ⁸, tenemos

$Q^t Q = I = Q Q^t$, de manera que

$$Q D Q^t = Q Q^t A Q Q^t = I A I = A$$

Pero entonces

$$A^t = (Q D Q^t)^t = (Q^t)^t D^t Q^t = Q D Q^t = A$$

ya que toda matriz diagonal es simétrica. Por lo tanto, A es simétrica⁹.

14-Teorema espectral: Sea A una matriz real de $n \times n$. Entonces A es simétrica si y sólo si es ortogonalmente diagonalizable.

⁶ Ver definición 9

⁷ Ver definición 1

⁸ Ver teorema 8

⁹ Ver definición 2

DEMOSTRACIÓN:

a) A es simétrica, entonces es ortogonalmente diagonalizable. (Demostrado en el teorema anterior)

b) A es ortogonalmente diagonalizable, entonces es simétrica.

Procedemos por inducción sobre n . Para $n = 1$, no hay nada que hacer, puesto que una matriz de 1×1 ya se encuentra en forma diagonal. Ahora vamos a suponer que toda matriz simétrica real de $k \times k$ con eigenvalores¹⁰ reales es ortogonalmente diagonalizable. Sea $n = k + 1$ y A una matriz simétrica real de $n \times n$ con eigenvalores reales.

Sea λ_1 uno de los eigenvalores de A , y v_1 un eigenvector¹¹ correspondiente. Entonces v_1 es un vector real y podemos suponer que v_1 es un vector unitario, ya que de otra manera podemos normalizarlo y tendríamos todavía un eigenvector correspondiente a λ_1 . Si recurrimos al proceso de Gram-Schmidt¹², podemos extender v_1 a una base ortonormal¹³ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de \mathbf{R}^n . Ahora formalizamos la matriz

$$Q_1 = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n]$$

Entonces Q_1 es ortogonal, y

¹⁰ Ver definición 3

¹¹ Ver definición 3

¹² Método para construir una base ortogonal (u ortonormal) para cualquier subespacio de \mathbf{R}^n .

¹³ Ver definición 12

$$Q_1' A Q_1 = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A v_1 & A v_2 & \dots & A v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & A v_2 & \dots & A v_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} = B$$

en razón de que $v_1'(\lambda_1 v_1) = \lambda_1(v_1' v_1) = \lambda_1(v_1 \cdot v_1) = \lambda_1$ y $v_1'(\lambda_1 v_1) = \lambda_1(v_1' v_1) = \lambda_1(v_1 \cdot v_1) = 0$ para

$i \neq 1$, porque $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal¹⁴.

Sin embargo, $B' = (Q_1' A Q_1)' = Q_1' A' (Q_1')' = Q_1' A Q_1 = B$

de manera que B es simétrica. Por consiguiente, B tiene la forma de bloques $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$

y A_1 es simétrica. Además B es semejante¹⁵ a A , de modo que el polinomio característico¹⁶ de

B es igual al polinomio característico de A . El polinomio característico de A_1 divide el

¹⁴ Ver definición 11

¹⁵ Ver definición 5

¹⁶ Ver definición 4

polinomio de A . De ello se desprende que los eigenvalores de A_1 también son eigenvalores de A y, por lo tanto son reales. También observamos que A_1 tiene entradas reales. De esta manera, A_1 es una matriz simétrica real de $k \times k$ con eigenvalores reales, así que la hipótesis de inducción se aplica a ella. Por lo tanto, existe una matriz ortogonal P_2 tal que $P_2' A_1 P_2$ es una matriz diagonal: digamos, D_1 . Ahora, sea

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

Entonces Q_2 es una matriz ortogonal de $(k+1) \times (k+1)$, y por consiguiente también lo es

$Q = Q_1 Q_2$. En consecuencia,

$$Q' A Q = (Q_1 Q_2)' A (Q_1 Q_2) = (Q_2' Q_1') A (Q_1 Q_2) = Q_2' (Q_1' A Q_1) Q_2 = Q_2' B Q_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & P_2' A_1 P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal. Esto completa el paso de inducción, y concluimos que, para toda $n \geq 1$ una matriz simétrica real de $n \times n$ con eigenvectores reales es ortogonalmente diagonalizable.

Ahora bien, el teorema espectral es de suma importancia para la DVS, ya que nos indica que para cualquier matriz A de $m \times n$, la matriz $A^t A$ (¡es una matriz de $n \times n$ simétrica!) puede ser diagonalizada ortogonalmente, según lo demostrado recién. No solo los eigenvalores de $A^t A$ son todos reales, sino que también todos son no negativos.

Para demostrar esta afirmación, sea λ un eigenvalor de $A^t A$ con el eigenvector unitario correspondiente v . Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Av\|^2 &= (Av) \cdot (Av) = (Av)^t Av = v^t A^t Av \\ &= v^t \lambda v = \lambda (v \cdot v) = \lambda \|v\|^2 = \lambda \end{aligned}$$

Por lo tanto, tiene sentido tomar raíces cuadradas (positivas) de estos eigenvalores.

TEOREMA: Si A es una matriz de $n \times n$, entonces las proposiciones que siguen son equivalentes:

- a) A es ortogonalmente diagonalizable¹⁷
- b) A tiene un conjunto ortonormal¹⁸ de n eigenvectores.

¹⁷ Ver definición 9

¹⁸ Ver definición 11

LA DESCOMPOSICIÓN DE VALOR SINGULAR

15-VALORES SINGULARES: Si A es una matriz de $m \times n$, los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los eigenvalores de $A^t A$ y se denotan mediante $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Es conveniente acomodar los valores singulares de modo que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$

Teorema Descomposición de valor singular: Sea A una matriz de $m \times n$ con valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ y $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$. Entonces, existe una matriz U ortogonal de $m \times m$, una matriz V ortogonal de $n \times n$ y una matriz Σ de $m \times n$ que tiene la forma de bloques

$$\begin{bmatrix} r & n-r \\ D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}, \text{ donde } D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix} \text{ tales que:}$$

$$A = U \Sigma V^t$$

DEMOSTRACIÓN: Para construir la matriz ortogonal V , primero determinamos una base ortonormal¹⁹ $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbf{R}^n compuesta por eigenvectores²⁰ de la matriz simétrica²¹ $A^t A$ de $n \times n$. Entonces $V = [v_1 \dots v_n]$ es una matriz ortogonal²² de $n \times n$.

¹⁹ Ver definición 12

²⁰ Ver definición 3

²¹ Ver definición 2

²² Ver definición 7

Con respecto a la matriz ortogonal U , primero advertimos que $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores de \mathbf{R}^m . Para ver esto, supongamos que v_i es el eigenvector de $A^t A$ correspondiente al eigenvalor²³ de λ_i . Entonces, para $i \neq j$, tenemos que

$$\begin{aligned} (Av_i) \cdot (Av_j) &= (Av_i)^t Av_j \\ &= v_i^t A^t Av_j = v_i^t \lambda_j v_j = \lambda_j (v_i \cdot v_j) = 0 \end{aligned}$$

debido a que los eigenvectores v_i son ortogonales. Ahora recordemos que los valores singulares satisfacen $\sigma_i = \|Av_i\|$ y que los primeros r de éstos son distintos de cero. Por

consiguiente, podemos normalizar²⁴ Av_1, \dots, Av_r , al establecer $u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$ para $i = 1, \dots, r$

Esto garantiza que $\{u_1, \dots, u_r\}$ es un conjunto ortonormal²⁵ de \mathbf{R}^m , pero si $r < m$ no será una base de \mathbf{R}^m . En este caso extendemos el conjunto $\{u_1, \dots, u_r\}$ a una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_m\}$ de \mathbf{R}^m . Entonces establecemos

$$U = [u_1 \dots u_m]$$

Todo lo que queda por demostrar es que este procedimiento funciona; es decir, necesitamos

verificar que con U, V y Σ como se describen, tendremos que $A = U \Sigma V^t$. Debido a que

$V^t = V^{-1}$ ²⁶ esto es equivalente a demostrar que $AV = U \Sigma$.

²³ Ver definición 3

²⁴ Normalizar significa hacer de cada vector un vector unitario

²⁵ Ver definición 11

Sabemos que $Av_i = \sigma_i u_i$ para $i = 1, \dots, r$ y que $\|Av_i\| = \sigma_i = 0$ para $i = r+1, \dots, n$. Por lo tanto

$$Av_i = 0 \text{ para } i = r+1, \dots, n$$

Por consiguiente, $AV = A[v_1 \dots v_n]$

$$= [Av_1 \dots Av_n] = [Av_1 \dots Av_r \quad 0 \dots 0]$$

$$= [\sigma_1 u_1 \dots \sigma_r u_r \quad 0 \dots 0]$$

$$= [u_1 \dots u_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_r & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline & & & 0 & & 0 \end{bmatrix} = U \Sigma \text{ como se requiere.}$$

_____o_____

Veamos un ejemplo:

Encontrar la descomposición de valor singular de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

²⁶ Ver teorema 8

Calculamos $A'A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, y hallamos sus eigenvalores $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$, con sus

eigenvectores correspondientes $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Estos vectores son ortogonales, de manera que

los normalizamos para obtener $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Los valores singulares de A son $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sqrt{1} = 1$ y $\sigma_3 = \sqrt{0} = 0$. De este modo,

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar U calculamos

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} Av_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estos vectores ya forman una base ortonormal (la base estándar) de \mathbf{R}^2 , de manera que

tenemos $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Esto produce la DVS: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = U \Sigma V^t$

Forma de producto externo de la DVS: existe otra forma de descomposición de valor singular.

Utilizando multiplicación de bloques y la representación columna-renglón del producto,

tenemos

$$A = U \Sigma V^t = [u_1 \dots u_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_r & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \hline & & & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix}$$

$$= [u_1 \dots u_r \vdots u_{r+1} \dots u_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_r & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \hline & & & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_r^t \\ \vdots \\ v_{r+1}^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= [u_1 \cdots u_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_r^t \end{bmatrix} + [u_{r+1} \cdots u_m] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix} \\
&= [u_1 \cdots u_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_r^t \end{bmatrix} = [\sigma_1 u_1 \cdots \sigma_r u_r] \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_r^t \end{bmatrix} \\
&= \sigma_1 u_1 v_1^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t
\end{aligned}$$

o

Esta forma de producto externo de la DVS es de gran importancia ya que se utilizará en la compresión de imágenes.

IMAGENES DIGITALES: conceptos y nociones generales

Una imagen digital está compuesta de píxeles. *“ El pixel (del inglés picture element, o sea, elemento de la imagen) es la menor unidad en la que se descompone una imagen digital, ya sea una fotografía, una fotografía de video o un gráfico. Al ampliarse fuertemente una imagen digital (zoom), por ejemplo en la pantalla de una computadora, pueden observarse los pixeles que componen la imagen. Los pixeles aparecen como pequeños cuadrados en color, en blanco o negro, o en matices de gris. Las imágenes se forman como una matriz rectangular de pixeles, donde cada pixel forma un punto diminuto en la imagen total”²⁷ .* Cada píxel es capaz de proporcionar información visual acerca de una pequeña región en particular de la imagen. A partir de esto, se puede considerar a una Imagen Digital, como un arreglo de instrucciones de cómo se encuentra coloreado cada píxel. En general se puede decir que una imagen de m por n si está compuesta de m píxeles en la dirección vertical y n píxeles en la dirección horizontal. En el caso de imágenes digitales, supongamos que tenemos una imagen en tonos de gris con un tamaño de 340 X 280 pixeles, significa que la imagen contiene en sí información para 95200, los cuales requiere mucha memoria. Por lo tanto, la compresión de las imágenes es algo esencial para el procesamiento eficiente de la imagen.

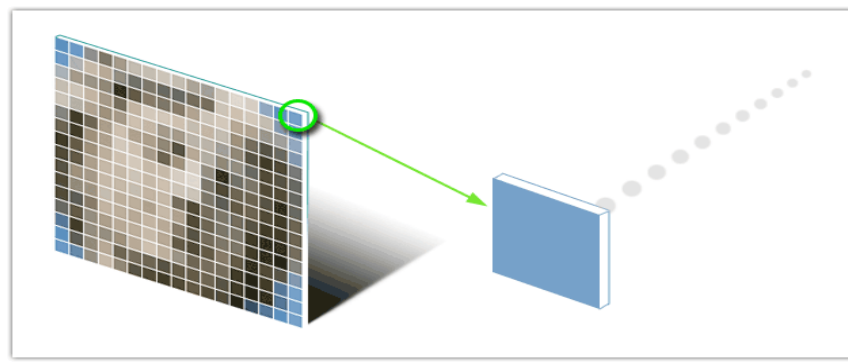
PROFUNDIDAD DE BITS

“Binary digit es una expresión inglesa que significa “dígito binario” y que da lugar al término bit, su acrónimo en nuestra lengua. El concepto se utiliza en la informática para nombrar a una

²⁷ <http://www.gsmSpain.com/glosario/?palabra=P%CDXEL> [15 de enero de 2013]

unidad de medida de información que equivale a la selección entre dos alternativas que tienen el mismo grado de probabilidad. El bit, en otras palabras, es un dígito que forma parte del sistema binario. A diferencia del sistema decimal, que utiliza diez dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9), el sistema binario apela a sólo dos (0 y 1). Un bit, por lo tanto, puede representar a uno de estos dos valores (0 ó 1).”²⁸

La PROFUNDIDAD DE BITS es una propiedad de la imagen. Cuando hablamos de PROFUNDIDAD de un píxel no es que un píxel tenga una tercera dimensión. Como vimos al principio, un Píxel es un simple cuadrado plano de color uniforme. Con profundidad, en la propiedad de un píxel, nos referimos a LO QUE HAY POR DETRÁS de un píxel, lo que le hace tener el color que tiene.



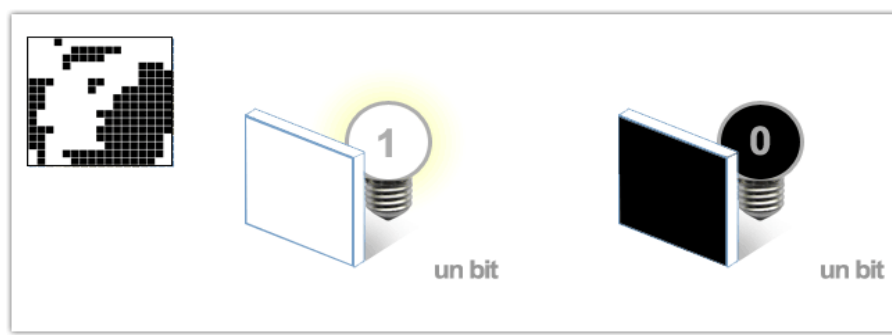
La profundidad de color de la capacidad que tiene un píxel de almacenar datos que describen su color. Cuantos más datos, más variedad de colores puede tener ese píxel. Esos datos se expresan en BITS.

1 bit

²<http://definicion.de/bit/>

El lenguaje informático se basa en el lenguaje BINARIO, es decir, una combinación de dos dígitos: 0 y 1. Un BIT puede tener el valor 0 (no hay dato) o el valor 1 (hay dato).

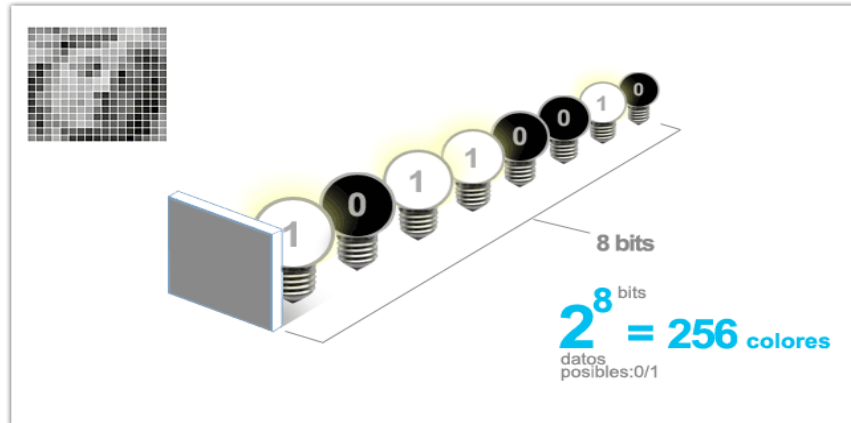
Esto, referido a la información digital de píxel nos daría un píxel con una profundidad mínima: un Bit.



Al tener solo un DATO, un BIT, el píxel solo tiene 2 posibilidades para determinar cuanta luz se proyecta en ese píxel: 1 = LUZ (blanco), o 0 = no LUZ (negro). Solo son posibles 2 colores.

8 bits / canal

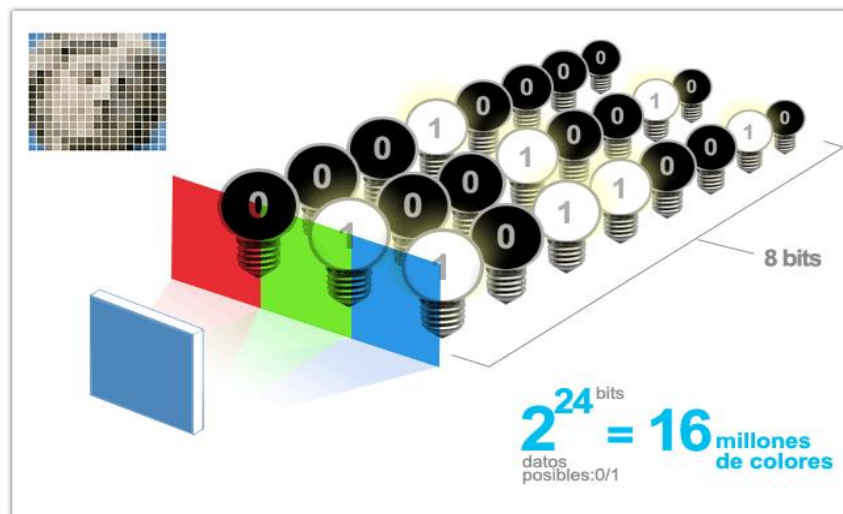
El siguiente estándar de profundidad es 8 bits. Aunque sólo sea con un canal, ya da bastantes más posibilidades.



8 BITS, con 2 datos posibles en cada uno (0 / 1) dan un total de 256 combinatorias posibles.

256 tonalidades diferentes de luces.

En el caso de la imagen de ESCALA DE GRISES solo había un canal de información de color. Pero ¿qué pasa cuando hay 3 canales de color?. Entonces hay 8 BITS diferentes para cada canal (24 en total). Por eso, la nomenclatura para referirse a la profundidad es de 8 bits/canal (8 bits por cada canal)



8 BITS para el ROJO, otros 8 para el VERDE y otros 8 para el AZUL: 24 en total.

Con 2 datos posibles en cada uno (0 / 1) , da un total de 16.777.216 colores posibles.

La profundidad de 8 bits se aplica a cada uno de los canales que producen el color. Lo que hace un total 24 DATOS de información en cada píxel. Todos ellos, combinados, pueden producir alrededor de 16 millones de colores diferentes. Éste es el umbral de número de colores perceptibles por el ser humano. Lo que hace de este modo y esta profundidad la común en el trabajo de imagen digital.

APLICACIÓN DE LA DVS AL PROCESAMIENTO DE IMÁGENES DIGITALES.

Entre las muchas aplicaciones de la DVS, una de las más importantes es la de su utilización en la compresión de imágenes digitales de modo que puedan ser transmitidas de manera eficiente por medios electrónicos.

En el caso de las imágenes digitales, supongamos que tenemos la siguiente imagen:



FIGURA 1

La misma representa una matriz de en 256 tonos de gris con un tamaño de 768 x 1024 píxeles. A cada píxel se le asigna un número de 0 a 255 que representa un tono. Podemos almacenar esta información en una matriz A de 768 x 1024, pero transmitir y manipular estos 786.432 datos es muy costoso. La idea detrás de la compresión de imágenes es que algunas partes de éstas son

menos interesantes que otras. Resulta que los valores singulares pequeños en la DVS de la matriz A provienen de las partes “aburridas” de la imagen, por lo cual podemos ignorar muchos de ellos. El objetivo es comprimir esta imagen sin perder mucha resolución. Es decir, tratar de conseguir la misma imagen con unos tonos de grises menores, con muchos menos datos.

Llamemos A a la matriz de tamaño 768×1024 que contiene los datos necesarios para obtener la imagen de la Figura 1. Los valores singulares contribuyen para obtener esta misma imagen con menos datos.

Recordemos la **Forma de producto externo de la DVS:**

$$A = U \Sigma V^t = \sigma_1 u_1 v_1^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t \text{ con } \sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_r > 0$$

Cada una de las matrices $\sigma_i u_i v_i^t$ es de tamaño 768×1024 , pero sólo se necesitan $768+1024+1=1793$ datos para formarlas: los 768 elementos de u_i , los 1024 de v_i y 1 de σ_i .

Estas matrices están ordenadas de acuerdo al valor singular que les corresponde, de mayor a menor, de modo que σ_1 es el mayor, y por ende es más dominante que el resto para formar la matriz original. Las matrices $u_i v_i^t$ son matrices de rango 1, de modo que determinan subespacios de dimensión 1, que podemos identificar con direcciones en \mathbf{R}^{768} . El valor σ_i nos da la coordenada de A en la dirección $u_i v_i^t$.

Si hay valores singulares mucho mayores que otros, las direcciones de estos valores singulares son más determinantes en la formación de A que la de los valores singulares más pequeños.

Para tener una mejor visión de cómo se distribuyen los valores singulares, a través Matlab graficamos una tabla semilogarítmica²⁹ (figura 2)

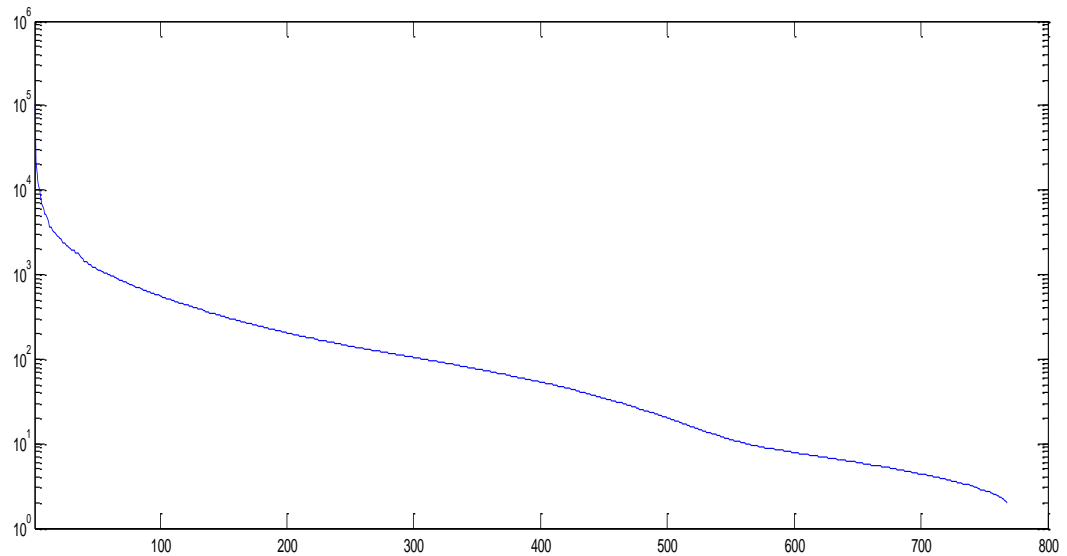


FIGURA 2

Si observamos la figura, los primeros 50 valores singulares dominan al resto, por lo que son los más determinantes en la formación de la matriz A (están entre 1000 y 30000).

²⁹ Gráfico en el uno de los ejes está en escala logarítmica y el otro en escala aritmética

Veamos en la figura 3 una nueva tabla con los primeros 50 valores singulares, para reflejar lo expuesto anteriormente:

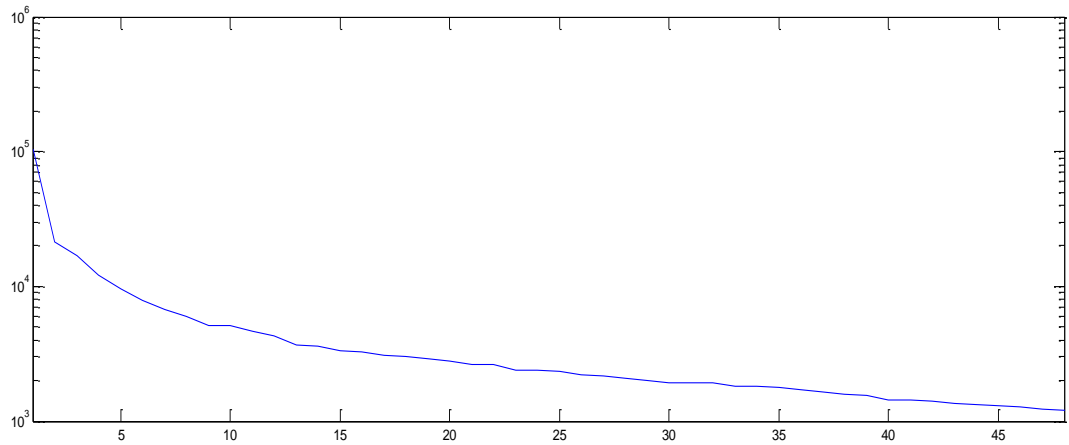
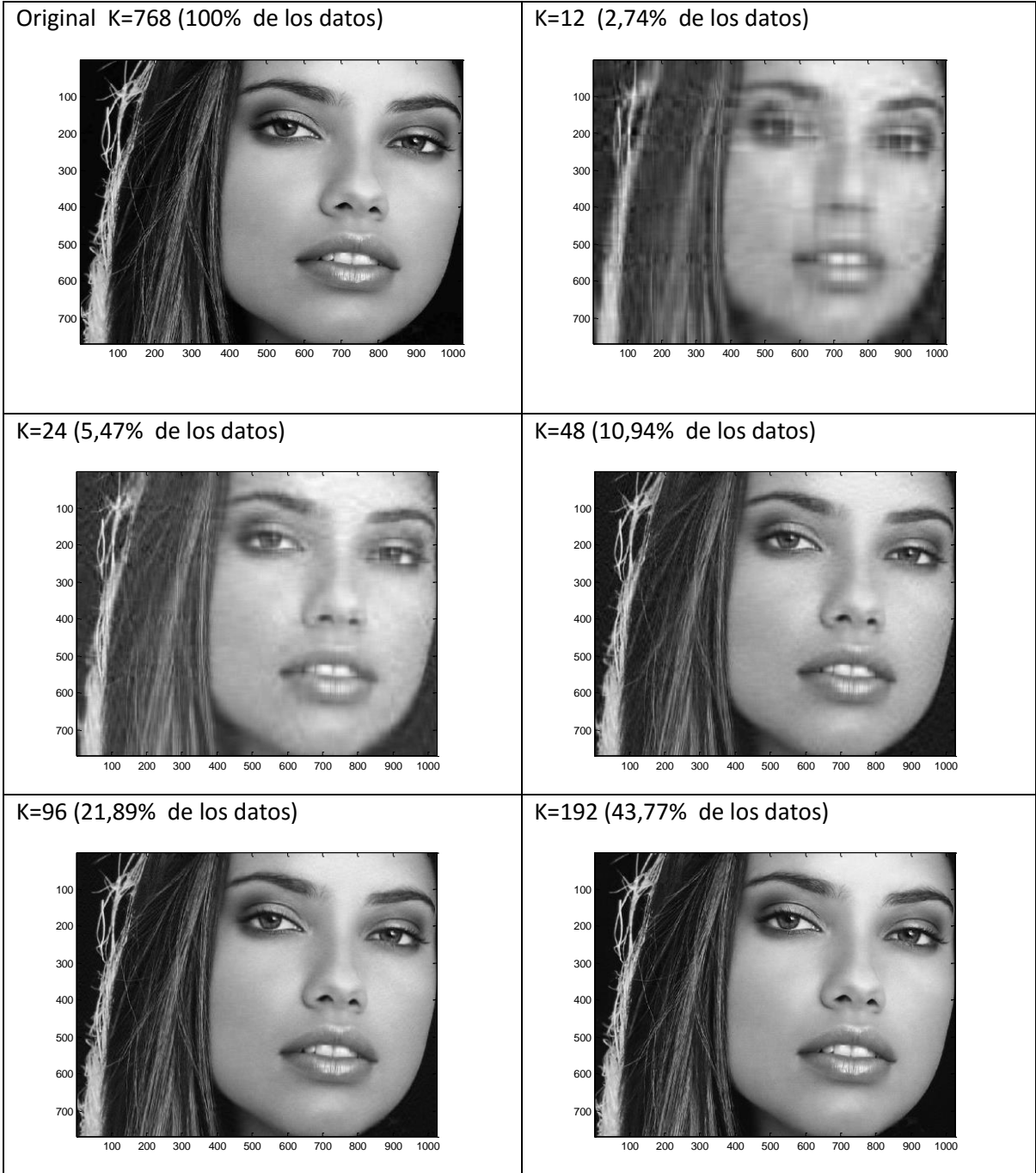


FIGURA 3

Veamos como se concreta todo esto con la matriz A que contiene los datos de la imagen de la Figura 1.



Volviendo a la **Forma de producto externo de la DVS:**

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t$$

Sea $k \leq r$ y definamos

$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^t + \dots + \sigma_k u_k v_k^t$$

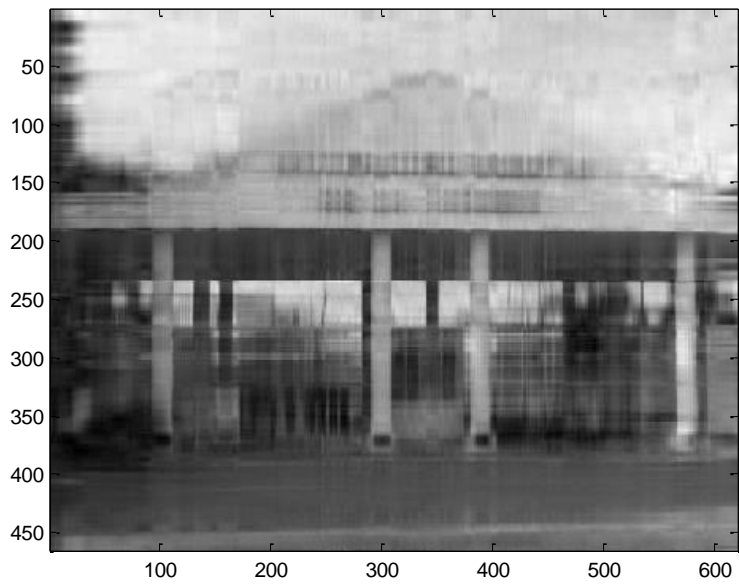
Entonces A_k es una aproximación a A que corresponde a mantener solamente los primeros k valores singulares y los correspondientes vectores singulares. Al principio la imagen es borrosa, pero a partir de $k = 48$ ya es bastante nítida, y estamos utilizando sólo el 10,94% de los datos, es decir $768.48 + 1024.48 + 48 = 86064$ números, lo cual representa un ahorro significativo.

Alguno de los valores singulares de la matriz A son $\sigma_1 = 107.076,36$, $\sigma_{50} = 1.283,105$, $\sigma_{200} = 223,585$, $\sigma_{500} = 22,462$, $\sigma_{768} = 1,925$. Los valores singulares más pequeños contribuyen muy poco a la imagen, por lo cual rápidamente comienzan a parecerse a la original.

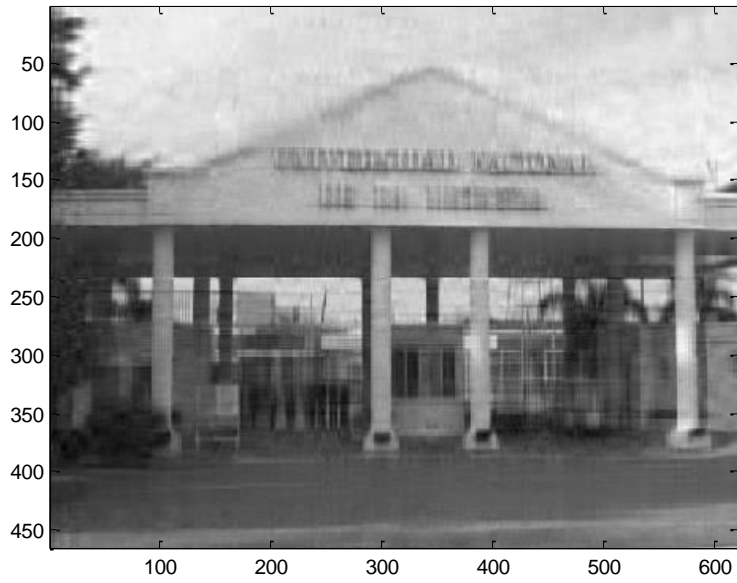
IMAGEN ORIGINAL DEL FRENTE DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA (K=465)



K=12



K=24



K=48 (Aquí la aproximación ya es buena)



K=60



K=72



CONCLUSIONES

En este trabajo he presentado el camino hacia la Descomposición de Valores Singulares de matrices, mencionando y ejemplificando los conceptos previos que son utilizados en la descomposición, que por cierto son de gran importancia y utilidad en el Álgebra lineal. Las descomposiciones de matrices en factores con propiedades especiales tienen mucha utilidad. Tal factorización tiene interés especial si algunos de los factores son matrices ortogonales. La razón es que las transformaciones ortogonales presentan normas y ángulos; en particular preservan las longitudes de los vectores de error que son inevitables en los cálculos numéricos. Cualesquier posibles inestabilidades en los cálculos numéricos se identifican en Σ . Si los valores de A son extremadamente grandes o pequeños, los errores de redondeo son casi inevitables, pero conocer las entradas de Σ y V ayuda a un análisis del error.

Como aplicación importante, entre otras tantas, se ha mostrado su utilización en la compresión de imágenes digitales en tonos de gris, a través de Matlab. Se expuso el ahorro sustancial de datos que es posible gracias a la DVS, lo que facilita su posterior transmisión. Se indicaron además, todos los comando de Matlab utilizados, de modo que cualquier lector pueda realizar una compresión de una imagen.

CITAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ion Zaballa - Departamento de Matemática Aplicada y EIO - Universidad del País Vasco.
- [2] E. Beltrami, *Sulle funzioni bilineari*. *Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Università*, 11, 98–106, 1873. Traducido al inglés por D. Boley: *Technical Report*, University of Minnesota, Department of Computer Science, 90–37, 1990.
- [3] H. Nateman, *A formula for the solving function of a certain integral equation of the second kind*. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 20, 179–187, 1908.
- [4] C. Jordan, *Mémoire sur les formes bilinéaires*. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Deuxième Série*, 19, 35–54, 1874.
- [5] C. Jordan, *Sur la réduction des formes bilinéaires*. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences, Paris*, 78, 614–617, 1874.
- [6] K. Fan, A. J. Hoffman, *Some metric inequalities in the space of matrices*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6, 111–116, 1955.
- [7] C. Lanczos, *Linear systems in self-adjoint form*. *American Mathematical Monthly*, 65, 665–679, 1948.
- [8] J. J. Sylvester, *A new proof that a general quadric may be reduced to its canonical form (that is, a linear function of squares) by means of a real orthogonal substitution*. *The Messenger of Mathematics*, 19, 1–5, 1889.

- [9] J. J. Sylvester, Sur la réduction biorthogonale d'une forme linéo-linéaire à sa forme canonique. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences, Paris, 108, 651–653, 1889.
- [10] E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkürlichen Funktionen nach System vorgeschriebener. Mathematische Annalen, 63, 433–476, 1907.
- [11] H. Bateman, A formula for the solving function of a certain integral equation of the second kind. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 20, 179–187, 1908.
- [12] E. Picard, Sur un théorème général relatif aux intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 25, 79–97, 1910.
- [13] H. Weyl, Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation. Proceedings of the National Academy of Sciences, 35, 408–411, 1949.
- [14] I. C. Gohberg, M. G. Krein, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1969.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Pool, David. *Álgebra lineal, Una introducción moderna*. México DF, Thomson, 2005.
- Lay, David C. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, segunda edición. Addison Wesley Longman de México, 1999.
- Nakos George, Joyner David. *Álgebra lineal con aplicaciones*. México DF, Thomson, 1999.
- Ion Zaballa – “*Valores singulares. ¿Qué son?. ¿Para qué sirven?.*” Departamento de Matemática Aplicada y EIO - Universidad del País Vasco. Dirección URL: http://www.ehu.es/izaballa/Cursos/valores_singulares.pdf

ANEXO 1

Matriz diagonal. EJEMPLOS $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz simétrica. EJEMPLO. De las siguientes matrices, sólo las tres primeras son simétricas.

Simétricas: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$

No simétricas $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 9 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Eigenvalores y eigenvectores

Introducción: Transformaciones Lineales.

Las matrices pueden ser utilizadas para transformar vectores cuando actúan como un tipo de “función” de la forma $b = T_{(x)}$, donde la variable independiente \mathbf{x} de la variable dependiente \mathbf{b} son vectores.

Ejemplo: la ecuación $\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}}_b$ dice que multiplicar por A transforma x en b .

Desde este punto de vista, resolver la ecuación $Ax = b$ equivale a encontrar todos los vectores x en \mathbf{R}^4 que se transforma en el vector b en \mathbf{R}^2 bajo la acción de multiplicar por A .

VECTORES PROPIOS Y VALORES PROPIOS

Aunque una transformación $x \rightarrow Ax$ puede mover vectores en diversas direcciones, frecuentemente sucede que existen vectores especiales sobre los cuales la acción de A es muy sencilla.

Vectores propios y valores propios, EJEMPLO. Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Las

imágenes de u y v bajo la multiplicación por A se muestra en la figura 1. En realidad, Av es solo $2v$. Así que A solamente “estira” o dilata v .

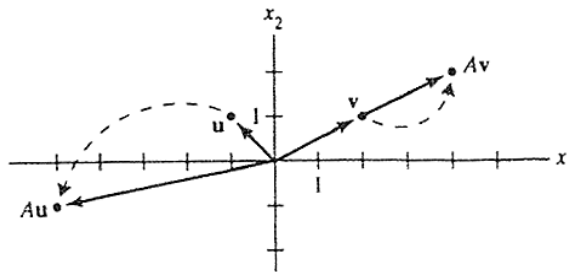


Figura 1. Efectos de la multiplicación por A .

Eigenvector. EJEMPLO. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. ¿Son u y v vectores propios de A ?

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4u$$

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

entonces u es un vector propio correspondiente a un valor propio -4 , pero v no es un vector propio de A , porque Av no es un múltiplo de v .

Eigenvalor y polinomio característico. EJEMPLO. Encontrar los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

El escalar λ es un valor propio de A si y solo si la ecuación $Ax = \lambda x$ tiene una solución no trivial. Pero esta ecuación es equivalente a $Ax - \lambda x = 0$ o

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Este problema es equivalente a encontrar todas las λ tales que la matriz $A - \lambda I$ no sea invertible (por el teorema de la matriz invertible). Luego,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & -6 - \lambda \end{bmatrix}$$

esta matriz no es invertible precisamente cuando su determinante es cero. Así que los valores propios de A son las soluciones de la ecuación **(polinomio característico)**

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & -6 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

de modo que: $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(-6 - \lambda) - (3)(3) = \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$, por lo tanto los valores propios de A son 3 y -7.

Diagonalización ortogonal. EJEMPLO: vamos a diagonalizar ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Su polinomio característico es } -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2 = 0, \text{ por}$$

lo que los eigenvalores de A son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 1$.

Los eigenespacios correspondientes son $E_4 = \text{espacio} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ y $E_1 = \text{espacio} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Se verifica que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, lo que prueba su ortogonalidad.

Necesitamos tres eigenvectores ortonormales. En primer lugar, aplicamos el proceso de Gram-

Schmidt³⁰ a $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para obtener $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. El nuevo vector, que ha sido construido

de tal manera que sea ortogonal a $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, todavía se encuentra en E_1 y de este modo es

ortogonal a $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por consiguiente, tenemos tres vectores mutuamente ortogonales y todo lo

que necesitamos hacer es normalizarlos y construir una matriz Q con esos vectores como sus columnas. Así determinamos que

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ y es sencillo verificar que } Q' A Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

³⁰ Método para construir una base ortogonal (u ortonormal) para cualquier subespacio de \mathbf{R}^n .

ANEXO 2

Comandos de MatLab utilizados para el procesamiento de imágenes.

>>A=imread('ubicación y nombre de la imagen en la PC incluyendo su extensión'); % lee la imagen en la ubicación que se encuentra, el signo % significa que a partir de allí Matlab no toma lo escrito como comando, es decir que se utiliza para anotar referencias. El punto y coma al final de la sentencia significa que Matlab procesa pero no muestra el resultado, si no lo hubiera puesto aparecería la matriz. Por ejemplo, entre paréntesis iría ('C:\Users\User\Desktop\unlam.jpg')

>> A=double(A); % La función *double* se utiliza para poder realizar operaciones con la matriz A que implican números decimales

>> A=A(:, :, 1); % En el caso de imágenes en formato *jpg*, se debe hacer un paso más para obtener la imagen en escala de grises (debido a la forma en que se almacena la imagen *jpg*).

>> figure(1);

>> colormap(gray);

>> imagesc(A); % muestra la imagen original

>> [U,S,V]=svd(A); % descompone la matriz A en valores singulares

>> k=12; % aproxima la matriz A a los 12 primeros valores singulares

```
>> Ak=U(:, 1:k)*S(1:k, 1:k)*V(:, 1:k)';
```

```
>> figure(2);
```

```
>> colormap(gray);
```

```
>> imagesc(Ak); % muestra la figura con k = 12
```

```
>>W=diag(S); % forma un vector columna con los valores singulares, ordenados de mayor a menor
```

```
>>W(100,:) % muestra el valor singular que está en la posición 100
```

```
>>size(A) % muestra el tamaño de la matriz A
```

```
>>semilog(W) % realiza un gráfico semilogarítmico con los valores singulares
```

```
>> IMPIXELINFO % situando el puntero del mouse sobre los punto de la figura, muestra su ubicación en la matriz y el número de pixel asignado
```